Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 15, 104–110 (1970)

Über die Desintegration von abstrakten Massen*

Paul Georgiou

Summary. Under the condition that a lifting exists, the existence of the "disintegration" of abstract positive bounded measures is established. Basic properties of this disintegration as well as the special case of bounded Radon measures are studied.

Die Frage, die in dieser Note untersucht wird, ist jene nach der Existenz der Desintegration von abstrakten, positiven und beschränkten Maßen in bezug auf einen σ-Homomorphismus. Es handelt sich nämlich um folgendes: es seien μ ein positives Maß, das auf einer abstrakten Booleschen σ-Algebra $\mathfrak{A}$ definiert ist, und p ein σ-Homomorphismus von einer Booleschen σ-Algebra $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$; die Desintegration von μ bezüglich p ist dann eine Zufallsvariable auf $\overline{\mathfrak{B}}$ mit Werten im Raum $\hat{M}$ aller (additiven) Maße auf $\mathfrak{A}$, die gewisse Bedingungen erfüllt (s. Definition in § 1), wobei $(\overline{\mathfrak{B}}, \bar{\nu})$ die zu $(\mathfrak{B}, \mu \circ p)$ gehörige strikt-positive Maßalgebra bezeichnet. Unter einer „Zufallsvariablen" auf $\overline{\mathfrak{B}}$ versteht man im allgemeinen einen σ-Homomorphismus von einer geeigneten σ-Mengenalgebra des Wertbereichs dieser „Zufallsvariablen" in $\overline{\mathfrak{B}}$ selbst. Diese Frage, nach der Existenz nämlich der Desintegration, wird unter der Voraussetzung der Existenz eines Liftings von $(\mathfrak{B}, \mu \circ p)$ gelöst und zwar in folgender Weise: Mit Hilfe des Liftings, das als eine Isometrie von $(\overline{\mathfrak{B}}, \bar{\nu})$ auf eine Maßunteralgebra $(\mathfrak{B}_0, \nu_0)$ von $(\mathfrak{B}, \mu \circ p)$ aufgefaßt wird ($\mathfrak{B}_0$ ist im allgemeinen keine σ-Unteralgebra von $\mathfrak{B}$), ist auf $\overline{\mathfrak{B}}$ ein σ-additives Maß $m_{p\mu}$ mit Werten in $\hat{M}$ definiert, dessen Radon-Nikodymscher Integrand in bezug auf $\bar{\nu}$ die gesuchte Desintegration ist. Falls $\mathfrak{B}$ eine σ-Mengenalgebra in S ist (S beliebige Menge), dann induziert die Desintegration eine meßbare Funktion λ von S in $\hat{M}$ (ebenfalls Desintegration von μ bezüglich p genannt). Diese Funktion λ wird mit Hilfe eines durch das Lifting erzeugten Monomorphismus (der sogar eine Isometrie ist) p_0 von $\mathfrak{B}_0$ in $\mathfrak{A}$ konstruiert, und aus dieser Konstruktion folgt, daß $\lambda(s)$ für alle $s \in S$ von den Elementen des Filters $p_0(\mathfrak{F}_s)$ in $\mathfrak{A}$ getragen wird, wobei $\mathfrak{F}_s$ der von s induzierte maximale Filter in $\mathfrak{B}_0$ ist. Falls μ ein positives und beschränktes Radonsches Maß auf einem lokalkompakten Raum E ist, dann induziert die Desintegration (durch Anwendung derselben Methode) eine weitere Funktion λ' auf S mit Werten im Raum der positiven Radonschen Maße m auf E mit $\|m\| \leqq 1$. Hieraus bekommt man nun eine Charakterisierung des starken Liftings, falls S ein kompakter Raum und ν ein positives Radonsches Maß auf S mit $\operatorname{Supp} \nu = S$ sind; man zeigt nämlich, daß (S, ν) ein starkes Lifting besitzt, wenn ein Lifting L: $(\mathfrak{B}, \nu) \to (\mathfrak{B}_0, \nu_0)$ ($\mathfrak{B}$ bezeichnet die Klasse der ν-meßbaren Mengen) existiert, so daß die Klasse $\{\bar{B}; B \in \mathfrak{B}_0\}$ die Punkte von S trennt ($\bar{B}$ bezeichnet die abgeschlossene Hülle von B).

* Die vorliegende Arbeit wurde während einer Förderung durch die Alexander von Humboldt-Stiftung abgefaßt.

§ 1. Voraussetzungen und Definitionen

Den Betrachtungen dieser Arbeit liegt zugrunde eine Maßalgebra $(\mathfrak{A}, \mu)$, wobei μ ein positives und σ-additives (beschränktes) Maß ist, sowie ein σ-Homomorphismus p von einer Booleschen σ-Algebra $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$. Es sei $\nu = \mu \circ p$ das Bildmaß auf $\mathfrak{B}$ von μ bezüglich p und es bezeichne $(\overline{\mathfrak{B}}, \bar{\nu})$ die zu $(\mathfrak{B}, \nu)$ gehörige striktpositive Maßalgebra. Folgende Voraussetzung ist weiterhin notwendig:

Hypothese. $(\mathfrak{B}, \nu)$ *besitzt ein Lifting*; d.h. es existiert eine Maßunteralgebra $(\mathfrak{B}_0, \nu_0)$ von $(\mathfrak{B}, \nu)$ mit $\nu_0 = \nu|_{\mathfrak{B}_0}$, die isometrisch zu $(\overline{\mathfrak{B}}, \bar{\nu})$ ist. Es sei $L\colon \overline{\mathfrak{B}} \to \mathfrak{B}_0$ diese Isometrie.

Es sei nun $\langle M, A\rangle$ das Dualsystem der Räume M der reellen, σ-additiven Maße auf $\mathfrak{A}$ und A der einfachen reellen Zufallsvariablen (d.h. Linearkombinationen von Indikatorfunktionen von Elementen aus $\mathfrak{A}$) mit der üblichen Bilinearform $\langle m, \alpha\rangle = m(\alpha) = \int \alpha\, dm$. Darüber hinaus sei $\hat{M}$ die vollständige Hülle von M bezüglich der uniformen Struktur der $\sigma(M, A)$-Topologie. Eine (schwache) Zufallsvariable $\bar{\mathfrak{l}}$ auf $\overline{\mathfrak{B}}$ mit Werten in $\hat{M}$ ist [2] durch einen σ-Homomorphismus $h(\bar{\mathfrak{l}})$ von $\mathfrak{H}(\hat{M})$ in $\overline{\mathfrak{B}}$ definiert, wobei $\mathfrak{H}(\hat{M})$ die von den Halbräumen von $\hat{M}$ (in bezug auf A) erzeugte σ-Mengenalgebra bezeichnet. Wenn nun n ein σ-additives Maß auf $\overline{\mathfrak{B}}$ ist und $h(\bar{\mathfrak{l}})\colon \mathfrak{H}(\hat{M}) \to \overline{\mathfrak{B}}$ eine $\hat{M}$-wertige Zufallsvariable auf $\overline{\mathfrak{B}}$, dann [1; §3, No 1] bezeichne $m = \int \bar{\mathfrak{l}}\, dn$ jenes Element m von $\hat{M}$, das durch die Relationen

$$m(a) = \int \langle \bar{\mathfrak{l}}, I_a\rangle\, dn; \qquad a \in \mathfrak{A}$$

definiert ist, wobei $\langle \bar{\mathfrak{l}}, I_a\rangle$ die Zufallsvariable bezeichnet, die durch den σ-Homomorphismus $h(\langle \bar{\mathfrak{l}}, I_a\rangle)$ von der σ-Algebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ der Borelschen Mengen der Zahlengerade $\mathbb{R}$ in $\overline{\mathfrak{B}}$ definiert ist (d.h. also: $\langle \bar{\mathfrak{l}}, I_a\rangle$ ist eine reelle Zufallsvariable auf $\overline{\mathfrak{B}}$), so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \arrow[r, "h(\langle \bar{\mathfrak{l}}, I_a\rangle)"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"'] & \overline{\mathfrak{B}} \\
\mathfrak{H}_{I_a}(\hat{M}) \arrow[r, "\subseteq"'] & \mathfrak{H}(\hat{M}) \arrow[u, "h(\bar{\mathfrak{l}})"']
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist; $\mathfrak{H}_{I_a}(\hat{M})$ bezeichnet die σ-Mengenalgebra in $\hat{M}$, die von den Halbräumen $\{m \in \hat{M}; \langle m, I_a\rangle < \rho\}$; $\rho \in \mathbb{R}$ erzeugt wird (I_a Indikatorfunktion von a); den Isomorphismus zwischen $\mathfrak{H}_{I_a}(\hat{M})$ und $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ induziert die eineindeutige Abbildung

$$\{m \in \hat{M};\ \langle m, I_a\rangle < \rho\} \to \{\zeta \in \mathbb{R};\ \zeta < \rho\}; \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

Definition. Eine (schwache) Zufallsvariable $\bar{\lambda}$ auf $\overline{\mathfrak{B}}$ mit Werten in $\hat{M}$ heißt eine *Desintegration* von μ bezüglich p, wenn $\mu = \int \bar{\lambda}\, d(\overline{\mu \circ p})$ ist.

Bemerkungen über die Terminologie: Wie im folgenden Paragraphen gezeigt wird, ist die Desintegration von μ bezüglich p nicht nur eine schwache Zufallsvariable mit Werten in $\hat{M}$; sie ist darüber hinaus der (stochastische) Limes einer gerichteten Familie von einfachen M-wertigen Zufallsvariablen (sie ist gewissermaßen „vague" im Sinne von [1]). Wenn $\mathfrak{B}$ eine σ-Mengenalgebra in S ist, dann induziert die schon definierte Desintegration eine Funktion von S in $\hat{M}$; diese wird ebenfalls Desintegration genannt.

§ 2. Die Desintegration

Es sei $m_{p\mu}$ folgende Funktion auf $\overline{\mathfrak{B}}$ mit Werten in M:

$$m_{p\mu}\colon\ \overline{\mathfrak{B}} \ni b \to I_{\bar{p}(b)} \cdot \mu \in M,$$

wobei $\bar{p}$ die Komposition der Homomorphismen

$$\overline{\mathfrak{B}} \xrightarrow{L} \mathfrak{B}_0 \xrightarrow{\subseteq} \mathfrak{B} \xrightarrow{p} \mathfrak{A}$$

ist. Es sei bemerkt, daß $\bar{p}$ ein Isomorphismus (genauer: eine Isometrie) von $\overline{\mathfrak{B}}$ auf $\bar{p}(\overline{\mathfrak{B}})$ ist. Es gilt nun das

Lemma. *$m_{p\mu}$ ist ein σ-$\hat{M}$-Maß (im Sinne von [3]); d.h.: für jedes $\alpha \in A$ ist $\alpha \circ m_{p\mu}$ ein reelles σ-additives Maß auf $\overline{\mathfrak{B}}$.*

Beweis. Es sei $b_n \downarrow 0_{\overline{\mathfrak{B}}}$ in $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\bar{p}(b_n) \downarrow a$ in $\mathfrak{A}$; dann ist aber $\mu(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(\bar{p}(b_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{\nu}(b_n) = 0$; d.h. also, daß a ein μ-Nullelement von $\mathfrak{A}$ ist. Es sei weiter $\alpha \in A$; dann folgt die Behauptung des Lemmas aus den Relationen:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle m_{p\mu}(b_n), \alpha\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle I_{\bar{p}(b_n)} \cdot \mu, \alpha\rangle = \lim_{n\to\infty} (I_{\bar{p}(b_n)} \cdot \mu)(\alpha)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(I_{\bar{p}(b_n)} \cdot \alpha) = \mu(I_a \cdot \alpha) = 0,\end{aligned}$$

weil a ein μ-Nullelement von $\mathfrak{A}$ ist.

Wenn nun $\bar{\lambda}$ eine Zufallsvariable auf $\overline{\mathfrak{B}}$ mit Werten in $\hat{M}$ ist, dann ist auf $\overline{\mathfrak{B}}$ folgende Funktion f definiert:

$$f\colon\ \overline{\mathfrak{B}} \ni b \to \Big(\int_b \langle \bar{\lambda}, I_a\rangle\, d\bar{\nu};\quad a \in \mathfrak{A}\Big).$$

Ist darüber hinaus $\bar{\lambda}$ eine Desintegration von μ bezüglich p, dann ist $f = m_{p\mu}$, weil

$$\begin{aligned}\int_b \langle \bar{\lambda}, I_a\rangle\, d\bar{\nu} &= \int \langle \bar{\lambda}, I_a\rangle \cdot I_b \cdot d\,\overline{\mu \circ p}\\ &= \int \langle \bar{\lambda}, I_a\rangle \cdot I_b \cdot d(\mu \circ \bar{p})\\ &= \int \langle \bar{\lambda}, I_a\rangle\, d\big((I_{\bar{p}(b)} \cdot \mu) \circ \bar{p}\big) = (I_{\bar{p}(b)} \cdot \mu)(a);\end{aligned}$$

das folgt unmittelbar aus den Tatsachen, daß (i) $\overline{\mu \circ p} = \mu \circ \bar{p}$ und (ii) $I_b \cdot (\mu \circ \bar{p}) = (I_{\bar{p}(b)} \cdot \mu) \circ \bar{p}$ ist. Für die Betrachtungen dieser Note ist dieses σ-$\hat{M}$-Maß $m_{p\mu}$ wesentlich, weil gilt:

Theorem 1. *Es existiert die Desintegration $\bar{\lambda}$ von μ bezüglich p, und sie ist gerade der Radon-Nikodymsche Integrand von $m_{p\mu}$ in bezug auf $\overline{\mu \circ p}$.*

Beweis. Daß der Integrand von $m_{p\mu}$ bezüglich $\overline{\mu \circ p}$ existiert, wurde schon in [3; Satz 10] bewiesen. Es sei nun $\bar{\lambda}$ dieser Integrand; dann ist $\int_b \bar{\lambda}\, d\,\overline{\mu \circ p} = m_{p\mu}(b) = I_{\bar{p}(b)} \cdot \mu$ für $b \in \overline{\mathfrak{B}}$; d.h. also $\bar{\lambda}$ ist die Desintegration von μ bezüglich p.

Aus dieser Tatsache folgt [3; Satz 10], daß die Desintegration $\bar{\lambda}$ von μ bezüglich p folgende Gestalt hat: sie ist der stochastische Limes in bezug auf $\bar{\nu}$ (und auf die uniforme Struktur auf $\hat{M}$, die von der schwachen Topologie $\sigma(M, A)$ induziert wird) der gerichteten Familie $(\bar{\lambda}_\delta)_{\delta \in \Delta}$ von einfachen Zufallsvariablen auf $\overline{\mathfrak{B}}$ mit

Werten in M, wobei Δ die gerichtete Menge der (endlichen) Zerlegungen des Einselements von $\mathfrak{B}$ ist und $\bar{\lambda}_\delta = \sum_{b \in \delta} I_b\, m_b$; hier bezeichnet

$$m_b = \frac{m_{p\mu}(b)}{\bar{v}(b)} = \left(\frac{\langle m_{p\mu}(b), \alpha \rangle}{\bar{v}(b)} \right)_{\alpha \in A} \in M;$$

d.h. daß m_b folgendes Maß auf $\mathfrak{A}$ ist:

$$\mathfrak{A} \ni a \to m_b(a)$$

mit

$$m_b(a) = \frac{m_{p\mu}(b)}{\bar{v}(b)}(a) = \frac{(I_{\bar{p}(b)} \cdot \mu)(a)}{(\mu \circ \bar{p})(b)} = \frac{\mu(\bar{p}(b) \wedge a)}{\mu(\bar{p}(b))}.$$

Im folgenden sei vorausgesetzt, daß $\mathfrak{B}$ eine σ-Mengenalgebra in einer gewissen Menge S ist.

Wenn nun $\bar{\lambda}$ die Desintegration von μ bezüglich p ist, dann induziert $\bar{\lambda}$ eine (schwach meßbare) Funktion auf S mit Werten in $\hat{M}$ in folgender Weise: Es sei $(\bar{\lambda}_\delta)_{\delta \in \Delta}$ die schon definierte Familie, die stochastisch nach $\bar{v}$ gegen $\bar{\lambda}$ konvergiert; d.h., daß die Familie $(\langle \bar{\lambda}_\delta, I_a \rangle)_{\delta \in \Delta}$ stochastisch nach $\bar{v}$ gegen $\langle \bar{\lambda}, I_a \rangle$ konvergiert ($a \in \mathfrak{A}$). Hieraus folgt [7], daß $(\langle \bar{\lambda}_\delta, I_a \rangle)_{\delta \in \Delta}$ algebraisch gegen die reelle Zufallsvariable $\langle \bar{\lambda}, I_a \rangle$ konvergiert. Es sei nun $f_a = L'(\langle \bar{\lambda}, I_a \rangle)$, wobei L' das Lifting auf dem Raum $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^{\infty}(S, \mathfrak{B}, v)$ aller beschränkten reellen und meßbaren Funktionen bezeichnet, das von L induziert wird. L' ist [6] eine positive lineare Funktion von $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^{\infty}(S, \mathfrak{B}, v)/\mathfrak{N}_{\mathbb{R}}(S, \mathfrak{B}, v)$ in $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^{\infty}(S, \mathfrak{B}, v)$, die darüber hinaus die Eigenschaften: (i) $L'(\tilde{1}) = 1$ und (ii) $L'(\widetilde{fg}) = L'(\tilde{f})\, L'(\tilde{g})$ hat; $\mathfrak{N}_{\mathbb{R}}(S, \mathfrak{B}, v)$ bezeichnet die Klasse der reellen v-Nullfunktionen auf S und $f \to \tilde{f}$ die kanonische Abbildung von $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^{\infty}(S, \mathfrak{B}, v)$ auf $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^{\infty}(S, \mathfrak{B}, v)/\mathfrak{N}_{\mathbb{R}}(S, \mathfrak{B}, v)$. Wie aus der Definition von $\langle \bar{\lambda}_\delta, I_a \rangle$ folgt, ist $\langle \bar{\lambda}, I_a \rangle = I_{\bar{p}^{-1}(a)}$ für jedes $a \in \bar{p}(\mathfrak{B})$; in der Tat konvergiert die Familie $(\langle \bar{\lambda}_\delta, I_a \rangle)_{\delta \in \Delta}$ gleichmäßig gegen $I_{\bar{p}^{-1}(a)}$, weil $\langle \bar{\lambda}_\delta, I_a \rangle = I_{\bar{p}^{-1}(a)}$ für δ feiner als $\{\bar{p}^{-1}(a), \bar{p}^{-1}(-a)\}$ ist. Hieraus folgt nun, daß $f_a = L'(\langle \bar{\lambda}, I_a \rangle) = I_{p_0^{-1}(a)}$ für alle $a \in p_0(\mathfrak{B}_0) = \bar{p}(\mathfrak{B})$ ist, wobei p_0 die Komposition der Homomorphismen

$$\mathfrak{B}_0 \xrightarrow{\subseteq} \mathfrak{B} \xrightarrow{p} \mathfrak{A}$$

bezeichnet (p_0 ist auch eine Isometrie). Da nun jedes $\langle \bar{\lambda}, I_a \rangle$ (also auch jedes f_a) positiv ist, läßt sich dann die Abbildung

$$I_a \to f_a; \qquad a \in \mathfrak{A}$$

zu einer positiven, linearen Funktion auf A mit Werten in den Raum der reellen $\mathfrak{B}$-meßbaren Funktionen auf S erweitern. Hieraus und aus [2; Sätze 2 und 3] folgt, daß eine Funktion $\lambda: S \to \hat{M}$ existiert, so daß

$$\langle \lambda, I_a \rangle = f_a; \qquad a \in \mathfrak{A}.$$

λ ist dann der stochastische nach v Limes der Familie $(\lambda_\delta)_{\delta \in \Delta}$, wobei $\lambda_\delta = \sum_{b \in \delta} I_{L(b)} \cdot m_b$ ist. Dabei sei auch bemerkt [2], daß der σ-Homomorphismus von $\mathfrak{H}(\hat{M})$ in $\mathfrak{B}$, der von λ erzeugt wird, die gemeinsame Erweiterung aller σ-Homomorphismen $h(\langle \lambda, I_a \rangle): \mathfrak{H}_{I_a}(\hat{M}) \to \mathfrak{B}$ ist.

Wenn $\mathfrak{F}_s$ den durch $s \in S$ definierten (maximalen) Filter in $\mathfrak{B}_0$ bezeichnet, dann gilt das

Theorem 2. *Für alle $s \in S$ sind folgende Aussagen erfüllt:*

(i) *$\lambda(s)$ ist konzentriert auf a für $a \in p_0(\mathfrak{F}_s)$;*

(ii) *$\lambda(s)$ hat das Totalmaß* 1.

(iii) *$\lambda(s)$ ist absolutstetig in bezug auf μ.*

Beweis. Zunächst sei folgendes bemerkt: da $\langle \lambda, I_a \rangle$ für jedes $a \in \mathfrak{A}$ eine positive reelle Funktion ist, so ist $\lambda(s)$ für jedes s ein positives (additives) Maß. (i) und (ii) folgt dann unmittelbar aus der Tatsache, daß $\langle \lambda, I_a \rangle = I_{p_{\overline{0}}^{-1}(a)}$ für $a \in p_0(\mathfrak{B}_0)$ ist. Wenn nun $\mu(a) = 0$ ist, dann ist $(I_{\bar{p}(b)} \cdot \mu)(a) = 0$ für jedes $b \in \overline{\mathfrak{B}}$; d.h. also $\langle \bar{\lambda}, I_a \rangle = 0$. Hieraus folgt $f_a = L'(\langle \bar{\lambda}, I_a \rangle) = 0$ und $\lambda(s)(a) = 0$ für jedes $s \in S$.

§ 3. Wertbereich der Desintegration; Spezialfall

Es seien $(\bar{\lambda}_\delta)_{\delta \in \Delta}$, $\bar{\lambda}$, f_a und λ wie im vorigen Paragraphen. Wenn M_0 die abgeschlossene (in bezug auf $\sigma(M, A)$) konvexe Hülle der Menge $\{m_b;\, b \in \overline{\mathfrak{B}}\} \cup \{0\}$ ist, dann gilt der

Satz 1. *Die Desintegration λ hat Werte aus M_0.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\langle \lambda, \alpha \rangle \leqq \varepsilon$ ist, falls $M_0 \subseteq H_{\alpha\varepsilon}$, wobei $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \zeta_i \cdot I_{a_i} \in A$ und $H_{\alpha\varepsilon}$ den abgeschlossenen Halbraum $\{m \in \hat{M};\, \langle m, \alpha \rangle \leqq \varepsilon\}$ bezeichnet. Aus der Definition von M_0 und $\bar{\lambda}_\delta$ folgt, daß $\langle \bar{\lambda}_\delta, \alpha \rangle \leqq \varepsilon$ für alle $\delta \in \Delta$ ist, und hieraus

$$\begin{aligned}\langle \bar{\lambda}, \alpha \rangle &= \sum_{i=1}^{k} \zeta_i \langle \bar{\lambda}, I_{a_i} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} \zeta_i \operatorname*{alglim}_{\delta \in \Delta} \langle \bar{\lambda}_\delta, I_{a_i} \rangle \\ &= \operatorname*{alglim}_{\delta \in \Delta} \sum_{i=1}^{k} \zeta_i \langle \bar{\lambda}_\delta, I_{a_i} \rangle \leqq \varepsilon .\end{aligned}$$

Es ist also

$$\varepsilon \geqq L'(\langle \bar{\lambda}, \alpha \rangle) = \sum_{i=1}^{k} \zeta_i L'(\langle \bar{\lambda}, I_{a_i} \rangle) = \sum_{i=1}^{k} \zeta_i \langle \lambda, I_{a_i} \rangle = \langle \lambda, \alpha \rangle .$$

Die Desintegration von μ bezüglich p hat, wie schon gezeigt wurde, im allgemeinen Werte aus $\hat{M}$, d.h. aus dem Bereich der (rein) additiven Maße auf $\mathfrak{A}$. Es sei nun folgender Spezialfall betrachtet: Bezeichne E einen lokalkompakten Raum, μ ein beschränktes, positives, Radonsches Maß auf E und $\mathfrak{A}$ die Boolesche σ-Algebra der μ-integrierbaren Mengen. Es sei weiter $(\bar{\lambda}_\delta)_{\delta \in \Delta}$ die gerichtete Familie des vorigen Paragraphen. Wenn man nun an der Stelle von A die Klasse $\mathscr{K}(E)$ der stetigen reellen Funktionen auf E mit kompakten Träger setzt und die Methode des vorigen Paragraphen anwendet, dann bekommt man eine Funktion λ' auf S mit Werten in den Raum der (positiven) Radonschen Maßen auf E. Man betrachtet nämlich die lineare Abbildung $h \to f_h$ von $\mathscr{K}(E)$ in den Raum der reellen Zufallsvariablen auf $\mathfrak{B}$, wobei $f_h = L'(\langle \bar{\lambda}, h \rangle)$ ist; $\langle \bar{\lambda}, h \rangle$ bezeichnet den (algebraischen) Limes der Familie $(\langle\bar{\lambda}_\delta, h\rangle)_{\delta\in\Delta}$. Dann ist λ' die von $h\to f_h$ induzierte Abbildung, die folgende Eigenschaften hat:

Satz 2. *Für jede offene Teilmenge a von E gilt die Relation*

$$\langle\lambda', I_a\rangle \leqq \langle\lambda, I_a\rangle.$$

Beweis. Die Behauptung des Satzes folgt aus den Resultaten (über die Ordnungsrelation in dem Raum der Martingale mit gegebener Basis und ihre Integrandsdarstellungen) [7; §§1.4 und 2.3] und die Relationen:

$$\begin{aligned}\langle\bar{\lambda}, I_a\rangle &= \operatorname*{alglim}_{\delta\in\Delta} \langle\bar{\lambda}_\delta, I_a\rangle\\ &= \operatorname*{alglim}_{\delta\in\Delta} \left(\sup(\langle\bar{\lambda}_\delta, h\rangle;\ h\in\mathcal{K}(E) \text{ und } h\leqq I_a)\right)\\ &\geqq \sup\left(\operatorname*{alglim}_{\delta\in\Delta} \langle\bar{\lambda}_\delta, h\rangle;\ h\in\mathcal{K}(E) \text{ und } h\leqq I_a\right)\\ &= \sup\left(\langle\bar{\lambda}, h\rangle;\ h\in\mathcal{K}(E) \text{ und } h\leqq I_a\right).\end{aligned}$$

Hieraus folgt nun offensichtlich der

Satz 3. *Für alle $s\in S$ sind folgende Aussagen erfüllt:*

(i) Supp $\lambda'(s)\subseteq\bigcap\left(\bar{a};\ a\in p_0(\mathfrak{F}_s)\right)$; *$\bar{a}$ bezeichnet die abgeschlossene Hülle von a und* Supp *den Träger des Maßes.*

(ii) *$\lambda'(s)$ hat das Totalmaß $\leqq 1$. Ist darüber hinaus E kompakt, dann hat das positive Radonsche Maß $\lambda'(s)$ das Totalmaß 1 für alle $s\in S$.*

§4. Bemerkungen über das starke Lifting

Für die Betrachtungen dieses Paragraphen sei $\mathfrak{B}$ die Boolesche σ-Algebra der integrierbaren Teilmengen eines kompakten Raumes S in bezug auf ein positives Radonsches Maß ν mit Supp $\nu=S$. Es seien weiter E ein kompakter Raum, μ ein positives Radonsches Maß auf E, $\mathfrak{A}$ die Boolesche σ-Algebra der μ-integrierbaren Teilmengen von E und π eine stetige Funktion von E auf S, so daß $\pi(\mu)=\nu$ (im Sinne von [1]); somit wird $\nu=\mu\circ\bar{\pi}^1$. Es ist bekannt, daß $(\mathfrak{B},\nu)$ ein Lifting besitzt, und hieraus folgt, daß der Satz 3 gilt.

Ein Lifting L von $(\mathfrak{B},\nu)$ heißt stark, wenn $L(U)\supseteq U$ für jede offene Teilmenge U von S gilt. Weiteres über starke Liftings s. in [6]. A. Ionescu Tulcea hat in [4] das folgende Theorem bewiesen:

Theorem von A. Ionescu Tulcea. Es seien S ein kompakter Raum und ν ein positives Radonsches Maß auf S mit Supp $\nu=S$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) Das Paar (S,ν) (d.h. $(\mathfrak{B},\nu)$ im Sinne dieser Note) besitzt ein starkes Lifting.

(b) Für jedes System $\{E,\mu,\pi\}$, wobei E ein kompakter Raum ist, μ ein positives Radonsches Maß auf E und π eine stetige Funktion von E auf S mit $\pi(\mu)=\nu$, existiert ein Kern l: $s\to\mathrm{l}(s)$, d.h. eine Funktion von S in den Raum der positiven Radonschen Maße m auf E mit $\|m\|=1$, die folgende Eigenschaften hat:

(b_1) $\mu=\int_S \mathrm{l}(s)\,d\nu(s)$

und

(b_2) Supp $\mathrm{l}(s)\subseteq\bar{\pi}^1(\{s\})$ für jedes $s\in S$.

Es sei nun $\mathfrak{S} = \{\bar{B};\ B \in \mathfrak{B}_0\}$ ($\bar{B}$ bezeichnet die abgeschlossene Hülle von B). Falls L ein starkes Lifting ist, dann trennt $\mathfrak{S}$ die Punkte von S. Umgekehrt: wenn $\mathfrak{S}$ die Punkte von S trennt, dann folgt aus dem Satz 3, daß $\operatorname{Supp} \lambda'(s) \subseteq \bar{\pi}^1(\{s\})$ (man setzt $p = \bar{\pi}^1$) und aus dem Theorem von A. Ionescu Tulcea folgt nun das

Corollar. *Es seien S ein kompakter Raum, ν ein positives Radonsches Maß auf S mit* $\operatorname{Supp} \nu = S$*; (S, ν) besitzt ein starkes Lifting genau dann, wenn ein Lifting $L\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_0$ existiert, so daß die zu L gehörige Klasse $\mathfrak{S}$ die Punkte von S trennt.*

Literatur

1. Bourbaki, N.: Intégration; Ch. 5. Paris: Hermann 1956.
2. Georgiou, P.: Schwache Zufallsvariable auf Booleschen σ-Algebren. Math. Ann. **169**, 283–288 (1967).
3. – Vektorwertige Maße und Zufallsvariable auf Booleschen Algebren und der Satz von Radon-Nikodym. Symposium on Probability Methods in Analysis. Lecture Notes in Mathematics **31**, 69–78 (1967).
4. Ionescu Tulcea, A.: Sur le relèvement fort et la désintégration des mesures. C. r. Acad. Sci. Paris **262**, A 617 – A 618 (1966).
5. – On the lifting property. Proc. Symp. in Analysis, Queen's Univ., June 1967.
6. – Ionescu Tulcea, C.: On the lifting property (IV). Disintegration of measures. Ann. Inst. Fourier **14**, 445–472 (1964).
7. Krickeberg, K., Pauc, C.: Martingales et Dérivation. Bull. Soc. math. France **91**, 455–544 (1963).

Dr. Paul Georgiou
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität
D-6900 Heidelberg 1
Tiergartenstraße
Neubau Standardgebäude

(Eingegangen am 26. September 1968)