Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 11, 139—141 (1969)

Ein zentraler Grenzwertsatz für Verzweigungsprozesse *

Wolfgang J. Bühler

Eingegangen am 5. Dezember 1967

Summary. Let Z_t be a (one-type) Markov branching process in discrete or continuous time and with $Z_0 = 1$. Assume $EZ_1 = m \geqq 1$ and $\operatorname{Var} Z_1 = \sigma^2 < \infty$. It is then shown that the finite dimensional distributions of the processes

$$Y_s(t) = (Z_{t+s} - m^s Z_t)/(m^{s-1} \sigma \sqrt{Z_t})$$

conditional on $Z_t \neq 0$, converge, as $t \to \infty$, to those of a process Y_s with $Y_0 = 0$ and with independent normally distributed increments.

Z_t sei ein superkritischer Verzweigungsprozeß, entweder in diskreter Zeit ($t = 0, 1, 2, \ldots$) oder in kontinuierlicher Zeit ($t \geqq 0$) und mit $Z_0 = 1$. Wir betrachten die Prozesse

$$Y_s(t) = \frac{Z_{t+s} - m^s Z_t}{m^s (\sigma/m) \sqrt{Z_t}}. \tag{1}$$

Hierbei durchläuft s dieselbe Indexmenge wie t, m und σ^2 sind Erwartungswert und Varianz von Z_1; falls $Z_t = 0$ setzen wir $Y_s(t) = 0$. Hu [1] hat für den Fall diskreter Zeit gezeigt, daß für $t \to \infty$ der nicht ausgeartete Teil von $Y_1(t)$ asymptotisch normverteilt ist. In dieser Arbeit geben wir einen einfachen Beweis dieses Resultats und zeigen darüber hinaus, daß die gemeinsamen Verteilungen des Prozesses $Y_s(t)$ für $t \to \infty$ gegen die eines Prozesses Y_s konvergieren, dessen Variablen mit Wahrscheinlichkeit q alle gleich Null sind. Mit der verbleibenden Wahrscheinlichkeit $1 - q$ ist Y_s ein Prozeß mit unabhängigen normalverteilten Zuwächsen. Hier ist $q = \lim_{t \to \infty} P(Z_t = 0)$ die Wahrscheinlichkeit für das Aussterben des Prozesses.

Als ersten Schritt beweisen wir eine allgemeinere Form des erwähnten Satzes von Hu.

Satz 1. *Z_t sei ein Verzweigungsprozeß mit $Z_0 = 1$, $m = EZ_1 > 1$ und $0 < \sigma^2 = \operatorname{Var} Z_1 < \infty$. Es sei*

$$X_s(t) = \frac{Z_{t+s} - m^s Z_t}{\sigma_s \sqrt{Z_t}}, \tag{2}$$

wobei

$$\sigma_s^2 = \operatorname{Var} Z_s = \sigma^2 m^s (m^s - 1)/m(m-1).$$

Dann gilt

(a) $\lim_{t \to \infty} P(X_s(t) = 0) = \lim_{t \to \infty} P(Z_t = 0) = q$ *für alle* $s \neq 0$.

(b) *Die bedingte Verteilung von $X_s(t)$ gegeben $Z_t \neq 0$ ist asymptotisch $N(0, 1)$.*

---

* Nach Fertigstellung dieser Arbeit erhielt ich Kenntnis von unveröffentlichten Resultaten von Prof. S. Karlin und Dr. K. Athreya, die das vorliegende Ergebnis im superkritischen Fall sogar für Prozesse mit mehreren Typen enthalten.

Beweis. $f_{s,t}$ sei die charakteristische Funktion von $X_s(t)$. Gegeben $Z_t = k$ hat $(Z_{t+s} - m^s Z_t)/\sigma_s$ die Verteilung einer Summe von k unabhängigen gleichverteilten Variablen mit Erwartung 0 und Varianz 1. Bezeichnen wir die charakteristische Funktion dieser Variablen mit g, so gilt

$$f_{s,t}(u) = E\{\exp(i\,u\,X_s(t))\} = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_t = k)\,\{g(u/\sqrt{k})\}^k. \tag{3}$$

Für $k \to \infty$ konvergiert $\{g(u/\sqrt{k})\}^k$ nach dem zentralen Grenzwertsatz gegen $\exp(-u^2/2)$; andererseits konvergiert $P(Z_t = k)$ gegen Null für alle $k > 0$. Daraus folgt die Behauptung

$$\lim_{t\to\infty} f_{s,t}(u) = q + (1-q)\exp(-u^2/2). \tag{4}$$

Bemerkung 1. Auch im Falle $m = 1$ konvergiert die bedingte Verteilung von $X_s(t)$ gegeben $Z_s \neq 0$ gegen $N(0, 1)$. Dies sieht man, indem man $P(Z_t = k)$ in (3) durch $P(Z_t = k \mid Z_t \neq 0)$ ersetzt.

Aus Satz 1 folgt schon, daß die Zufallsgrößen $Y_s(t)$ für $t \to \infty$ asymptotisch normalverteilt sind. Um die behauptete asymptotische Unabhängigkeit der Zuwächse zu zeigen, benötigen wir zunächst Aussagen über das Grenzverhalten der gemeinsamen Verteilungen mehrerer $X_s(t)$. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir im folgenden an $P(Z_t = 0) = 0$.

Lemma 1. *Für $t \to \infty$ strebt die gemeinsame Verteilung der Variablen $X_{s_1}(t)$, $X_{s_2}(t), \ldots, X_{s_n}(t)$ gegen eine n-dimensionale Normalverteilung mit Erwartungen* 0, *Varianzen* 1 *und Kovarianzen*

$$\operatorname{Cov}(X_s(t), X_r(t)) = \operatorname{Cov}(Z_s, Z_r)/\sigma_s\,\sigma_r = m^r\,\sigma_s/m^s\,\sigma_r \qquad s \leqq r. \tag{5}$$

Beweis. Lemma 1 ist eine mehrdimensionale Version von Satz 1, der Beweis von Satz 1 läßt sich unmittelbar übertragen.

Lemma 2. *Für $t \to \infty$ und $s < s + u \leqq \tau < \tau + v$ konvergiert die gemeinsame Verteilung der Variablen $X_u(t+s)$ und $X_v(t+\tau)$ gegen eine zweidimensionale Normalverteilung mit Erwartungen* 0, *Varianzen* 1 *und Kovarianzen* 0.

Beweis. Ein ähnliches Argument wie im Beweis von Satz 1 zeigt zunächst, daß $Z_{t+\tau}/Z_t$ stochastisch gegen m^τ konvergiert. Die Beziehung

$$X_u(t+s) = \sqrt{\frac{Z_t}{Z_{t+s}}}\left(\frac{\sigma_{u+s}}{\sigma_u} X_{s+u}(t) - m^u \frac{\sigma_s}{\sigma_u} X_s(t)\right) \tag{6}$$

und die entsprechende Beziehung für $X_v(t+\tau)$ ergeben dann wegen Lemma 1, daß $X_u(t+s)$ und $X_v(t+\tau)$ asymptotisch gemeinsam normalverteilt sind. Die Kovarianz der Grenzverteilung läßt sich dann aus (6) mit Hilfe von (5) berechnen und ist gleich Null.

Satz 2. *Für $t \to \infty$ konvergieren die gemeinsamen Verteilungen der durch* (1) *bestimmten Prozesse $Y_s(t)$ gegen die eines Prozesses Y_s mit unabhängigen normalverteilten Zuwächsen und mit*

$$\operatorname{Var} Y_s = \frac{m^s - 1}{m^s} \Big/ \frac{m-1}{m}. \tag{7}$$

Bemerkung 2. Im Fall diskreter Zeit heißt dies, daß Y_s eine Summe unabhängiger normalverteilter Variabler X_k, $k = 1, 2 \ldots s$ ist mit $\operatorname{Var} X_k = m^{1-k}$. Im Fall kontinuierlicher Zeit ist die Varianz des Zuwachses $Y_s - Y_u$ gleich

$$m/(m-1)((m^s - 1)/m^s - (m^u - 1)/m^u) \quad \text{bzw.} \quad \int_s^u m^{-x}\,dx \bigg/ \int_0^1 m^{-x}\,dx .$$

Beweis. Eine einfache Rechnung ergibt für die Zuwächse

$$Y_{s+u}(t) - Y_s(t) = \sqrt{\frac{Z_{t+s}}{Z_t}}\, m^{-(s+u-1)} \frac{\sigma_u}{\sigma} X_u(t+s) .$$

Die asymptotische Unabhängigkeit der Zuwächse folgt somit aus Lemma 2. Die Aussage über die Varianzen folgt unmittelbar durch Vergleich von (1) und (2).

Bemerkung 3. Satz 1 und Satz 2 bleiben richtig für Verzweigungsprozesse mit kontinuierlichem Zustandsraum (Jiřina [2]); die Beweise müssen nur geringfügig modifiziert werden.

Literatur

1. Hu, Ti-ho: The invariance principle and its application to branching processes. Acta Sci. nat. Univ. Pekinensis **10**, 1—27 (1964) (Chinesisch, Englische Zusammenfassung).
2. Jiřina, M.: Stochastic branching processes with continuous state space. Czechosl. math. J. 8, 292—313 (1958).

Dr. W. Bühler
Inst. für Dokumentation
Information und Statistik
Deutsches Krebsforschungszentrum
69 Heidelberg, Berliner Straße

z. Zt.
Department of Statistics
Statistical Laboratory
University of California
Berkeley, Calif. 94720
USA