Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2, 306—309 (1964)

Allgemeine Systeme von Repräsentanten

Von

HANS G. KELLERER

Jedem Index $i \in M = \{1, \ldots, m\}$ sei eine Menge $\bar{K}_i \subset N = \{1, \ldots, n\}$ zugeordnet. Dann heißen die Mengen $K_i \subset \bar{K}_i$ ein „disjunktes System von Repräsentanten", wenn sie für jedes $i \in M$ mindestens ein Element enthalten und die Mengen $I_k = \{i : k \in K_i\}$ für jedes $k \in N$ höchstens ein Element enthalten. Dieser Begriff ist vor allem dahingehend verallgemeinert worden, daß die Mächtigkeiten $|K_i|$ und $|I_k|$ anderen Bedingungen unterworfen sowie Nebenbedingungen $K_i \supset \underline{K}_i$ berücksichtigt werden (vgl. [3]). Ausgehend von Hilfssätzen über lineare Programme lassen sich dann Kriterien für die Existenz derartiger Systeme von Repräsentanten ableiten.

Die verschiedenen in der Literatur behandelten Verallgemeinerungen sind ihrerseits Spezialfälle der folgenden Definition: Die Mengen K_i bilden ein „allgemeines System von Repräsentanten" zu den Teilmengen $\underline{K}_i$, $\bar{K}_i$ von N und den ganzen Zahlen $\underline{z}_i$, $\bar{z}_i$ bzw. $\underline{s}_k$, $\bar{s}_k$, falls

$$\begin{aligned} &\underline{K}_i \subset K_i \subset \bar{K}_i \quad \text{und} \\ &\underline{z}_i \leqq |K_i| \leqq \bar{z}_i \quad \text{für} \quad i \in M, \\ &\underline{s}_k \leqq |I_k| \leqq \bar{s}_k \quad \text{für} \quad k \in N. \end{aligned}$$

Ausgehend von Untersuchungen eines einfachen Marginalproblems soll im folgenden eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz allgemeiner Systeme von Repräsentanten abgeleitet werden (vgl. [2]). Bezeichnet Γ die Gesamtheit der ganzen Zahlen und $\underline{\Gamma}$ bzw. $\overline{\Gamma}$ die durch $-\infty$ bzw. $+\infty$ vergrößerte Menge Γ, so lautet der dort bewiesene Satz in der hier zweckmäßigsten Form:

Satz 1. *Unter den Voraussetzungen*

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \underline{\Gamma} \ni \underline{c}_{ik} \leqq \bar{c}_{ik} \in \overline{\Gamma} & \textit{für} \quad (i,k) \in (M,N) \\ z_i \in \Gamma \quad \text{für} \quad i \in M \\ s_k \in \Gamma \quad \text{für} \quad k \in N \end{cases}$$

ist die Existenz ganzer Zahlen c_{ik} mit den Eigenschaften

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \underline{c}_{ik} \leqq c_{ik} \leqq \bar{c}_{ik} \quad \text{für} \quad (i,k) \in (M,N) \\ \sum\limits_{k \in N} c_{ik} = z_i \quad \text{für} \quad i \in M \\ \sum\limits_{i \in M} c_{ik} = s_k \quad \text{für} \quad k \in N \end{cases}$$

gleichwertig mit dem linearen Ungleichungssystem

$$
(1.3)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\sum\limits_{i\in I} z_i - \sum\limits_{k\in K} s_k \leqq \sum\limits_{l\in I}\ \sum\limits_{k\notin K} \bar{c}_{ik} - \sum\limits_{i\notin I}\ \sum\limits_{k\in K} \underline{c}_{ik} \\
\sum\limits_{k\in K} s_k - \sum\limits_{i\in I} z_i \leqq \sum\limits_{i\notin I}\ \sum\limits_{k\in K} \bar{c}_{ik} - \sum\limits_{i\in I}\ \sum\limits_{k\notin K} \underline{c}_{ik} \\
\textit{für beliebige Teilmengen } I \textit{ von } M \textit{ und } K \textit{ von } N.
\end{array}\right.
$$

Diese Aussage läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen*

$$
(2.1)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
\underline{\Gamma} \ni \underline{c}_{ik} \leqq \bar{c}_{ik} \in \overline{\Gamma} & \text{für} & (i,k)\in(M,N) \\
\underline{\Gamma} \ni \underline{z}_i \leqq \bar{z}_i \in \overline{\Gamma} & \text{für} & i\in M \\
\underline{\Gamma} \ni \underline{s}_k \leqq \bar{s}_k \in \overline{\Gamma} & \text{für} & k\in N
\end{array}\right.
$$

ist die Existenz ganzer Zahlen c_{ik} mit den Eigenschaften

$$
(2.2)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
\underline{c}_{ik} \leqq c_{ik} \leqq \bar{c}_{ik} & \text{für} & (i,k)\in(M,N) \\
\underline{z}_i \leqq \sum\limits_{k\in N} c_{ik} \leqq \bar{z}_i & \text{für} & i\in M \\
\underline{s}_k \leqq \sum\limits_{i\in M} c_{ik} \leqq \bar{s}_k & \text{für} & k\in N
\end{array}\right.
$$

gleichwertig mit dem linearen Ungleichungssystem

$$
(2.3)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\sum\limits_{i\in I} \underline{z}_i - \sum\limits_{k\in K} \bar{s}_k \leqq \sum\limits_{i\in I}\ \sum\limits_{k\notin K} \bar{c}_{ik} - \sum\limits_{i\notin I}\ \sum\limits_{k\in K} \underline{c}_{ik} \\
\sum\limits_{k\in K} \underline{s}_k - \sum\limits_{i\in I} \bar{z}_i \leqq \sum\limits_{i\notin I}\ \sum\limits_{k\in K} \bar{c}_{ik} - \sum\limits_{i\in I}\ \sum\limits_{k\notin K} \underline{c}_{ik} \\
\textit{für beliebige Teilmengen } I \textit{ von } M \textit{ und } K \textit{ von } N.
\end{array}\right.
$$

Beweis. Es sei $M' = \{0\} \cup M$ und $N' = \{0\} \cup N$ sowie

$$
\underline{c}'_{ik} = \left\{\begin{array}{l}
-\infty \\
-\bar{z}_i \\
-\bar{s}_k \\
\underline{c}_{ik}
\end{array}\right.
\quad\text{und}\quad
\bar{c}'_{ik} = \left\{\begin{array}{lll}
+\infty & \text{für} & i = 0 = k \\
-\underline{z}_i & \text{für} & i \neq 0 = k \\
-\underline{s}_k & \text{für} & i = 0 \neq k \\
\bar{c}_{ik} & \text{für} & i \neq 0 \neq k.
\end{array}\right.
$$

Dann ist die Existenz ganzer Zahlen c_{ik} mit den geforderten Eigenschaften gleichwertig mit der Existenz ganzer Zahlen c'_{ik} mit

$$
\begin{array}{lll}
\underline{c}'_{ik} \leqq c'_{ik} \leqq \bar{c}'_{ik} & \text{für} & (i,k)\in(M',N') \\
\sum\limits_{k\in N'} c'_{ik} = 0 = \sum\limits_{i\in M'} c'_{ik} & \text{für} & i\in M',\ k\in N',
\end{array}
$$

also nach Satz 1 mit dem linearen Ungleichungssystem

$$
\left.\begin{array}{l}
0 \leqq \sum\limits_{i\in I}\ \sum\limits_{k\in N'-K} \bar{c}'_{ik} - \sum\limits_{i\in M'-I}\ \sum\limits_{k\in K} \underline{c}'_{ik} \\
0 \leqq \sum\limits_{i\in M'-I}\ \sum\limits_{k\in K} \bar{c}'_{ik} - i \sum\limits_{i\in I}\ \sum\limits_{k\in N'-K} \underline{c}'_{ik}
\end{array}\right\}\quad \text{für}\quad I\subset M',\ K\subset N'.
$$

Da die rechte Seite der beiden Ungleichungen für $0 \in I \dotplus K$* stets unendlich ist, und beim Übergang $(I, K) \to (M' - I, N' - K)$ lediglich die Reihenfolge der beiden Ungleichungen vertauscht wird, kann ohne Einschränkung $0 \notin I$ und $0 \notin K$ angenommen werden, d. h. das System ist gleichwertig mit dem System

$$\left.\begin{aligned} 0 &\leqq \sum_{i\in I} \sum_{k\in\{0\}\cup(N-K)} \bar{c}'_{ik} - \sum_{i\in\{0\}\cup(M-I)} \sum_{k\in K} \underline{c}'_{ik} \\ 0 &\leqq \sum_{i\in\{0\}\cup(M-I)} \sum_{k\in K} \bar{c}'_{ik} - \sum_{i\in I} \sum_{k\in\{0\}\cup(N-K)} \underline{c}'_{ik} \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad I\subset M,\ K\subset N.$$

Durch Einsetzen von $\underline{c}'_{ik}$ und $\bar{c}'_{ik}$ folgt daraus die Behauptung.

Nun ist es möglich, zum Problem der Repräsentanten zurückzukehren. Dabei ist es zweckmäßig, Systeme von Mengen $K_i \subset N$ für $i \in M$ zusammenzufassen zu Teilmengen $A = \{(i,k) : k \in K_i\}$ von (M, N) mit den Schnittmengen

$$\begin{aligned} A_i &= \{k : (i,k) \in A\} = K_i \quad \text{für} \quad i \in M, \\ A_k &= \{i : (i,k) \in A\} = I_k \quad \text{für} \quad k \in N. \end{aligned}$$

Anwendung von Satz 2 auf die charakteristischen Funktionen

$$\underline{c}_{ik} = \chi_{\underline{A}}(i,k) \quad \text{und} \quad \bar{c}_{ik} = \chi_{\bar{A}}(i,k)$$

führt dann unmittelbar zu folgendem Ergebnis:

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen*

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \emptyset \subset \underline{A} \subset \bar{A} \subset (M,N) & \textit{und} \\ \underline{\Gamma} \ni \underline{z}_i \leqq \bar{z}_i \in \bar{\Gamma} & \textit{für} \quad i \in M \\ \underline{\Gamma} \ni \underline{s}_k \leqq \bar{s}_k \in \bar{\Gamma} & \textit{für} \quad k \in N \end{cases}$$

ist die Existenz eines allgemeinen Systems von Repräsentanten

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \underline{A} \subset A \subset \bar{A} & \textit{mit} \\ \underline{z}_i \leqq |A_i| \leqq \bar{z}_i & \textit{für} \quad i \in M \\ \underline{s}_k \leqq |A_k| \leqq \bar{s}_k & \textit{für} \quad k \in N \end{cases}$$

gleichwertig mit dem Ungleichungssystem

$$(3.3)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{i\in I} \underline{z}_i - \sum\limits_{k\in K} \bar{s}_k \leqq |\bar{A} \cap (I, N-K)| - |\underline{A} \cap (M-I, K)| \\ \sum\limits_{k\in K} \underline{s}_k - \sum\limits_{i\in I} \bar{z}_i \leqq |\bar{A} \cap (M-I, K)| - |\underline{A} \cap (I, N-K)| \\ \textit{für beliebige Teilmengen } I \textit{ von } M \textit{ und } K \textit{ von } N. \end{cases}$$

Im Fall $\underline{A} = \emptyset$ lautet das System (3.3):

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i\in I} \underline{z}_i &\leqq \sum_{k\in K} \bar{s}_k + \sum_{k\notin K} |\bar{A}_k \cap I| \\ \sum_{k\in K} \underline{s}_k &\leqq \sum_{i\in I} \bar{z}_i + \sum_{i\notin I} |\bar{A}_i \cap K| \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad I \subset M,\ K \subset N.$$

* $I \dotplus K$ bezeichnet den Unterschied der Mengen I und K.

Daraus folgt sofort:

Satz 4. *Im Fall* $\underline{A} = \emptyset$ *ist* (3.3) *gleichbedeutend mit dem Ungleichungssystem*

$$\sum_{i \in I} \underline{z}_i \leqq \sum_{k \in N} \min\{\bar{s}_k, |\bar{A}_k \cap I|\} \quad \textit{für alle} \quad I \subset M,$$
$$\sum_{k \in K} \underline{s}_k \leqq \sum_{i \in M} \min\{\bar{z}_i, |\bar{A}_i \cap K|\} \quad \textit{für alle} \quad K \subset N.$$

Abschließend sei dieses Ergebnis auf den Fall disjunkter Systeme von Repräsentanten angewandt. Durch Einsetzen der Werte $\underline{z}_i = 1$, $\bar{z}_i = \infty$ und $\underline{s}_k = 0$, $\bar{s}_k = 1$ entsteht hier die Bedingung

$$\begin{aligned} |I| &\leqq \sum_{k \in N} \min\{1, |\bar{A}_k \cap I|\} \\ &= |\{k : \bar{A}_k \cap I \neq \emptyset\}| = |\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i| \quad \text{für alle} \quad I \subset M, \end{aligned}$$

die sich auch durch kombinatorische Überlegungen ableiten läßt (vgl. [*1*]).

Literatur

[*1*] Hall, Ph.: On Representatives of Subsets. J. London math. Soc. **10**, 26–30 (1935).

[*2*] Kellerer, H. G.: Funktionen auf Produkträumen mit vorgegebenen Marginal-Funktionen. Math. Ann. **144**, 323–344 (1961).

[*3*] Vogel, W.: Lineare Programme und allgemeine Vertretersysteme. Math. Z. **76**, 103–115 (1961).

Mathematisches Institut
der Universität München
8 München, Schellingstr. 2–8

(*Eingegangen am 22. März 1963*)