

## Charakteristische Funktionale zufälliger Maße

WILHELM VON WALDENFELS

Eingegangen am 15. Januar 1968

*Summary.* The principal aim of the paper is an analogue of Lévy's theorem in the following way: Let  $\mathfrak{X}$  be a locally compact space denumerable in the infinity and consider the space  $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$  of all positive Radon measures on  $\mathfrak{X}$  with the "topologie vague" in the sense of Bourbaki. The Fouriertransform of a tight measure  $P$  on  $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$  is the functional

$$\varphi \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}) \rightarrow \hat{P}(\varphi) = \int P(\mu) \exp i \langle \mu, \varphi \rangle$$

where  $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$  is the space of all continuous functions with compact support.

Consider a sequence  $P_1, P_2, \dots$  of tight measures on  $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ , with the property that  $\hat{P}_1(\varphi), \hat{P}_2(\varphi), \dots$  converges to  $F(\varphi)$  for fixed  $\varphi \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ , and let  $F(\lambda\varphi) \rightarrow F(0)$  for  $\varphi \geq 0, \lambda \rightarrow 0$ . Then  $P_1, P_2, \dots$  is uniformly tight and converges to a tight measure  $P$  on  $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$  for each continuous bounded function on  $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$  and  $F = \hat{P}$ . An application of this theorem is given.

Sei  $\mathfrak{X}$  ein lokal kompakter, im Unendlichen abzählbarer Raum und sei  $\mathfrak{L}$  die Menge der stetigen, reellwertigen Funktionen auf  $\mathfrak{X}$  mit kompaktem Träger. Ein positives Radonmaß auf  $\mathfrak{X}$  ist ein positives, lineares Funktional auf  $\mathfrak{L}$ . Die Menge  $\mathfrak{M}$  aller positiven Radonmaße auf  $\mathfrak{X}$ , versehen mit der schwachen Topologie über  $\mathfrak{L}$ , das ist die vage Topologie im Sinne von BOURBAKI [1], bildet einen vollständig regulären Raum. Sei  $P$  ein positives straffes Maß auf  $\mathfrak{M}$ , so ist die Fouriertransformierte von  $P$  die Funktion

$$\begin{aligned} \hat{P}: \mathfrak{L} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\rightarrow \hat{P}(\varphi) = \int P(\mu) \exp i \langle \mu, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

also das  $P$ -Integral der Funktion  $\mu \in \mathfrak{M} \rightarrow \exp i \langle \mu, \varphi \rangle$ , wo  $\langle \mu, \varphi \rangle$  das  $\mu$ -Integral von  $\varphi$  ist. Wir schreiben auch in Zukunft Integrale entweder mit dem Integralzeichen oder mit spitzen Klammern als Skalarprodukt und deuten manchmal die Integrationsvariable in runden Klammern an. Ist  $P$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so kann man  $P$  als die Verteilung eines zufälligen Radonmaßes auf  $\mathfrak{X}$  und  $\hat{P}$  als sein charakteristisches Funktional ansehen. Da diese Ausdrucksweise am kürzesten den wesentlichen Sachverhalt beschreibt, haben wir sie als Titel gewählt.

Die Funktion  $\hat{P}$  ist positiv definit und stetig. Umgekehrt gehört zu jeder positiv definiten Funktion  $F$  auf  $\mathfrak{L}$  mit der Eigenschaft, daß für jedes  $\varphi \in \mathfrak{L}$ ,  $\varphi \geq 0$  die Funktion  $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow F(\lambda\varphi)$  die Fouriertransformierte eines Maßes auf der positiven reellen Halbachse ist, ein positives straffes Maß  $P$  auf  $\mathfrak{M}$ , dessen Fouriertransformierte  $F$  ist [5]. Das ist das Analogon des Satzes von BOCHNER.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen Beweis für die Eindeutigkeit der Fouriertransformation zu liefern und das Analogon des Satzes von PAUL LÉVY zu beweisen. Als Anwendung dieses Satzes wird ein kurzer Konvergenzbeweis für ein

spezielles straffes Maß geführt, das in einer früheren Arbeit [4] das statistische Modell eines unendlich ausgedehnten Gases genannt wurde und das eine Art Verallgemeinerung des Poissonprozesses von der Geraden auf  $\mathcal{X}$  darstellt.

Sei  $E$  ein topologischer Raum, so bezeichnen wir mit  $\mathfrak{C}(E)$  den Banachraum der stetigen, beschränkten komplexwertigen Funktionen auf  $E$  versehen mit der Supremumsnorm. Ein straffes Maß  $P$  auf  $E$  ist ein positives, lineares Funktional auf  $\mathfrak{C}(E)$ , dessen Einschränkung auf die Einheitskugel  $\mathfrak{R}(\mathfrak{C}(E))$  stetig ist in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz über jedem Kompaktum von  $E$ . Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es also ein Kompaktum  $K \subset E$  und ein  $\delta > 0$ , so daß  $|\langle P, f \rangle| \leq \varepsilon$  ist für alle  $f \in \mathfrak{C}(E)$ ,  $\|f\| \leq 1$ ,  $|f| \leq \delta$  auf  $K$ . Die Linearität von  $P$  garantiert die gleichmäßige Stetigkeit auf  $\mathfrak{R}(\mathfrak{C}(E))$  bezüglich dieser Topologie. Eine Familie  $(P_\alpha)_{\alpha \in A}$  von straffen Maßen auf  $E$  heißt gleichstraff, wenn sie beschränkt ist und das obige  $\varepsilon$ ,  $K$ ,  $\delta$ -Kriterium gleichmäßig in  $\alpha$  erfüllt.

Sei  $F$  ein weiterer topologischer Raum und sei  $\pi: E \rightarrow F$  eine stetige Abbildung. Jedem straffen Maß  $P$  auf  $E$  wird das Bild  $\pi(P)$  zugeordnet:

$$\begin{aligned} \pi(P): \mathfrak{C}(F) &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \langle \pi(P), g \rangle = \langle P, g \circ \pi \rangle. \end{aligned}$$

Das Bild  $\pi(P)$  ist ein straffes Maß auf  $F$ .

Ist  $E$  lokal kompakt, so ist ein straffes Maß auf  $E$  nichts anderes als ein beschränktes Radonmaß. Darüber hinaus besitzen straffe Maße auf vollständig regulären Räumen alle wesentlichen Eigenschaften beschränkter Radonmaße auf lokal kompakten Räumen (vgl. z. B. [4], Kap. I). Man kann in diesem Fall die Gleichstraffheit von Maßen  $P_\alpha$  auch so formulieren, daß man sagt, die  $P_\alpha$  sind beschränkt und zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein Kompaktum  $K$  in  $E$  mit

$$P_\alpha\{E - K\} \leq \varepsilon$$

für alle  $\alpha$ .

Wir benötigen für das folgende eine Variante des Satzes von Stone-Weierstraß.

**Hilfssatz 1.** Sei  $\mathfrak{A}$  eine Algebra reellwertiger, stetiger Funktionen auf einem topologischen Raum  $E$ , die die beiden Eigenschaften besitzt

- (i)  $1 \in \mathfrak{A}$
- (ii) zu  $x, y \in E$ ,  $x \neq y$  und  $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$  existiert ein  $f \in \mathfrak{A}$  mit  $\|f\| \leq 1$ ,  $f(x) = \alpha$ ,  $f(y) = \beta$ .

Dann läßt sich jede stetige Funktion  $E \rightarrow [-1, +1]$  durch Funktionen  $f$  aus  $\mathfrak{A}$  mit  $\|f\| \leq 1$  gleichmäßig über jedem Kompaktum approximieren.

*Beweis.* Man überlegt sich zunächst das folgende: sei  $Y$  ein dichter linearer Teilraum eines normierten Raumes  $X$ , so ist  $\mathfrak{R}(Y) = \mathfrak{R}(X) \cap Y$  dicht in der Einheitskugel  $\mathfrak{R}(X)$  von  $X$ .

Sei  $\mathfrak{C}_{\mathbb{R}}(E) = \text{Re } \mathfrak{C}(E)$  und sei  $\mathfrak{B}$  der Normabschluß von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{C}_{\mathbb{R}}(E)$ . Laut NEUMARK [3] § 2.10. I ist  $\mathfrak{B}$  ein Verband. Die Einheitskugel  $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$  ist ein Teilverband von  $\mathfrak{B}$ , der  $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$  als dichte Teilmenge enthält. Man überträgt den Beweis von NEUMARK [3] § 2.10.II und sieht, daß  $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$  dicht in  $\mathfrak{R}(\mathfrak{C}_{\mathbb{R}}(E))$  bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf jedem Kompaktum ist.

Wir kehren nun zu dem in der Einleitung genannten Raum  $\mathfrak{M}$  zurück und folgern aus Hilfssatz 1:

**Hilfssatz 2.** Die Menge der trigonometrischen Polynome der Norm  $\leq 1$  ist dicht in der Einheitskugel von  $\mathfrak{C}(\mathfrak{M})$  bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf jedem Kompaktum.

*Beweis.* Die Menge der trigonometrischen Polynome, d.h. der Summen der Form  $\sum c_k \exp i \langle \mu, \varphi_k \rangle$  bildet eine komplexe Algebra, die Realteile

$$\sum a_k \cos \langle \mu, \varphi_k \rangle + \sum b_k \sin \langle \mu, \varphi_k \rangle$$

eine reelle Algebra  $\mathfrak{A}$ , die die Konstanten enthält. Sei  $\mu_1 \neq \mu_2 \in \mathfrak{M}$ ,  $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$ , so gibt es ein  $\varphi \in \mathfrak{Q}$  mit  $\langle \mu_1, \varphi \rangle \neq \langle \mu_2, \varphi \rangle$ . Wir können  $\xi$  und  $\eta$  so bestimmen, daß

$$\sin (\xi \langle \mu_1, \varphi \rangle + \eta) = \alpha$$

$$\sin (\xi \langle \mu_2, \varphi \rangle + \eta) = \beta$$

ist. Somit erfüllt  $\mathfrak{A}$  die Bedingungen von Hilfssatz 1.

Daraus folgt unmittelbar

**Satz 1.** Die Fouriertransformation ist umkehrbar eindeutig.

Sei  $P$  ein straffes Maß auf  $\mathfrak{M}$ , so bezeichnen wir mit  $P^{(\varphi)}$  das Bild von  $P$  bezüglich der Abbildung  $\mu \in \mathfrak{M} \rightarrow \langle \mu, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$ . Somit ist  $P^{(\varphi)}$  ein straffes Maß auf  $\mathbb{R}$ , das von  $\mathbb{R}_+$  getragen wird, falls  $\varphi \geq 0$  ist.

**Satz 2.** Sei  $\psi_k, k = 1, 2, \dots$  eine Folge von Funktionen aus  $\mathfrak{Q}$ ,

$$0 \leq \psi_k \leq 1; 0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \dots, \psi_k \uparrow 1 \text{ für } k \uparrow \infty.$$

Eine Familie  $(P_\alpha)_{\alpha \in A}$  straffer Maße auf  $\mathfrak{M}$  ist genau dann gleichstraff, wenn für jedes feste  $k$  die Familien  $(P_\alpha^{(\psi_k)})_{\alpha \in A}$  gleichstraff sind.

*Beweis.* Daß aus der Gleichstraffheit der  $P_\alpha$  die Gleichstraffheit der  $P_\alpha^{(\psi_k)}$  folgt, ist klar. Die Umkehrung bleibt zu beweisen. Wir wählen bei vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  zu jedem  $k$  ein  $m_k$  mit

$$P_\alpha^{(\psi_k)} \{ \xi : \xi > m_k \} = P_\alpha \{ \mu \in \mathfrak{M} : \langle \mu, \psi_k \rangle > m_k \} \leq \varepsilon 2^{-k}$$

für alle  $\alpha$ . Dann gilt für alle  $\alpha \in A$

$$P_\alpha \{ \mu \in \mathfrak{M} : \langle \mu, \psi_k \rangle > m_k \text{ für mindestens ein } k \} \leq \varepsilon$$

oder

$$P_\alpha \{ \mathfrak{M} - K \} \leq \varepsilon$$

mit

$$K = \{ \mu : \langle \mu, \psi_k \rangle \leq m_k \text{ für } k = 1, 2, \dots \}.$$

Die Menge  $K$  ist abgeschlossen und beschränkt in  $\mathfrak{M}$ . Sei nämlich  $\varphi \in \mathfrak{Q}$ , dann gibt es ein  $\psi_k$  mit  $|\varphi| \leq \lambda \psi_k$ ,  $\lambda \geq 0$  und somit ist  $|\langle \mu, \varphi \rangle| \leq \lambda m_k$  für  $\mu \in K$ . Eine abgeschlossene und beschränkte Menge in  $\mathfrak{M}$  ist aber kompakt [1]. Aus  $\langle P_\alpha^{(\psi_k)}, 1 \rangle = \langle P_\alpha, 1 \rangle$  folgt, daß die  $P_\alpha$  beschränkt sind.

**Folgerung 1** (Analogon des Satzes von PAUL LÉVY). Eine Familie  $(P_\alpha)_{\alpha \in A}$  positiver straffer Maße auf  $\mathfrak{M}$  ist genau dann gleichstraff, wenn die  $\hat{P}_\alpha(0)$  beschränkt sind und wenn für jedes feste  $\varphi \in \mathfrak{Q}$ ,  $\varphi \geq 0$  die Funktionenfamilie

$$(\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \hat{P}_\alpha(\lambda \varphi))_{\alpha \in A}$$

gleichstetig im Nullpunkt ist.

*Beweis.* Man wählt zunächst eine Folge  $\psi_1, \psi_2$ , wie in Satz 2 und verwendet dann den klassischen Satz von LÉVY: Eine Familie beschränkter Radonmaße auf der Geraden ist genau dann gleichstraff, wenn die Fouriertransformierten im Nullpunkt beschränkt und gleichstetig sind.

**Satz 3.** Sei  $P_1, P_2, \dots$  eine Folge positiver, straffer Maße auf  $\mathfrak{M}$  und konvergiere  $P_1, P_2, \dots$  punktweise gegen eine Funktion  $F: \mathfrak{L} \rightarrow \mathbb{C}$  mit der Eigenschaft:  $F(\lambda\varphi) \rightarrow F(0)$  für festes  $\varphi \in \mathfrak{L}$ ,  $\varphi \geq 0$  und  $\lambda \downarrow 0$ . Dann ist  $F$  die Fouriertransformierte eines positiven straffen Maßes  $P$  auf  $\mathfrak{M}$ . Die Maße  $P, P_1, P_2, \dots$  sind gleichstraff und  $\langle P_k, f \rangle \rightarrow \langle P, f \rangle$  für  $k \rightarrow \infty$  und  $f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{M})$ .

*Beweis.* Die Maße  $P_1, P_2, \dots$  sind nach [2] § 13 und Satz 2 gleichstraff, ihre Einschränkungen auf die Einheitskugel  $\mathfrak{R}(\mathfrak{C}(\mathfrak{M}))$  sind also gleichstetig gegenüber der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen und konvergieren auf einer nach Hilfssatz 2 dichten Teilmenge. Also konvergieren sie für alle  $f \in \mathfrak{R}(\mathfrak{C}(\mathfrak{M}))$  und damit für alle  $f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{M})$  gegen ein lineares Funktional  $P$  auf  $\mathfrak{C}(\mathfrak{M})$ , das im Abschluß der Menge  $\{P_1, P_2, \dots\}$  im Dualraum von  $\mathfrak{C}(\mathfrak{M})$  versehen mit der schwachen Topologie über  $\mathfrak{C}(\mathfrak{M})$  ist. Da der Abschluß einer gleichstraffen Menge straffer Maße wieder eine solche Menge ist, ist  $P$  ein straffes Maß und mit  $P_1, P_2, \dots$  gleichstraff.

Wir wenden jetzt Satz 3 auf die folgende, bereits in [4] betrachtete Situation an.  $\mathfrak{X}$  sei nicht kompakt und  $\lambda$  sei ein nicht beschränktes Radonmaß auf  $\mathfrak{X}$ . In  $\mathfrak{X}$  sei eine aufsteigende Folge kompakter Teilmengen  $\mathfrak{X}_k$  gegeben

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 \subset \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_2 \subset \mathfrak{X}_2 \subset \dots \\ \cup \mathfrak{X}_k = \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

Ferner gebe es eine Folge  $N_k$  natürlicher Zahlen mit

$$\frac{N_k}{\lambda(\mathfrak{X}_k)} \rightarrow n \quad (k \rightarrow \infty).$$

Wir definieren für jedes  $k$  ein straffes Maß  $P_k$  auf  $\mathfrak{M}$  durch

$$\langle P_k, f \rangle = \lambda(\mathfrak{X}_k)^{-N_k} \int_{\mathfrak{X}_k} \dots \int_{\mathfrak{X}_k} \lambda(x_1) \dots \lambda(x_{N_k}) f\left(\sum_{l=1}^{N_k} \delta_{x_l}\right)$$

für  $f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{M})$ . Dabei bedeutet  $\delta_x$  das Diracmaß an der Stelle  $x$ :

$$\delta_x: \varphi \in \mathfrak{L} \rightarrow \varphi(x).$$

**Satz 4.** Die  $P_k$  sind gleichstraff und konvergieren schwach auf  $\mathfrak{C}(\mathfrak{M})$  gegen ein straffes Wahrscheinlichkeitsmaß  $P(n\lambda)$  auf  $\mathfrak{M}$  mit der Fouriertransformierten

$$P(n\lambda) \hat{=} (\varphi) = \exp n \langle \lambda, e^{i\varphi} - 1 \rangle.$$

*Beweis.* Die Fouriertransformierten der  $P_k$  sind

$$\begin{aligned} P_k \hat{=} (\varphi) &= \lambda(\mathfrak{X}_k)^{-N_k} \int_{\mathfrak{X}_k} \dots \int_{\mathfrak{X}_k} \lambda(x_1) \dots \lambda(x_{N_k}) \exp i \sum_{l=1}^{N_k} \varphi(x_l) \\ &= [\lambda(\mathfrak{X}_k)^{-1} \int_{\mathfrak{X}_k} \lambda e^{i\varphi}]^{N_k} \\ &= [1 + \lambda(\mathfrak{X}_k)^{-1} \int_{\mathfrak{X}_k} \lambda(e^{i\varphi} - 1)]^{N_k}. \end{aligned}$$

Für genügend großes  $k$  enthält  $\mathfrak{X}_k$  den Träger von  $\varphi$ . Dann ändert sich das Integral  $\int_{\mathfrak{X}_k} \lambda(e^{i\varphi} - 1)$  bei der Vergrößerung von  $k$  nicht mehr. Der ganze Ausdruck konvergiert gegen

$$\exp n \int \lambda(e^{i\varphi} - 1) = F(\varphi).$$

Da  $F$  die in Satz 3 geforderte Stetigkeitseigenschaft besitzt, folgt die Behauptung des Satzes.

Ist  $\mathfrak{X}$  die Gerade und  $\lambda$  das Lebesguemaß, so entspricht dem Maß  $P(n \lambda)$  ein Poissonprozeß der Sprunghöhe 1 und der mittleren Sprungdichte  $n$ . Ist  $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^3$  und  $\lambda$  das Lebesguemaß, so charakterisiert  $P(n \lambda)$  ein Gas unabhängiger, gleichartiger Teilchen der mittleren Dichte  $n$ . Der Gaszustand, in dem das  $i$ -te Teilchen am Ort  $x_i$  sitzt, ist gegeben durch das Maß  $\mu = \sum \delta_{x_i}$  (vgl. [4]). Diese Darstellung eines unendlich ausgedehnten Gases hat die schöne Eigenschaft, invariant gegenüber räumlichen Bewegungen zu sein. Wir wollen dies näher ausführen.

Sei  $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  eine topologische Abbildung. Dann ist  $\varphi \circ T \in \mathfrak{Q}$  für  $\varphi \in \mathfrak{Q}$ ,

$$T: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$$

$$\mu \rightarrow \langle T(\mu), \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \circ T \rangle$$

ist stetig und linear. Sei  $P$  ein straffes Maß auf  $\mathfrak{M}$ , so ist  $T(P)$  das Bild von  $P$  bezüglich  $T: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ .

**Satz 5.**  $T(P(n \lambda)) = P(n T(\lambda))$ , insbesondere ist  $P(n \lambda)$  bezüglich  $T$  invariant, falls  $\lambda$  es ist.

*Beweis.* Wir vergleichen die Fouriertransformationen:

$$\begin{aligned} [T(P(n \lambda))]^\wedge(\varphi) &= \langle T(P(n \lambda)), \exp i \langle \mu, \varphi \rangle \rangle \\ &= \langle P(n \lambda), \exp i \langle T(\mu), \varphi \rangle \rangle \\ &= \langle P(n \lambda), \exp i \langle \mu, \varphi \circ T \rangle \rangle \\ &= \exp n \langle \lambda, \exp i(\varphi \circ T) - 1 \rangle \\ &= \exp n \langle T(\lambda), \exp i \varphi - 1 \rangle \\ &= P(n T(\lambda))^\wedge(\varphi). \end{aligned}$$

### Literatur

1. BOURBAKI, N.: *Intégration*, chap. 1–4. Paris: Hermann 1965.
2. GNEDENKO, B. W., u. A. N. KOLMOGOROV: *Grenzverteilungen von Summen und unabhängiger Zufallsgrößen*. Berlin: Akademie-Verlag 1960.
3. NEUMARK, M. A.: *Normierte Algebren*. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959.
4. WALDENFELS, W. v.: Zur mathematischen Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **6**, 65–112 (1966).
5. — Positiv definite Funktionen auf einem unendlich dimensionalen Vektorraum. *Studia math.* **30**, 153–162 (1968).

Prof. Dr. WILHELM VON WALDENFELS  
Mathematisches Institut der Universität  
66 Saarbrücken