Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 1, 47—69 (1962)

Subjektivtrennscharfe Konfidenzbereiche *

Von

RUDOLF BORGES

Einleitung

J. NEYMAN hat auf Grund rein wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen den Begriff des trennscharfen (shortest, most selective, most accurate) Konfidenzbereiches eingeführt und ihre Existenz in [*6*, *7*] gezeigt (siehe z. B. L. SCHMETTERER [*10*]). Es existiert aber nicht in allen Fällen ein trennscharfer Konfidenzbereich, z. B. bezüglich der Gesamtheit $\mathfrak{V}_\beta$ aller Konfidenzbereiche mit einem Konfidenzkoeffizienten größer oder gleich β.

Oft besitzt der Experimentator eine Vorbewertung oder einen Glaubwürdigkeitsgrad [*9*] für die Lage des unbekannten Wahrscheinlichkeitsfeldes im Raum der zulässigen Wahrscheinlichkeitsfelder $(M, \mathfrak{K}, p_\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$. Mit Hilfe des Begriffes der Vorbewertung, die als ein Maß φ in der Indexmenge Θ eingeführt wird, werden wir in § 1 den Begriff des subjektivtrennscharfen Konfidenzbereiches als eine Abschwächung des üblichen Trennschärfebegriffes einführen. Wir nennen einen Konfidenzbereich U_x, $x \in M$, subjektivtrennscharf bei der Vorbewertung φ bzgl. der Gesamtheit $\mathfrak{V}$ von Konfidenzbereichen V_x, wenn für alle $\vartheta \in \Theta$ gilt:

$$\int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(\vartheta \in U_x)\, \varphi(d\sigma) = \min_{V_x \in \mathfrak{V}} \int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(\vartheta \in V_x)\, \varphi(d\sigma)\,,$$

d. h. wenn eine Art unter der Bedingung $\sigma \neq \vartheta$ gebildetes φ-Mittel der Wahrscheinlichkeit, eine Aussage „$\vartheta \in V_x$“ zu machen, minimal ist.

Wir geben in § 2 unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen die Gestalt der bzgl. $\mathfrak{V}_\beta$ subjektivtrennscharfen Konfidenzbereiche an und zeigen anschließend ihre Existenz.

In § 3 nehmen wir zusätzlich an, daß die Indexmenge Θ eine Transformationsgruppe der Ergebnismenge M ist. Für semiinvariante Vorbewertungen lassen sich dann die Voraussetzungen vereinfachen und die fastinvarianten subjektivtrennscharfen Konfidenzbereiche bis auf eine Konstante explizit angeben.

In § 4 behandeln wir drei Beispiele invarianter subjektivtrennscharfer Konfidenzbereiche.

Bezeichnungen. Der Doppelpunkt in $a := b$ bedeutet, daß a als b definiert ist. Wenn wir den Definitionsbereich D einer Funktion f hervorheben wollen, schreiben wir $f \mid D$. Im übrigen verwenden wir weitgehend die Symbolik von H. RICHTER [*8*]: O bezeichnet die leere Menge, $\bar{B}$ das Komplement von B, $\Sigma^{\boldsymbol{\cdot}}\, B_n$ die Vereinigung und $\Pi^{\boldsymbol{\cdot}}\, B_n$ den Durchschnitt der Mengen B_n. Ist V eine Teilmenge des kartesischen Produkts (M, Θ) der Mengen M und Θ, so ist $V_\vartheta := \{x : (x, \vartheta) \in V\}$ die Schnittmenge von V an der Stelle $\vartheta \in \Theta$. Entsprechend bezeichnet V_x die Schnitt-

---

* angenommen als Dissertation der Universität München.

menge von V an der Stelle $x \in M$. R^n sei der n-dimensionale euklidische Zahlenraum. R_+ bezeichnet die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen mit der euklidischen Metrik.

§ 1. Definition subjektivtrennscharfer Konfidenzverfahren

Das wahre Wahrscheinlichkeitsfeld eines gegebenen Experimentes sei ein Element der Familie $(M, \mathfrak{K}, p_\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, von Wahrscheinlichkeitsfeldern. Der Index ϑ_0 der wahren Wahrscheinlichkeit p_{ϑ_0} sei aber unbekannt. Deshalb soll jedem Ergebnis $x \in M$ ein Konfidenzbereich $V_x \subset \Theta$ zugeordnet werden, um nach dem Eintreten von $\hat{x}$ die Behauptung „$\vartheta_0 \in V_{\hat{x}}$" aufzustellen.

Die Familie aller V_x, $x \in M$, läßt sich am übersichtlichsten behandeln, wenn man V_x als die Schnittmenge eines $V \subset (M, \Theta)$ an der Stelle x auffaßt — wie wir bereits in der Schreibweise vorweggenommen haben — d. h. wenn

$$V_x = \{\vartheta : (x, \vartheta) \in V\}$$

ist. Dann ist nämlich die Schnittmenge V_ϑ der Akzeptierungsbereich der Behauptung „$\vartheta \in V_x$", d. h.

$$V_\vartheta = \{x : \vartheta \in V_x\}. \tag{1.1}$$

Dementsprechend definieren wir:

Definition (1.2): *Ist* a) $V \subset (M, \Theta)$,

b) $V_\vartheta \in \mathfrak{K}$ *für alle* $\vartheta \in \Theta$,

c) *und gibt es zu V ein $N \in \mathfrak{K}$ mit $\{x : V_x = 0\} \subset N$ und $p_\vartheta(N) = 0$ für alle $\vartheta \in \Theta$, so nennen wir V ein Konfidenzverfahren. Bei Realisation von x heißt seine Schnittmenge V_x Konfidenzbereich für ϑ_0, und V_ϑ heißt Akzeptierungsbereich zu $\vartheta \in \Theta$.*

Die Bedingung b) stellt wegen (1.1) sicher, daß die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Behauptung „$\vartheta \in V_x$" existiert. Bedingung c) garantiert, daß die immer falsche Behauptung „$\vartheta \in 0$" nicht mit positiver Wahrscheinlichkeit aufgestellt werden kann. Die Bedingung c) wird oft bei der Definition des Konfidenzverfahrens (z. B. D. L. WALLACE [*11*]) oder Familien von Konfidenzbereichen (z. B. E. L. LEHMANN [*4*]) nicht gefordert. Auf die Zweckmäßigkeit der Bedingung weist jedoch LEHMANN in Beispiel 7 auf S. 81—82 hin.

Definition (1.3): *Die Zahl*

$$\beta(V) := \inf_{\vartheta \in \Theta} p_\vartheta(V_\vartheta)$$

heißt der Konfidenzkoeffizient des Konfidenzverfahrens V. Wir nennen den Konfidenzkoeffizient exakt, wenn für alle $\vartheta \in \Theta$ gilt:

$$\beta(V) = p_\vartheta(V_\vartheta).$$

Zum Vergleich von Konfidenzverfahren hat J. NEYMAN [*6, 7*] den Begriff des trennscharfen (shortest, most selective, most accurate) Konfidenzverfahrens eingeführt:

Definition (1.4): *Es sei $\mathfrak{V}$ eine Gesamtheit von Konfidenzverfahren. Dann heißt $U \in \mathfrak{V}$ trennscharf bzgl. $\mathfrak{V}$, wenn für alle $\vartheta, \tau \in \Theta$ mit $\vartheta \neq \tau$ gilt:*

$$p_\vartheta(U_\tau) = \min_{V \in \mathfrak{V}} p_\vartheta(V_\tau).$$

Für ein bezüglich $\mathfrak{B}$ trennscharfes Konfidenzverfahren U wird also nach (1.1) bei beliebigem ϑ_0 und $\tau \neq \vartheta_0$ der falsche Index τ durch U_x mit nicht größerer Wahrscheinlichkeit überdeckt als bei jedem anderen $V \in \mathfrak{B}$.

Da für die Existenz von trennscharfen Konfidenzbereichen starke Forderungen an die Eigenschaften der Familie $(M, \mathfrak{K}, p_\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, zu stellen sind, wollen wir durch eine Abschwächung der Definition (1.4) einen neuen Typ von Konfidenzverfahren mit Hilfe einer Vorbewertung φ in Θ auszeichnen. Dazu benötigen wir Voraussetzungen über Θ und φ.

Voraussetzung AI. Die Indexmenge Θ der Wahrscheinlichkeitsfelder $(M, \mathfrak{K}, p_\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, ist ein topologischer Raum, in dem $p_\sigma(K)$ bei festem $K \in \mathfrak{K}$ eine stetige Funktion in $\sigma \in \Theta$ ist. Weiterhin ist $p_\vartheta|\mathfrak{K} \neq p_\tau|\mathfrak{K}$ für $\vartheta \neq \tau$.

Der zweite Teil der Voraussetzung AI ist lediglich eine Vereinbarung, die eine doppelte Benennung derselben Wahrscheinlichkeiten ausschließt. Der erste Teil der Voraussetzung AI ist in dem sehr häufigen Fall erfüllt, daß der Indexraum Θ eine Teilmenge des m-dimensionalen euklidischen Zahlenraumes R^m ist und die Wahrscheinlichkeiten p_σ durch Wahrscheinlichkeitsdichten $f(x, \sigma)$ in $x \in R^n$ gegeben sind, die fast überall in $\sigma \in \Theta$ stetig sind. Darüber hinaus kann man durch Einführung von Topologien in Θ erreichen, daß Voraussetzung AI erfüllt ist. Hier ist einerseits die *starke Topologie* zu nennen, d. h. Θ ist ein metrischer Raum mit der Metrik

(1.5) $$|\vartheta, \tau| := \sup_{K \in \mathfrak{K}} |p_\vartheta(K) - p_\tau(K)|,$$

Andererseits ist die *schwache Topologie* anzuführen, d. h. eine Basis des Systems der offenen Mengen ist die Gesamtheit aller Mengen

(1.6) $$\{\sigma : |p_\sigma(K_i) - p_\tau(K_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}$$

mit $K_i \in \mathfrak{K}$, $\tau \in \Theta$, $\varepsilon > 0$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$. Der Zusammenhang zwischen den drei angeführten Topologien ist folgender (siehe z. B. LEHMANN [*4*] S. 352): Wenn $p_\sigma(K)$ stetig bezüglich einer der vorangehenden Topologien ist, so ist $p_\sigma(K)$ auch bezüglich den nachfolgenden stetig.

Mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir den kleinsten σ-Körper, der alle offenen Mengen des Indexraumes Θ enthält. $\mathfrak{B}$ ist also das System der Borelschen Mengen von Θ. Wegen Teil 2 von Voraussetzung AI sind alle einpunktigen Mengen abgeschlossen und deshalb $\{\sigma : \sigma \neq \vartheta\} \in \mathfrak{B}$.

Voraussetzung AII. Eine Vorbewertung φ ist ein nicht verschwindendes, nicht ausgeartetes Borelsches Maß $\varphi|\mathfrak{B}$, d. h. es gibt zu jedem $A \in \mathfrak{B}$ mit $\varphi(A) = +\infty$ ein $B \subset A$ mit $0 < \varphi(B) < +\infty$ und es ist $\varphi(C) < +\infty$ für alle kompakten Mengen C des Indexraumes.

Wir machen keine Annahme darüber, ob $\varphi|\mathfrak{B}$ endlich ist oder nicht. Eine Vorbewertung drückt die Erfahrung des Experimentators auf Grund von früheren Experimenten ähnlicher Art und von theoretischen Überlegungen über die Lage von ϑ_0 in Θ aus.

Da $p_\sigma(K)$ nicht negativ und nach Voraussetzung AI stetig in $\sigma \in \Theta$ ist und weiter $\{\sigma : \sigma \neq \vartheta\} \in \mathfrak{B}$ gilt, existiert $\int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(K)\, \varphi(d\sigma)$ für alle $K \in \mathfrak{K}$, wenn wir $+\infty$ als Integralwert zulassen. Ist die Vorbewertung $\varphi|\mathfrak{B}$ endlich, so ist das angegebene Integral proportional dem Mittelwert der Wahrscheinlichkeit von K bezüglich der

Vorbewertung $\varphi|\mathfrak{V}$ unter der Bedingung $\sigma \neq \vartheta$ und damit bis auf einen Faktor gleich der bedingten subjektiven Chance für K im Sinne der indirekten Wahrscheinlichkeitstheorie RICHTERs [9]. Dementsprechend ziehen wir als Experimentator das Konfidenzverfahren $U \in \mathfrak{V}$ einem anderen $V \in \mathfrak{V}$ vor, wenn

$$\int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(U_\vartheta)\, \varphi(d\sigma) \leqq \int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(V_\vartheta)\, \varphi(d\sigma)$$

ist. Es wird dann nämlich unter der Voraussetzung $\vartheta \neq \vartheta_0$ der falsche Index ϑ mit nicht größerer Chance von U_x als von V_x überdeckt. Da diese Eigenschaft das subjektive Analogon zur Trennschärfe ist, führt dies zu der folgenden Definition, wobei wieder nicht endliche Vorbewertungen zugelassen werden:

Definition (1.7): *Es seien die Voraussetzungen AI—II erfüllt und $\mathfrak{V}$ sei eine Gesamtheit von Konfidenzverfahren. Dann nennen wir ein Konfidenzverfahren $U \in \mathfrak{V}$ subjektivtrennscharf bei der Vorbewertung $\varphi|\mathfrak{V}$ bezüglich $\mathfrak{V}$ (im folgenden kurz φ-trennscharf genannt), wenn für jedes $\vartheta \in \Theta$ gilt:*

$$\int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(U_\vartheta)\, \varphi(d\sigma) = \min_{V \in \mathfrak{V}} \int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(V_\vartheta)\, \varphi(d\sigma)\,.$$

Da diese Definition für jeden Akzeptierungsbereich U_ϑ, $\vartheta \in \Theta$, nur eine Bedingung aufstellt, können wir die Existenz φ-trennscharfer Konfidenzverfahren unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen beweisen. Da wir die Voraussetzungen AI—II in die Definition von φ-trennscharf eingeschlossen haben, setzen wir die Voraussetzungen AI—II von nun an stillschweigend voraus.

Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen φ-trennscharf und trennscharf:

Satz (1.8): *Φ sei eine Menge von Vorbewertungen $\varphi|\mathfrak{V}$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jeder nicht leeren offenen Menge B des Indexraumes Θ gibt es ein $\varphi \in \Phi$ mit $0 < \varphi(B) < +\infty$ und $\varphi(\bar{B}) = 0$.*

Dann ist das Konfidenzverfahren U dann und nur dann trennscharf bezüglich $\mathfrak{V}$, wenn U φ-trennscharf bezüglich $\mathfrak{V}$ für jedes $\varphi \in \Phi$ ist.

Beweis: 1. Nur dann: Es sei U trennscharf bezüglich $\mathfrak{V}$, also nach Definition (1.4) $p_\vartheta(U_\tau) \leqq p_\vartheta(V_\tau)$ für alle $V \in \mathfrak{V}$ und $\vartheta, \tau \in \Theta$ mit $\vartheta \neq \tau$. Durch Integration über $\Theta - \{\tau\}$ folgt für jedes $\varphi \in \Phi$ die φ-Trennschärfe von U.

2. Dann: Es sei U nicht trennscharf, so daß es nach (1.4) ein τ_0, ϑ_0 mit $\tau_0 \neq \vartheta_0$ und ein $V \in \mathfrak{V}$ mit $p_{\vartheta_0}(U_{\tau_0}) > p_{\vartheta_0}(V_{\tau_0})$ gibt. Da nach Voraussetzung AI $p_\sigma(K)$ bei festem $K \in \mathfrak{K}$ stetig in $\sigma \in \Theta$ ist, ist die Menge

$$B := \{\sigma : p_\sigma(U_{\tau_0}) > p_\sigma(V_{\tau_0}) \ \&\ \sigma \neq \tau_0\}$$

offen und nicht leer. Da nach Voraussetzung ein $\varphi \in \Phi$ mit $0 < \varphi(B) < +\infty$ und $\varphi(\bar{B}) = 0$ existiert, folgt

$$\int_{\sigma \neq \tau_0} p_\sigma(U_{\tau_0})\, \varphi(d\sigma) > \int_{\sigma \neq \tau_0} p_\sigma(V_{\tau_0})\, \varphi(d\sigma)\,,$$

so daß U bezüglich $\mathfrak{V}$ nicht φ-trennscharf ist, w.z.b.w.

Satz (1.8) besagt also, wie zu erwarten war, daß die φ-Trennschärfe eines Konfidenzverfahrens eine wesentlich schwächere Eigenschaft als die Trennschärfe ist. Tatsächlich existieren oft φ-trennscharfe Konfidenzverfahren, wenn kein trennscharfes Verfahren existiert. Zum Beweise dafür werden wir in unseren Beispielen des § 4 den folgenden Satz benutzen:

Satz (1.9): 1. *Es existiere ein bezüglich $\mathfrak{V}$ trennscharfes Konfidenzverfahren W.*

2. *Für $\varphi|\mathfrak{V}$ gelte $\varphi(B) > 0$ für alle offenen $B \neq 0$ und* $\inf\limits_{V\in\mathfrak{V}} \int\limits_{\sigma\neq\tau} p_\sigma(V_\tau)\,\varphi(d\sigma) < +\infty$ *für alle $\tau \in \Theta$.*

Dann ist ein Konfidenzverfahren U dann und nur dann trennscharf bezüglich $\mathfrak{V}$, wenn U φ-trennscharf bezüglich $\mathfrak{V}$ ist.

Beweis: Da die Notwendigkeit der Bedingung bereits in Satz (1.8) gezeigt wurde, sei nun ein φ-trennscharfes $U \in \mathfrak{V}$ gegeben, also ist nach Definition (1.7) für alle $\tau \in \Theta$

$$(+) \qquad \int\limits_{\sigma\neq\tau} p_\sigma(U_\tau)\,\varphi(d\sigma) = \min_{V\in\mathfrak{V}} \int\limits_{\sigma\neq\tau} p_\sigma(V_\tau)\,\varphi(d\sigma).$$

Aus Voraussetzung 1. folgt $W \in \mathfrak{V}$ und für alle $\sigma, \tau \in \Theta$ mit $\sigma \neq \tau$

$$(++) \qquad p_\sigma(W_\tau) = \min_{V\in\mathfrak{V}} p_\sigma(V_\tau).$$

Integration über $\Theta - \{\tau\}$ bezüglich $\varphi|\mathfrak{V}$ ergibt wegen (+) und $U, W \in \mathfrak{V}$

$$\int\limits_{\sigma\neq\tau} p_\sigma(U_\tau)\,\varphi(d\sigma) = \int\limits_{\sigma\neq\tau} \min_{V\in\mathfrak{V}} p_\sigma(V_\tau)\,\varphi(d\sigma)$$

für alle $\tau \in \Theta$. Da die Integranden nach Voraussetzung AI und wegen (++) stetig sind, folgt aus Voraussetzung 2. die Gleichheit der Integranden, also ist auch U trennscharf bezüglich $\mathfrak{V}$, w. z. b. w.

Nach Satz (1.9) ist unter ziemlich schwachen Voraussetzungen über die Vorbewertung $\varphi|\mathfrak{V}$ die Gesamtheit aller bezüglich $\mathfrak{V}$ φ-trennscharfen Konfidenzverfahren mit der Gesamtheit aller trennscharfen identisch, falls überhaupt ein trennscharfes Verfahren existiert. Man kann also Satz (1.9) zur Konstruktion trennscharfer Konfidenzverfahren oder zum Beweise ihrer Nichtexistenz benutzen: Man konstruiere für eine Vorbewertung φ, die Voraussetzung 2. erfüllt, ein φ-trennscharfes $U \in \mathfrak{V}$. Dann beweise man die Trennschärfe von U oder gebe eine zweite Vorbewertung ψ an, so daß U nicht ψ-trennscharf ist.

§ 2. Existenz und Gestalt subjektivtrennscharfer Konfidenzverfahren

Es sei $\mathfrak{V}_\beta$ die Gesamtheit aller Konfidenzverfahren mit einem Konfidenzkoeffizienten $\beta(V) \geqq \beta$. Wir geben ziemlich allgemeine Voraussetzungen an, die die vollständige Beschreibung aller bezüglich $\mathfrak{V}_\beta$ subjektivtrennscharfen Konfidenzverfahren ermöglichen und damit zugleich den Beweis ihrer Existenz liefern.

Die Beschreibung der Gestalt φ-trennscharfer Konfidenzverfahren beruht darauf, daß $\int\limits_{\sigma\neq\vartheta} p_\sigma(K)\,\varphi(d\sigma)$ ein Maß auf $\mathfrak{K}$ ist. Bei den Beweisen verwenden wir dieselben Hilfsmittel wie in der Testtheorie, nämlich das Lemma von Neyman-Pearson in geringfügiger Verallgemeinerung und einen Hilfssatz, der die Existenz der in dem Lemma benötigten Konstanten sicherstellt. Gewisse Komplikationen werden allerdings durch die Zulassung diskreter Vorbewertungen entstehen.

Wir zeigen zunächst die folgende leichte Verallgemeinerung des Lemmas von Neyman-Pearson:

Hilfssatz (2.1): 1. *Auf $\mathfrak{K}$ seien die Maße ν und μ sowie die Wahrscheinlichkeit p gegeben, wobei gelte:*

$$p(K) = \int_K g(x)\,\mu(dx) \quad \textit{für alle } K \in \mathfrak{K}$$

und

$$\nu(K) = \int_K f(x)\,\mu(dx) \quad \textit{für alle } K \in \mathfrak{K}\,.$$

2. *Für ein $L \in \mathfrak{K}$ und ein geeignetes k mit $0 < k < +\infty$ sei bis auf μ-Nullmengen:*

$$\{x : g(x) > k f(x)\} \subset L \subset \{x : g(x) \geqq k f(x)\}\,.$$

Dann gelten die Beziehungen:

a) $$p(L) = \max_{\nu(K) \leqq \nu(L)} p(K)$$

b) $$\nu(L) = \min_{p(K) \geqq p(L)} \nu(K)\,.$$

Beweis: Aus Vor. 1. und 2. folgt zunächst $1 \geqq p(L) \geqq k\nu(L)$; wegen $k > 0$ ist also $\nu(L) < +\infty$. Damit lassen sich die Behauptungen nach dem Muster des Beweises des Lemmas von NEYMAN-PEARSON (siehe z.B. L. SCHMETTERER *[10]* S. 187—188) beweisen: Aus Vor. 2. und 1. bzw. aus $\nu(L) < +\infty$ folgt die Ungleichheitskette

$$p(L) - p(K) = p(L\overline{K}) - p(\overline{L}K) \geqq k[\nu(L\overline{K}) - \nu(\overline{L}K)] = k[\nu(L) - \nu(K)]$$

für alle $K \in \mathfrak{K}$, woraus wegen $0 < k < +\infty$ die Beh. a) und b) folgen, w.z.b.w.

Um diesen Hilfssatz anwenden zu können, benötigen wir eine Integraldarstellung der Wahrscheinlichkeiten p_ϑ und der Maße $\int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(K)\,\varphi(d\sigma)$ auf $\mathfrak{K}$ bezüglich eines geeigneten Maßes $\mu|\mathfrak{K}$. Ein solches Maß wird natürlich wegen Voraussetzung AI—II durch

(2.2) $$\mu(K) := \int_\Theta p_\sigma(K)\,\varphi(d\sigma) \quad \text{für alle} \quad K \in \mathfrak{K}$$

definiert, wenn wir wieder $+\infty$ als Integralwert zulassen. Dabei unterdrücken wir in der Bezeichnungsweise die Vorbewertung φ. Setzen wir $\varphi(\vartheta) := \varphi(\{\vartheta\})$, so ist wegen $\varphi(\vartheta) < +\infty$ nach Voraussetzung AII

(2.3) $$\int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(K)\,\varphi(d\sigma) = \mu(K) - \varphi(\vartheta)\,p_\vartheta(K)\,.$$

Diese Gleichung zeigt den engen Zusammenhang zwischen dem in der Definition (1.7) von φ-trennscharf verwendeten Maß $\int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(K)\,\varphi(d\sigma)$ und dem Maß μ. Falls $\varphi(\vartheta) = 0$ ist, sind die beiden Maße sogar identisch. Wir machen deshalb die

Voraussetzung I: Die Vorbewertung $\varphi|\mathfrak{B}$ hat folgende Eigenschaft: Die Wahrscheinlichkeiten $p_\vartheta|\mathfrak{K}$, $\vartheta \in \Theta$, besitzen (Wahrscheinlichkeits-)Dichten $g(x, \vartheta)$ bezüglich des Maßes $\mu|\mathfrak{K}$ definiert in (2.2).

Diese Voraussetzung liefert die gewünschten Integraldarstellungen. Zunächst ist

(2.4) $$p_\vartheta(K) = \int_K g(x, \vartheta)\,\mu(dx)$$

lediglich eine andere Formulierung von Voraussetzung I. Daraus folgt mit (2.3) weiterhin

$$\int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(K)\, \varphi(d\sigma) = \int_K [1 - \varphi(\vartheta)\, g(x, \vartheta)]\, \mu(dx). \tag{2.5}$$

Sind die Wahrscheinlichkeiten p_ϑ in der Form von Dichten $f(x, \vartheta)$ gegeben, so gibt der folgende Satz unter gewissen Voraussetzungen an, wann Voraussetzung I gilt, d. h. eine Dichte $g(x, \vartheta)$ existiert, und welche Gestalt diese Dichte hat. Dabei beruht die Nichtexistenz einer Dichte in diesem Fall darauf, daß $\mu | \mathfrak{K}$ ausartet, d. h. daß es ein L mit $\mu(L) = +\infty$ und $\mu(K) = +\infty$ oder 0 für alle $K \subset L$ gibt. Wegen (2.3) artet dann aber auch das Maß $\int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(K)\, \varphi(d\sigma)$ aus. Dies kann aber zur Folge haben, daß jedes Konfidenzverfahren φ-trennscharf ist, was natürlich nicht der Sinn der Definition (1.7) ist.

Satz (2.6): 1. *Die Vorbewertung $\varphi | \mathfrak{B}$ sei normal (total-σ-endlich) mit $\varphi(B) > 0$ für alle offenen $B \neq 0$.*

2. *Die Wahrscheinlichkeiten $p_\vartheta | \mathfrak{K}$ besitzen Dichten $f(x, \vartheta)$ bezüglich eines normalen Maßes $L | \mathfrak{K}$.*

3. *$f(x, \vartheta)$ sei bezüglich des Produkt-σ-Körpers ${}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ meßbar und*

4. *$f(x, \vartheta)$ sei stetig in $\vartheta \in \Theta$ für alle $x \notin N$, wobei $L(N) = 0$ ist.*

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) $$\int_\Theta f(x, \sigma)\, \varphi(d\sigma) < +\infty \quad L\text{-fast überall}$$

b) $$g_0(x, \vartheta) := \begin{cases} \dfrac{f(x, \vartheta)}{\int_\Theta f(x, \sigma)\, \varphi(d\sigma)} & \text{für alle } x \notin N \text{ mit } f(x, \vartheta) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine Dichte von p_ϑ bezüglich μ.

c) *Voraussetzung I ist erfüllt.*

Beweis: 1. Aus Vor. 1. und 4. folgt

$$\int_\Theta f(x, \sigma)\, \varphi(d\sigma) > 0 \quad \text{für alle} \quad x \notin N \quad \text{mit} \quad f(x, \vartheta) > 0. \tag{+}$$

Also existiert die unter b) definierte Funktion $g_0(x, \vartheta)$.

2. Aus Vor. 1.—3. und (2.2) folgt nach dem Satz von Fubini

$$\mu(K) = \int_\Theta \Big[\int_K f(x, \sigma)\, L(dx)\Big] \varphi(d\sigma) = \int_K \Big[\int_\Theta f(x, \sigma)\, \varphi(d\sigma)\Big] L(dx). \tag{++}$$

Also folgt wegen Vor. 2. und (+) aus Aussage a) die Aussage b). Letztere impliziert selbstverständlich c). Aus c) und Vor. 2. erhalten wir

$$\int_K g(x, \vartheta)\, \mu(dx) = \int_K f(x, \vartheta)\, L(dx).$$

Deshalb folgt wegen (++) aus c) die Aussage a), womit der Kreis der Implikationen geschlossen ist, w. z. b. w.

Voraussetzung 1. von Satz (2.6) ist z. B. erfüllt, wenn Θ eine offene Teilmenge des R^m ist und φ die Beschränkung des Lebesgueschen Maßes auf Θ ist, Vor. 2.—4., wenn $f(x, \vartheta)$ eine in ϑ stetige Wahrscheinlichkeitsdichte im R^n bezüglich des Lebesgueschen Maßes ist.

Um den trivialen Fall auszuschließen, daß aus dem Eintreten eines Ereignisses K mit Sicherheit folgt, daß der wahre Index ϑ_0 ein bestimmtes Element des Indexraumes ist, machen wir die folgende

Voraussetzung II: a) *Ist ϑ ein isolierter Punkt des Indexraumes, d. h. $\{\vartheta\}$ offen, so ist $p_\vartheta(K) = 0$, wenn $p_\sigma(K) = 0$ für alle $\sigma \neq \vartheta$ ist.*

b) *Für offene $B \neq 0$ ist $\varphi(B) > 0$.*

Hilfssatz (2.7): *Aus Voraussetzung I und II folgt für alle $\vartheta \in \Theta$:*

$$\varphi(\vartheta)\, g(x, \vartheta) < 1 \quad \textit{für } \mu\textit{-fast alle } x.$$

Beweis: Aus (2.5) folgt zunächst für $\sigma \neq \vartheta$:

$$(^+) \qquad p_\sigma\{x : \varphi(\vartheta)\, g(x, \vartheta) \geqq 1\} = 0\,.$$

Also erhalten wir aus Voraussetzung II und der Stetigkeit von $p_\sigma(K)$ in σ, daß $(^+)$ auch für $\sigma = \vartheta$ gilt. Wegen (2.2) folgt aber aus $(^+)$ die Behauptung.

Es sei im folgenden β eine fest vorgegebene Zahl mit $0 < \beta < 1$. Wir definieren eine Funktion $k|\Theta$, die wir zur Beschreibung der φ-trennscharfen Konfidenzverfahren benötigen werden:

$$(2.8) \qquad k(\vartheta) := \inf\{y : p_\vartheta\{x : g(x, \vartheta) > y\} \leqq \beta\}\,.$$

Dabei unterdrücken wir in der Bezeichnung die Abhängigkeit von β. Die Existenz und einige Eigenschaften von $k(\vartheta)$ zeigen wir in

Hilfssatz (2.9): *Es seien die Voraussetzungen I-II erfüllt. Dann existiert $k|\Theta$ und hat folgende Eigenschaften für alle $\vartheta \in \Theta$:*

a) $p_\vartheta\{x : g(x, \vartheta) > k(\vartheta)\} \leqq \beta \leqq p_\vartheta\{x : g(x, \vartheta) \geqq k(\vartheta)\}$.

b) $0 < k(\vartheta) < +\infty$.

c) $\varphi(\vartheta)\, k(\vartheta) < 1$.

Bemerkung: Die linke Hälfte der Behauptung a) besagt, daß das Infimum in (2.8) angenommen wird.

Beweis: 1. Nach Voraussetzung I ist $g(x, \vartheta)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte von p_ϑ bezüglich μ und dabei $0 < g(x, \vartheta) < +\infty$ p_ϑ-fast überall. Aus

$$\lim_{y \to \infty} p_\vartheta\{x : g(x, \vartheta) > y\} = 0$$

und

$$\lim_{y \to 0} p_\vartheta\{x : g(x, \vartheta) > y\} = 1$$

nach dem Grenzwertsatz für aufsteigende bzw. absteigende Folgen und $0 < \beta < 1$ folgt die Existenz von $k(\vartheta)$ und Beh. b).

2. Aus der Definition (2.8) von $k(\vartheta)$ erhalten wir für $\varepsilon > 0$

$$p_\vartheta\{x : g(x, \vartheta) > k(\vartheta) + \varepsilon\} \leqq \beta \leqq p_\vartheta\{x : g(x, \vartheta) > k(\vartheta) - \varepsilon\}\,.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ergibt Beh. a).

3. Aus Voraussetzung I und II folgt nach (2.7) wegen Beh. b)

$$k(\vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, g(x, \vartheta) < k(\vartheta)$$

μ-fast überall. Vergleicht man dies mit der rechten Seite von Beh. a), so erhalten wir wegen Voraussetzung I und $\beta > 0$ Beh. c), w.z.b.w.

Mit $\mathfrak{V}_\beta$ hatten wir die Gesamtheit aller Konfidenzverfahren V mit einem Konfidenzkoeffizienten $\beta(V) \geqq \beta$ bezeichnet. Weiter definieren wir mit der durch (2.8) definierten Funktion $k|\Theta$:

Definition (2.10): *Es sei $\mathfrak{U}_\beta$ die Gesamtheit aller Konfidenzverfahren U mit einem exakten (siehe Definition (1.3)) Konfidenzkoeffizienten $\beta(U) = \beta$ und mit*

$$\{x : g(x, \vartheta) > k(\vartheta)\} \subset U_\vartheta \subset \{x : g(x, \vartheta) \geqq k(\vartheta)\}$$

bis auf μ-Nullmengen für alle $\vartheta \in \Theta$.

Zunächst setzen wir $\mathfrak{U}_\beta \neq 0$ voraus, wofür wir später Bedingungen angeben werden, und beweisen

Satz (2.11): 1. *Es seien die Voraussetzungen I—II erfüllt und*

2. $\mathfrak{U}_\beta$ *sei nicht leer.*

Dann ist $\mathfrak{U}_\beta$ die Gesamtheit aller bezüglich $\mathfrak{V}_\beta$ φ-trennscharfen Konfidenzverfahren.

Beweis: 1. Wir beweisen zunächst, daß $U \in \mathfrak{U}_\beta$ bezüglich $\mathfrak{V}_\beta$ φ-trennscharf ist.

Nach (2.9) ist $0 < k(\vartheta) < +\infty$ und $\varphi(\vartheta)\, k(\vartheta) < 1$. Daraus folgt

$$0 < c(\vartheta) := \frac{k(\vartheta)}{1 - \varphi(\vartheta)\, k(\vartheta)} < +\infty .$$

Damit erhalten wir für $U \in \mathfrak{U}_\beta$ aus (2.10) durch einfache Umformungen

$$(+) \qquad \{x : g(x, \vartheta) > c(\vartheta)\,[1 - \varphi(\vartheta)\, g(x, \vartheta)]\} \subset U_\vartheta \subset \\ \subset \{x : g(x, \vartheta) \geqq c(\vartheta)\,[1 - \varphi(\vartheta)\, g(x, \vartheta)]\}$$

bis auf μ-Nullmengen. Mit $f(x) := 1 - \varphi(\vartheta)\, g(x, \vartheta)$ *und* (2.5) folgt aus (2.1.b)

$$\int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(U_\vartheta)\, \varphi(d\sigma) = \min_{p_\vartheta(K) \geqq p_\vartheta(U_\vartheta)} \int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(K)\, \varphi(d\sigma) .$$

Da nach Definition (1.3), Definition von $\mathfrak{V}_\beta$ und Definition (2.10)

$$(++) \qquad p_\vartheta(V_\vartheta) \geqq \beta(V) \geqq \beta = p_\vartheta(U_\vartheta) \quad \text{für alle} \quad V \in \mathfrak{V}_\beta$$

ist, folgt wegen $U \in \mathfrak{U}_\beta \subset \mathfrak{V}_\beta$

$$(+++) \qquad \int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(U_\vartheta)\, \varphi(d\sigma) = \min_{V \in \mathfrak{V}_\beta} \int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(V_\vartheta)\, \varphi(d\sigma) ,$$

d. h. $U \in \mathfrak{U}_\beta$ ist bezüglich $\mathfrak{V}_\beta$ φ-trennscharf.

2. Es sei W φ-trennscharf bezüglich $\mathfrak{V}_\beta$. Wir zeigen nun, daß $W \in \mathfrak{U}_\beta$ ist.

Zunächst gibt es nach Voraussetzung 2. ein $U \in \mathfrak{U}_\beta$. Also gelten für U die Relationen (+) bis (+++) aus Beweisteil 1. Aus Definition (1.7) folgt $W \in \mathfrak{V}_\beta$ und wegen $U \in \mathfrak{V}_\beta$

$$(\mathrm{x}) \qquad \int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(W_\vartheta)\, \varphi(d\sigma) \leqq \int_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(U_\vartheta)\, \varphi(d\sigma) .$$

Daraus folgt zusammen mit (+) und (2.5) nach (2.1.a) $p_\vartheta(U_\vartheta) \geqq p_\vartheta(W_\vartheta)$. Andererseite gilt wegen $W \in \mathfrak{V}_\beta$ (++) für $V = W$, also ist

$$p_\vartheta(W_\vartheta) = p_\vartheta(U_\vartheta) = \beta. \tag{xx}$$

Daraus folgt zusammen mit (x) und (+++) wegen $W \in \mathfrak{V}_\beta$ nach (2.3) $\mu(W_\vartheta) = \mu(U_\vartheta)$. Diese Gleichung und (xx) bzw. (2.10) liefern

$$1 \geqq p_\vartheta(W_\vartheta) \geqq \int\limits_{W_\vartheta} [g(x,\vartheta) - k(\vartheta)]\,\mu(dx) = \int\limits_{U_\vartheta} [g(x,\vartheta) - k(\vartheta)]\,\mu(dx)$$
$$= \int\limits_{\{x: g(x,\vartheta) \geqq k(\vartheta)\}} [g(x,\vartheta) - k(\vartheta)]\,\mu(dx).$$

Also gilt für W bis auf μ-Nullmengen

$$\{x : g(x,\vartheta) > k(\vartheta)\} \subset W_\vartheta \subset \{x : g(x,\vartheta) \geqq k(\vartheta)\},$$

zusammen mit (xx) folgt also $W \in \mathfrak{U}_\beta$, w.z.b.w.

Nach Satz (2.11) enthält $\mathfrak{U}_\beta$ alle bezüglich $\mathfrak{V}_\beta$ φ-trennscharfen Konfidenzverfahren, falls $\mathfrak{U}_\beta$ nicht leer ist. Für $\mathfrak{U}_\beta \neq 0$ ist nach Definition (2.10) die Existenz einer Menge $V \subset (M, \Theta)$ notwendig, die die folgenden Eigenschaften besitzt: $p_\vartheta(V_\vartheta) = \beta$ für alle $\vartheta \in \Theta$ und

$$\{(x,\vartheta) : g(x,\vartheta) > k(\vartheta)\} \subset V \subset \{(x,\vartheta) : g(x,\vartheta) \geqq k(\vartheta)\}.$$

Existiert ein solches V, so genügt es zum Nachweis, daß V ein Konfidenzverfahren ist, die Bedingung c) der Definition (1.2) nachzuprüfen. Deshalb ist für $V \in \mathfrak{U}_\beta$ hinreichend, daß die Teilmenge $\{(x,\vartheta) : g(x,\vartheta) > k(\vartheta)\}$ von V bereits ein Konfidenzverfahren ist. Dies führt zu der Bedingung (a) der nachfolgenden Voraussetzung III.

Eine andere Methode, die Existenz eines $U \in \mathfrak{U}_\beta$ zu zeigen, besteht darin, die Schnittmengen V_ϑ auf Nullmengen so abzuändern, daß aus V ein Konfidenzverfahren $U \in \mathfrak{U}_\beta$ entsteht. Dies ist möglich, wenn die Bedingung (b) von Voraussetzung III erfüllt ist. Dabei heißt eine Gesamtheit $\mathfrak{N}$ von Mengen N eine Überdeckung von M, wenn $\sum\limits_{N \in \mathfrak{N}}' N = M$ ist, und $\aleph(A)$ bezeichnet die Mächtigkeit einer Menge A.

Voraussetzung III. Eine der beiden folgenden Bedingungen ist erfüllt:

(a) *Es gilt* $\sup\limits_{\vartheta \in \Theta} \dfrac{g(x,\vartheta)}{k(\vartheta)} > 1$ *für μ-fast alle x.*

(b) *Es existiert eine Überdeckung $\mathfrak{N}$ der Ergebnismenge M mit μ-Nullmengen N, so daß* $\aleph(\mathfrak{N}) \leqq \aleph(\Theta)$.

Bedingung (b) ist nur dann erfüllbar, wenn $\mu \mid \mathfrak{K}$ keine Sprünge hat im Sinne der folgenden

Definition (2.12): *Ein Maß $\nu \mid \mathfrak{K}$ hat keine Sprünge, wenn es zu jedem $K \in \mathfrak{K}$ mit $\nu(K) > 0$ ein $L \subset K$ gibt, so daß $0 < \nu(L) < \nu(K)$ gilt.*

Daß $\mu \mid \mathfrak{K}$ keine Sprünge hat, werden wir später in Voraussetzung IV implizit fordern. Hat μ keine Sprünge, so ist Bedingung (b) insbesondere dann erfüllt, wenn $\aleph(M) \leqq \aleph(\Theta)$ ist. Dies ist in allen praktischen Beispielen der Fall, wenn Θ überabzählbar ist. Ist Θ höchstens abzählbar, so ist Bedingung (a) nachzuprüfen.

Der folgende Hilfssatz zeigt, daß bei geeigneter Wahl der Wahrscheinlichkeitsdichten $g(x, \vartheta)$ Bedingung (a) allgemeiner ist als Bedingung (b):

Hilfssatz (2.13): *Ist Voraussetzung I—III erfüllt, so gibt es eine Version $g^*(x, \vartheta)$ der Dichte $g(x, \vartheta)$ von p_ϑ bezüglich μ, so daß gilt:*

$$\sup_{\vartheta \in \Theta} \frac{g^*(x, \vartheta)}{k(\vartheta)} > 1 \text{ für } \mu\text{-fast alle } x.$$

Beweis: Im Falle der Bedingung (a) von Voraussetzung III ist die Behauptung trivial. Es gebe also ein $\mathfrak{N}$ mit $\sum_{N \in \mathfrak{N}}^{\cdot} N = M$, $\mu(N) = 0$ für alle $N \in \mathfrak{N}$ und $\aleph(\mathfrak{N}) \leqq \aleph(\Theta)$. Daraus folgt, daß es eine Abbildung von Θ auf $\mathfrak{N}$ gibt, so daß $\mathfrak{N} = \{N_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ ist. Also definiert

$$g^*(x, \vartheta) := \begin{cases} g(x, \vartheta) & \text{für } x \notin N_\vartheta \\ +\infty & \text{für } x \in N_\vartheta \end{cases}$$

eine Dichte von p_ϑ bezüglich μ. Wegen $0 < k(\vartheta) < +\infty$ nach (2.9.b) erfüllt diese Dichte die Behauptung, w.z.b.w.

Bemerkung: Die Überdeckung $\mathfrak{N} = \{N_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ kann man als eine Familie von Akzeptierungsbereichen eines Konfidenzverfahrens mit $\mu(N_\vartheta) = 0$ auffassen.

Das folgende Beispiel soll illustrieren, daß bei der üblichen Wahl der Wahrscheinlichkeitsdichte als stetige Funktion Bedingung (a) nicht erfüllt sein muß.

Beispiel: Es sei $M := (R^1_y, \{z : 0 < z < 1\})$ sowie $\Theta := R^1$ und $p_\vartheta | \mathfrak{R}$ gegeben durch die Dichten

$$f(y, z; \vartheta) = \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y - \vartheta)^2 z^2\right)$$

bezüglich des auf M beschränkten Lebesgueschen Maßes im R^2. Die Vorbewertung $\varphi | \mathfrak{B}$ sei das Lebesguesche Maß im R^1.

Zunächst ist $\int_\Theta f(y, z; \sigma)\varphi(d\sigma) = 1$. Daraus folgt aus Satz (2.6), daß $g_0(y, z; \vartheta) = f(y, z; \vartheta)$. Hier ist die durch (2.8) definierte Funktion $k | \Theta$ eine von ϑ unabhängige Konstante k. Also ist

$$\sup_{\vartheta \in \Theta} k^{-1} g_0(y, z; \vartheta) = \left(k\sqrt{2\pi}\right)^{-1} z < 1$$

für alle $(y, z) \in M$ mit $0 < z < k\sqrt{2\pi}$; d. h. Bedingung (a) von Vor. III ist nicht erfüllt, während die Familie der Nullmengen $\{(y, z) : y = \vartheta\}$ mit $\vartheta \in \Theta$ ganz M überdeckt.

Nun beweisen wir, daß das in (2.10) definierte $\mathfrak{U}_\beta$ nicht leer ist:

Satz (2.14): 1. *Es seien die Voraussetzungen I—III erfüllt und*

2. *existiere ein $V \subset (M, \Theta)$, so daß für alle $\vartheta \in \Theta$ gilt: $p_\vartheta(V_\vartheta) = \beta$ und*

$$\{x : g(x, \vartheta) > k(\vartheta)\} \subset V_\vartheta \subset \{x : g(x, \vartheta) \geqq k(\vartheta)\}.$$

Dann ist $\mathfrak{U}_\beta$ nicht leer.

Beweis: Nach (2.13) gibt es eine Version $g^*(x, \vartheta)$ der Dichte $g(x, \vartheta)$ von p_ϑ bezüglich μ, so daß gilt:

$$(+) \qquad \sup_{\vartheta \in \Theta} \frac{g^*(x, \vartheta)}{k(\vartheta)} > 1$$

für μ-fast alle x. Wir können also annehmen, daß Vor. 2 für $g^*(x, \vartheta)$ anstelle von $g(x, \vartheta)$ erfüllt ist.

Nach Definition (2.10) genügt es zu beweisen, daß V ein Konfidenzverfahren ist, wobei nur noch (1.2.c) zu zeigen ist. Wir erhalten

$$\{x : V_x = 0\} = \prod_{\vartheta \in \Theta}{}^{\cdot} \overline{V}_\vartheta \subset \prod_{\vartheta \in \Theta}{}^{\cdot} \{x : g^*(x, \vartheta) \leqq k(\vartheta)\} = \left\{x : \sup_{\vartheta \in \Theta} \frac{g^*(x, \vartheta)}{k(\vartheta)} \leqq 1\right\}.$$

Die letzte Menge ist aber wegen (+) Teilmenge einer μ-Nullmenge, woraus die Behauptung folgt.

Aus dem Beweis folgt, daß im Falle $\mu\{x : g(x, \vartheta) = k(\vartheta)\} = 0$ für alle $\vartheta \in \Theta$ bei abzählbarem Θ Bed. (a) von Voraussetzung III für $\mathfrak{U}_\beta \neq 0$ notwendig ist.

Daß (2.14) ein selbständiges Interesse als Satz hat, zeigt ein Vergleich mit der Spezialisierung (3.16) und der dortigen Bemerkung über Wahrscheinlichkeiten mit Sprüngen. Hier benutzen wir (2.14) nur als Hilfssatz, indem wir Voraussetzung 2. durch eine Eigenschaft der Wahrscheinlichkeiten p_ϑ unter Verwendung von Definition (2.12) ersetzen:

Voraussetzung IV. Alle Wahrscheinlichkeiten $p_\vartheta | \mathfrak{K}$ haben keine Sprünge.
Denn dann können wir den folgenden Spezialfall eines Satzes von LJAPUNOFF [*5*] oder [*1*] anwenden: „Der Wertebereich eines endlichen Maßes ohne Sprünge ist ein abgeschlossenes Intervall."

Satz (2.15): *Es seien die Voraussetzungen I—IV erfüllt. Dann ist $\mathfrak{U}_\beta$ die nicht leere Gesamtheit aller bezüglich $\mathfrak{B}_\beta$ φ-trennscharfen Konfidenzverfahren.*

Beweis: Da nach Vor. IV $p_\vartheta | \mathfrak{K}$ keine Sprünge hat, ist die Beschränkung von p_ϑ auf alle meßbaren Teilmengen von $\{x : g(x, \vartheta) = k(\vartheta)\}$ ein endliches Maß ohne Sprünge. Da aus (2.9.a)

$$0 \leqq \beta - p_\vartheta\{x : g(x, \vartheta) > k(\vartheta)\} \leqq p_\vartheta\{x : g(x, \vartheta) = k(\vartheta)\}$$

folgt, gibt es nach dem Satz von LJAPUNOFF ein K_ϑ mit $K_\vartheta \subset \{x : g(x, \vartheta) = k(\vartheta)\}$ und

$$p_\vartheta(K_\vartheta) = \beta - p_\vartheta\{x : g(x, \vartheta) > k(\vartheta)\}.$$

Also erfüllt V definiert durch $V_\vartheta := K_\vartheta + \{x : g(x, \vartheta) > k(\vartheta)\}$ Vor. 2. von Satz (2.14), aus dem nach Satz (2.11) die Beh. folgt.

§ 3. Subjektivtrennscharfe Konfidenzverfahren bei invarianter Vorbewertung

Wir wollen nun annehmen, daß die Indexmenge Θ der Familie $(M, \mathfrak{K}, p_\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, von Wahrscheinlichkeitsfeldern eine Gruppe ist. Es seien z. B. $x_1, \ldots, x_n$ unabhängig verteilt mit übereinstimmender Verteilungsfunktion $F\left(\frac{y - \alpha}{\sigma}\right)$, wobei $(\alpha, \sigma) \in (R^1_\alpha, \{\sigma : \sigma > 0\})$ die Parameter der Familie sind und $F(y)$ eine fest vorgegebene Verteilungsfunktion ist. Jedem (α, σ) ordnen wir die Transformation $\tau_{\alpha,\sigma}$ von $\mathfrak{y} \in R^n$ durch

$$\tau_{\alpha,\sigma}(\mathfrak{y}) = \sigma\mathfrak{y} + (\alpha, \ldots, \alpha) \text{ mit } \alpha \in R^1, \sigma > 0$$

zu, so daß der Parameterraum eineindeutig auf eine Untergruppe der Ähnlichkeitstransformationen des R^n abgebildet wird. Ist τ^{-1} die Umkehrung der Transformation τ und $\tau K := \{\tau(\mathfrak{y}) : \mathfrak{y} \in K\}$ für alle $K \subset R^n$, so erhalten wir

$$\int_{\tau_{\alpha,\sigma}K} dF\left(\frac{\mathfrak{y} - (\alpha, \ldots, \alpha)}{\sigma}\right) = \int_{\tau_{\alpha,\sigma}K} dF(\tau_{\alpha,\sigma}^{-1}(\mathfrak{y})) = \int_K dF(\mathfrak{y})$$

für alle $\tau_{\alpha,\sigma}$ und Borel'schen K des R^n.

In Anlehnung an diesen speziellen Fall machen wir die folgende

Voraussetzung GI: Die Indexmenge Θ der Wahrscheinlichkeitsfelder $(M, \mathfrak{K}, p_\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, ist eine Gruppe von $\mathfrak{K}$-meßbaren Transformationen mit dem Produkt $(\tau\vartheta)x = \tau(\vartheta x)$ und dem Einselement e. Für $\vartheta K := \{\vartheta x : x \in K\}$ gilt

$$p_\vartheta(\vartheta K) = p_e(K) \textit{ für alle } K \in \mathfrak{K} \textit{ und } \vartheta \in \Theta.$$

Aus dieser Voraussetzung über die abstrakte Indexmenge folgt die folgende Gleichung, die die Bedeutung der Gruppeneigenschaft der Indexmenge zeigt:

$$p_{\tau\vartheta}(K) = p_\vartheta(\tau^{-1}K). \tag{3.1}$$

Denn aus Vor. GI folgt

$$p_{\tau\vartheta}(K) = p_e((\tau\vartheta)^{-1}K) = p_e(\vartheta^{-1}(\tau^{-1}K)) = p_\vartheta(\tau^{-1}K).$$

Weiter lassen sich die Voraussetzungen II und IV vereinfachen. Dazu bemerken wir, daß wir nach wie vor die Voraussetzungen AI—II aus § 1 stillschweigend voraussetzen:

Satz (3.2): *Es gelte Voraussetzung GI.*

Dann sind die Voraussetzungen IIa und IV bereits erfüllt, wenn sie für $\vartheta = e$ gelten, d. h. wenn beziehungsweise gilt:

a) *Ist die Gruppeneins e ein isolierter Punkt von Θ, so ist $p_e(K) = 0$, wenn $p_\sigma(K) = 0$ für alle $\sigma \neq e$ ist.*

b) *Die Wahrscheinlichkeit $p_e | \mathfrak{K}$ hat keine Sprünge.*

Beweis: 1. Es sei ϑ ein isolierter Punkt von Θ und $p_\sigma(K) = 0$ für alle $\sigma \neq \vartheta$. Aus (3.1) folgt $p_{\vartheta-1\sigma}(\vartheta^{-1}K) = p_\sigma(K) = 0$ für $\vartheta^{-1}\sigma \neq e$. Also folgt aus a) oder Voraussetzung AI, der Stetigkeit von $p_\tau(\vartheta^{-1}K)$ an der Stelle $\tau = e$, $p_e(\vartheta^{-1}K) = 0$. Daraus erhalten wir wegen (3.1) $p_\vartheta(K) = 0$, d. h. Voraussetzung IIa.

2. Aus b) folgt nach Def. (2.12), daß es zu jedem K mit $p_e(K) > 0$ ein $L \subset K$ mit $0 < p_e(L) < p_e(K)$ gibt. Aus (3.1) und Voraussetzung GI folgt die entsprechende Aussage für p_ϑ durch einfache Umformungen, d. h. Voraussetzung IV, w.z.b.w.

Die Gleichung (3.1) zeigt, daß die Linkstransformation $\vartheta \to \tau\vartheta$ der Gruppe Θ von besonderer Bedeutung ist. Wir fordern deshalb den folgenden Zusammenhang zwischen den Gruppeneigenschaften von Θ und der nach Voraussetzung AI in Θ

gegebenen Topologie. Dabei sei $\mathfrak{B}$ wieder das System der Borelschen Mengen von Θ, d. h. der kleinste σ-Körper, der alle offenen Mengen enthält.

Voraussetzung GII: Ist $\tau B := \{\tau\vartheta : \vartheta \in B\}$, *so gilt:* $\tau B \in \mathfrak{B}$ *für alle* $\tau \in \Theta$ *und* $B \in \mathfrak{B}$.

Diese Voraussetzung ist insbesondere dann erfüllt, wenn die Linkstransformation $\vartheta \to \tau\vartheta$ stetig ist. Dies ist natürlich der Fall, wenn Θ eine *topologische Gruppe* ist, d. h. wenn die Gruppe Θ als topologischer Raum ein Hausdorff-Raum ist und die Abbildung $(\tau, \vartheta) \to \tau^{-1}\vartheta$ des Produktraumes (Θ, Θ) auf Θ stetig ist (Definition nach [2]). Darüber hinaus folgt die Stetigkeit der Linkstransformation $\tau\vartheta$ bei geeigneter Wahl der Topologie in der Gruppe Θ aus Voraussetzung GI:

Führt man in der Gruppe Θ die starke Topologie mit der Metrik (1.5) ein, so folgt aus (3.1)

$$\begin{aligned} |\tau\vartheta, \tau\sigma| &= \sup_{K \in \mathfrak{K}} |p_{\tau\vartheta}(K) - p_{\tau\sigma}(K)| \\ &= \sup_{\tau^{-1}K \in \mathfrak{K}} |p_{\vartheta}(\tau^{-1}K) - p_{\sigma}(\tau^{-1}K)| = |\vartheta, \sigma| \,. \end{aligned}$$

Also sind in der Gruppe Θ mit der Metrik (1.5) die Linkstransformationen $\tau\vartheta$ stetig in ϑ.

Im Fall der schwachen Topologie mit den Mengen der Gestalt (1.6) als Basis des Systems der offenen Mengen gilt wegen (3.1):

$$\begin{aligned} &\tau^{-1}\{\sigma : |p_\sigma(K_i) - p_{\tau\vartheta}(K_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\} \\ &= \{\sigma : |p_\sigma(\tau^{-1}K_i) - p_\vartheta(\tau^{-1}K_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Also ist die Basis des Systems der offenen Mengen der schwachen Topologie gegenüber Linkstransformationen invariant und damit $\tau\vartheta$ stetig in ϑ.

Im Fall der starken oder schwachen Topologie ist also Voraussetzung GII implizit in der Voraussetzung GI enthalten.

Die Voraussetzungen GI—II legen es nahe, invariante Vorbewertungen einzuführen. Dabei ist zu beachten, daß Vorbewertungen als gleichwertig anzusehen sind, wenn sie sich nur um einen positiven Faktor unterscheiden:

Definition (3.3)*: Ist Voraussetzung GI—II erfüllt, so nennen wir eine Vorbewertung* $\varphi | \mathfrak{B}$ *semiinvariant, wenn* $\varphi(\tau B) = \Delta(\tau)\varphi(B)$ *für alle* $\tau \in \Theta$ *und* $B \in \mathfrak{B}$, *wobei die Funktion* $\Delta | \Theta$ *von* B *unabhängig ist. Falls* $\Delta(\vartheta) = 1$ *für alle* $\vartheta \in \Theta$ *ist, nennen wir* $\varphi | \mathfrak{B}$ *linksinvariant.*

Da aus Voraussetzung AII die Existenz eines $B \in \mathfrak{B}$ mit $0 < \varphi(B) < +\infty$ folgt, erhalten wir durch wiederholte Anwendung der Definition (3.3), daß $\Delta | \Theta$ ein Homomorphismus der abstrakten Gruppe Θ in die multiplikative Gruppe R_+ der positiven reellen Zahlen ist, d. h. es gilt: $\Delta(\tau\vartheta) = \Delta(\tau)\Delta(\vartheta)$ und $\Delta(\tau^{-1}) = (\Delta(\tau))^{-1}$, insbesondere ist $\Delta(\vartheta) > 0$ für alle $\vartheta \in \Theta$. Ist darüberhinaus $\Delta(\vartheta)$ stetig in $\vartheta \in \Theta$, so definiert, wie man leicht einsieht,

$$\lambda(B) := \int_B \Delta(\sigma^{-1})\varphi(d\sigma), \ B \in \mathfrak{B},$$

eine linksinvariante Vorbewertung $\lambda | \mathfrak{B}$. Ist umgekehrt $h(\vartheta)$ eine nicht konstante stetige Homomorphie von Θ in R_+, und $\lambda \mid \mathfrak{B}$ eine linksinvariante Vorbewertung, so wird durch

$$(3.4) \qquad \varphi_a(B) := \int_B h^a(\sigma)\,\lambda(d\sigma), \quad B \in \mathfrak{B},$$

für jedes $a \in R^1$ eine semiinvariante Vorbewertung $\varphi_a \mid \mathfrak{B}$ mit $\Delta_a(\vartheta) = h^a(\vartheta)$ definiert.

Ist Θ eine lokal kompakte topologische Gruppe, so gibt es bis auf einen positiven Faktor genau eine linksinvariante Vorbewertung: Das *linke* (linksinvariante) *Haar'sche Maß* $\lambda \mid \mathfrak{B}$, d. h. es ist $\lambda(\tau B) = \lambda(B)$ für alle $\tau \in \Theta$ und $B \in \mathfrak{B}$, $\varphi(D) > 0$ für alle offenen $D \neq 0$ und $\varphi(C) < +\infty$ für alle kompakten C (siehe [2]). In diesem Fall sind alle semiinvarianten Vorbewertungen von der Gestalt (3.4), wobei $h(\vartheta)$ ein Homomorphismus der topologischen Gruppe Θ in die multiplikative Gruppe R_+ der positiven reellen Zahlen ist.

Wir setzen nun

Voraussetzung GIII. Die Vorbewertung $\varphi \mid \mathfrak{B}$ ist semiinvariant.

Die Voraussetzungen GI—III werden es nun ermöglichen, die Beschreibung der in (2.10) definierten Gesamtheit $\mathfrak{U}_\beta$ zu vereinfachen. Zunächst gilt für das in (2.2) definierte $\mu \mid \mathfrak{K}$:

$$(3.5) \qquad \mu(\tau K) = \Delta(\tau)\,\mu(K)$$

für alle $K \in \mathfrak{K}$ und $\tau \in \Theta$. Denn aus (2.2), (3.1) und durch eine Transformation $\sigma \to \vartheta = \tau^{-1}\sigma$ der Integrationsvariablen folgt unter Beachtung der Semiinvarianz von φ:

$$\mu(\tau K) = \int_\Theta p_\sigma(\tau K)\,\varphi(d\sigma) = \int_\Theta p_{\tau^{-1}\sigma}(K)\,\varphi(d\sigma)$$
$$= \int_\Theta p_\vartheta(K)\,\Delta(\tau)\,\varphi(d\vartheta) = \Delta(\tau)\,\mu(K).$$

Sind die Voraussetzungen I und GI—III erfüllt, so definieren wir:

$$(3.6) \qquad g(x) := g(x, e)$$

Dann ist

$$(3.7) \qquad g(x, \vartheta) = \Delta(\vartheta^{-1})\,g(\vartheta^{-1}x)$$

für μ-fast alle x. Denn eine einfache Rechnung ergibt mit Hilfe von (3.1), (2.4) und (3.5)

$$\int_K g(x, \vartheta)\,\mu(dx) = \int_{\vartheta^{-1}K} g(x, e)\,\mu(dx)$$
$$= \int_K g(\vartheta^{-1}x)\,\Delta(\vartheta^{-1})\,\mu(dx).$$

Die Gleichung (3.7) besagt, daß Voraussetzung I damit äquivalent ist, daß $p_e \mid \mathfrak{K}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte $g(x)$ bezüglich $\mu \mid \mathfrak{K}$ besitzt.

Für $k \mid \Theta$ definiert in (2.8) gilt für alle $\vartheta \in \Theta$:

$$(3.8) \qquad k(\vartheta) = c\,\Delta(\vartheta^{-1})$$

mit $c := k(e)$.

Beweis: Nach Definition (2.8) ist

$$k(\vartheta) = \inf\{y : p_\vartheta\{x : g(x, \vartheta) > y\} \leqq \beta\}.$$

Aus (3.1) und (3.7) folgt

$$\begin{aligned} p_\vartheta\{x : g(x, \vartheta) > y\} &= p_e\{\vartheta^{-1} x : \Delta(\vartheta^{-1})\, g(\vartheta^{-1} x) > y\} \\ &= p_e\{x : \Delta(\vartheta^{-1})\, g(x) > y\}. \end{aligned}$$

Also ist nach Definition (2.8)

$$\begin{aligned} k(\vartheta) &= \inf\{y : p_e\{x : \Delta(\vartheta^{-1})\, g(x) > y\} \leqq \beta\} \\ &= \Delta(\vartheta^{-1})\, k(e). \qquad \text{w.z.b.w.} \end{aligned}$$

Aus (3.7) und (3.8) erhalten wir unmittelbar eine einfachere Formulierung der Bedingung (a) von Voraussetzung III, falls Θ höchstens abzählbar ist, und eine einfachere Beschreibung von $\mathfrak{U}_\beta$, definiert in (2.10):

Satz (3.9): *Gelten die Voraussetzungen G I—III und I—II und ist Θ abzählbar, so ist Bedingung (a) von Voraussetzung III äquivalent mit*

$$\sup_{\vartheta \in \Theta} g(\vartheta^{-1} x) > c \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \text{ mit } c := k(e).$$

Satz (3.10): *Gelten die Voraussetzungen G I—III und I—II, so ist $\mathfrak{U}_\beta$ die Gesamtheit aller Konfidenzverfahren U mit einem exakten Konfidenzkoeffizienten $\beta(U) = \beta$ und mit*

$$\{x : g(\vartheta^{-1} x) > c\} \subset U_\vartheta \subset \{x : g(\vartheta^{-1} x) \geqq c\}$$

bis auf μ-Nullmengen für alle $\vartheta \in \Theta$.

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse zusammen: Die Voraussetzungen G I—III ermöglichen eine einfachere Nachprüfung der Voraussetzungen I—IV (siehe (3.2), (3.7) und (3.9)). Weiter enthält die Beschreibung von $\mathfrak{U}_\beta$ nur noch die Dichte $g(x)$ anstelle der Dichten $g(x, \vartheta)$ und der Funktion $k(\vartheta)$. Da $\mathfrak{U}_\beta$ nach Satz (2.15) unter den Voraussetzungen I—IV die Gesamtheit aller bezüglich $\mathfrak{V}_\beta$ φ-trennscharfen Konfidenzverfahren ist, wird dies uns in § 4 die explizite Konstruktion bezüglich $\mathfrak{V}_\beta$ φ-trennscharfer Konfidenzverfahren ermöglichen.

Wir beschränken uns im folgenden auf die Behandlung von invarianten und fastinvarianten Konfidenzverfahren. Um die Definition von fastinvariant motivieren zu können, geben wir zunächst (vgl. LEHMANN [*4*] S. 243) die

Definition (3.11): *Ist Voraussetzung G I—II erfüllt, so heißt ein Konfidenzverfahren V invariant, wenn gilt:*

$$\tau V_x = V_{\tau x}$$

für alle $\tau \in \Theta$ und $x \in M$.

Aus der Definition folgt:

Satz (3.12): *Ein Konfidenzverfahren V ist dann und nur dann invariant, wenn gilt:*

$$V = \{(x, \vartheta) : \vartheta^{-1} x \in V_e\}.$$

Beweis: Die folgenden drei Relationen sind für alle ϑ, $\tau \in \Theta$ und $x \in M$ äquivalent:

$$\vartheta \in V_{\tau x}, \quad \tau x \in V_\vartheta, \quad x \in \tau^{-1} V_\vartheta,$$

und ebenso:

$$\vartheta \in \tau V_x, \quad \tau^{-1}\vartheta \in V_x, \quad x \in V_{\tau^{-1}\vartheta}.$$

Daraus folgt aber die Äquivalenz von $\tau V_x = V_{\tau x}$ mit $\tau^{-1} V_\vartheta = V_{\tau^{-1}\vartheta}$. Da die letzte Gleichung mit $V_\vartheta = \vartheta V_e$ für alle $\vartheta \in \Theta$ äquivalent ist, folgt aus Definition (3.11) die Behauptung.

Die Gleichung $V_\vartheta = \vartheta V_e$ für invariante Konfidenzverfahren, legt es nahe, fastinvariant folgendermaßen zu definieren:

Definition (3.13): *Ist Voraussetzung GI—II erfüllt, so nennen wir ein Konfidenzverfahren V fastinvariant, wenn gilt:*

$$V_\vartheta = \vartheta V_e$$

bis auf μ-Nullmengen für alle $\vartheta \in \Theta$.

Aus Voraussetzung GI folgt unmittelbar, daß der Konfidenzkoeffizient fastinvarianter Konfidenzverfahren exakt ist.

Mit $\mathfrak{F}_\beta$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller fastinvarianten Konfidenzverfahren V mit einem Konfidenzkoeffizienten $\beta(V) \geqq \beta$. Weiter geben wir die

Definition (3.14): *Es sei $\mathfrak{G}_\beta$ die Gesamtheit aller fastinvarianten Konfidenzverfahren V mit einem Konfidenzkoeffizienten $\beta(V) = \beta$ und mit*

$$\{x : g(x) > c\} \subset V_e \subset \{x : g(x) \geqq c\}$$

bis auf μ-Nullmengen, wobei wieder $c := k(e)$ ist.

Aus Satz (3.10) folgt $\mathfrak{G}_\beta = \mathfrak{U}_\beta \mathfrak{F}_\beta$. Denn der Konfidenzkoeffizient der fastinvarianten $V \in \mathfrak{G}_\beta$ ist exakt, und aus $V_\vartheta = \vartheta V_e$ bis auf μ-Nullmengen folgt die Äquivalenz der Mengenrelationen für $V \in \mathfrak{G}_\beta$.

Zunächst gilt in Analogie zu Satz (2.11):

Satz (3.15): 1. *Es seien die Voraussetzungen I—II und GI—III erfüllt und*

2. *$\mathfrak{G}_\beta$ nicht leer.*

Dann ist $\mathfrak{G}_\beta$ die Gesamtheit aller bezüglich $\mathfrak{F}_\beta$ φ-trennscharfen Konfidenzverfahren.

Beweis: Wegen $\mathfrak{U}_\beta \mathfrak{F}_\beta = \mathfrak{G}_\beta \neq 0$ ist nach Satz (2.11) und Definition (1.7) $\mathfrak{U}_\beta$ die Gesamtheit aller $U \in \mathfrak{V}_\beta$ mit

$$\text{(x)} \qquad \int\limits_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(U_\vartheta)\,\varphi(d\sigma) = \min_{V \in \mathfrak{V}_\beta} \int\limits_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(V_\vartheta)\,\varphi(d\sigma)$$

für alle $\vartheta \in \Theta$. Also ist $\mathfrak{G}_\beta = \mathfrak{U}_\beta \mathfrak{F}_\beta$ die Gesamtheit aller $U \in \mathfrak{F}_\beta$, für die (x) gilt. Daraus folgt aber wegen $\mathfrak{V}_\beta \supset \mathfrak{F}_\beta \supset \mathfrak{G}_\beta \neq 0$ zunächst

$$\min_{V \in \mathfrak{V}_\beta} \int\limits_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(V_\vartheta)\,\varphi(d\sigma) = \min_{V \in \mathfrak{F}_\beta} \int\limits_{\sigma \neq \vartheta} p_\sigma(V_\vartheta)\,\varphi(d\sigma)$$

für alle $\vartheta \in \Theta$ und damit durch Zusammenfassung mit (x) die Behauptung.

Weiter verschärfen wir Satz (2.14) zu

Satz (3.16): 1. *Es seien die Voraussetzungen I—III und GI—III erfüllt und* 2. *existiere ein* $V_e \in \mathfrak{K}$, *so daß* $p_e(V_e) = \beta$ *und*

$$\{x : g(x) > c\} \subset V_e \subset \{x : g(x) \geqq c\}$$

ist. Dann ist $\mathfrak{G}_\beta$ *nicht leer.*

Beweis: 1. Nach Hilfssatz (2.13) gibt es eine Version $g^*(x, \vartheta)$ der Dichte $g(x, \vartheta)$ von p_ϑ bezüglich μ, so daß

$$\sup_{\vartheta \in \Theta} \frac{g^*(x, \vartheta)}{k(\vartheta)} > 1$$

für μ-fast alle x. Setzen wir

$$U := \{(x, \vartheta) : \vartheta^{-1} x \in V_e \text{ oder } g^*(x, \vartheta) > k(\vartheta)\},$$

so erhalten wir wie im Beweise von Satz (2.14)

$$\{x : U_x = 0\} \subset \left\{x : \sup_{\vartheta \in \Theta} \frac{g^*(x, \vartheta)}{k(\vartheta)} \leqq 1\right\}$$

und daraus, daß U ein Konfidenzverfahren ist.

2. Da nach (3.7) $g^*(x, \vartheta) = \Delta(\vartheta^{-1}) g(\vartheta^{-1} x)$ μ-fast überall ist und nach (3.8) $k(\vartheta) = c\Delta(\vartheta^{-1})$, folgt aus Vor. 2. $\{x : g^*(x, \vartheta) > k(\vartheta)\} \subset \vartheta V_e$ bis auf μ-Nullmengen. Also ist $U_\vartheta = \vartheta V_e = \vartheta U_e$ bis auf μ-Nullmengen, d. h. U ist fastinvariant.

3. Aus $U_e = V_e$ bis auf μ-Nullmengen und Vor. 2. folgt $U \in \mathfrak{G}_\beta$ (siehe Definition (3.14)), w.z.b.w.

Auch wenn Voraussetzung IV nicht gilt, d. h. die Wahrscheinlichkeiten $p_\vartheta | \mathfrak{K}$ Sprünge haben, ist Voraussetzung 2. von Satz (3.16) für einige β Werte erfüllbar, nämlich wenigstens für alle β mit $\beta = p_e\{x : g(x) > y\}$ für irgend ein $y > 0$.

Schließlich gilt in Analogie zu Satz (2.15) der folgende

Satz (3.17): 1. *Es seien die Voraussetzungen I—IV und GI—III erfüllt. Dann ist* $\mathfrak{G}_\beta$ *die nicht leere Gesamtheit aller bezüglich* $\mathfrak{F}_\beta$ φ*-trennscharfen Konfidenzverfahren.*

Der Beweis dieses Satzes verläuft genauso wie der von Satz (2.15).

Nun wollen wir noch zeigen, daß die fastinvarianten φ-trennscharfen Konfidenzverfahren unverfälscht sind, wenn die Vorbewertung $\varphi | \mathfrak{B}$ nicht nur semiinvariant, sondern sogar linksinvariant ist. Dabei nennen wir ein Konfidenzverfahren *unverfälscht* (unbiased), wenn gilt:

$$p_\vartheta(V_\vartheta) = \max_{\tau \in \Theta} p_\vartheta(V_\tau) \tag{3.18}$$

für alle $\vartheta \in \Theta$.

Satz (3.19): *Es seien die Voraussetzungen I—II und GI—III erfüllt, wobei die Vorbewertung* $\varphi | \mathfrak{B}$ *linksinvariant ist. Dann sind alle* $U \in \mathfrak{G}_\beta$ *unverfälscht.*

Beweis: Wegen $\mathfrak{G}_\beta \subset \mathfrak{U}_\beta$ gilt für $U \in \mathfrak{G}_\beta$ nach Satz (3.10)

$$\{x : g(\vartheta^{-1} x) > c\} \subset U_\vartheta \subset \{x : g(\vartheta^{-1} x) \geqq c\} \tag{+}$$

bis auf μ-Nullmengen mit $0 < c < +\infty$. Da $\varphi | \mathfrak{B}$ linksinvariant ist, folgt aus (3.7) $g(x, \vartheta) = g(\vartheta^{-1} x)$ μ-fast überall. Deshalb folgt aus (+) nach (2.1.a)

$$p_\vartheta(U_\vartheta) = \max_{\mu(K) \leqq \mu(U_\vartheta)} p_\vartheta(K). \tag{++}$$

Aus der Fastinvarianz von U und $\Delta(\tau) = 1$ folgt nach (3.5) $\mu(U_\tau) = \mu(\tau U_e) = \mu(U_e) = \mu(U_\vartheta)$. Damit folgt aus (++) die Definitionsgleichung (3.18) von unverfälscht, w.z.b.w.

Ersetzt man in den Definitionen von $\mathfrak{F}_\beta$ und $\mathfrak{G}_\beta$ fastinvariant durch invariant, so sind alle Beweise der Sätze (3.15)—(3.19) analog durchführbar, wenn man Voraussetzung III durch die folgende ersetzt:

Voraussetzung III. Eine der beiden folgenden Bedingungen ist erfüllt:*

a) *Es gilt* $\sup_{\vartheta \in \Theta} g(\vartheta^{-1}x) > c$ *für μ-fast alle x.*

b) *Es existiert eine μ-Nullmenge N, so daß*

$$\sum_{\vartheta \in \Theta}^{\cdot} \vartheta N = M.$$

Denn dann kann man anstelle von Satz (2.13) den folgenden beweisen, der die Konstruktion eines invarianten Konfidenzverfahrens ermöglicht:

Satz (3.20): *Sind die Voraussetzungen GI—III, I, II und III* erfüllt, so gibt es eine Version $g^*(x)$ der Wahrscheinlichkeitsdichte $g(x)$ von p_e bezüglich μ, so daß gilt:*

$$\sup_{\vartheta \in \Theta} g^*(\vartheta^{-1}x) > c$$

für μ-fast alle x.

Damit kann man dann einen zu Satz (3.16) analogen Satz für invariante Konfidenzverfahren beweisen.

§ 4. Beispiele

Für eine Reihe von Beispielen konstruieren wir die Konfidenzbereiche invarianter subjektivtrennscharfer Konfidenzverfahren.

Als Beispiele wählen wir Verteilungen der Exponentialfamilie mit Dichten $f(\mathfrak{y}, \mathfrak{t}) = a(\mathfrak{t}) \exp(b(\mathfrak{t})\, c(\mathfrak{y}) + d(\mathfrak{y}))$ bezüglich des Lebesgueschen Maßes im R^n. Der unbekannte Parameter $\mathfrak{t}_0$ der wahren Verteilung sei ein Element des Parameterraumes T, der eine offene Teilmenge des R^m sei, und $f(\mathfrak{y}, \mathfrak{t})$ sei stetig in $\mathfrak{t} \in T$. Also ist, wie wir in § 1 bemerkt haben, Voraussetzung AI erfüllt und gilt Voraussetzung IIa, da der Parameterraum T keine isolierten Punkte enthält. Weiter betrachten wir nur solche Dichten und Parameterräume, die eine eineindeutige Abbildung des Parameterraumes T auf eine Untergruppe Θ der Ähnlichkeitstransformationen des R^n einschließlich der euklidischen Topologie gestatten, so daß die Voraussetzungen GI—II erfüllt sind. Dabei ist Θ eine topologische Gruppe, deren linkes Haarsches Maß und stetige Homomorphien auf R_+ bekannt sind. Damit lassen sich alle semiinvarianten Vorbewertungen nach (3.4) bestimmen. Diese Vorbewertungen wollen wir hier benutzen, so daß die Voraussetzungen AII, IIb und GIII erfüllt sind. Um ein invariantes subjektivtrennscharfes Konfidenzverfahren zu erhalten, genügt es also Voraussetzung I mit Hilfe von Satz (2.6) nachzuprüfen und, falls diese erfüllt ist, ein invariantes $V \in \mathfrak{G}_\beta$ anzugeben. Dieses V ist dann nach Satz (3.15) bezüglich $\mathfrak{F}_\beta$ und nach Satz (2.11) wegen $\mathfrak{G}_\beta \subset \mathfrak{U}_\beta$ auch bezüglich $\mathfrak{V}_\beta$ subjektivtrennscharf.

1. **Beispiel.** Die n-fache unabhängige Wiederholung einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert $\alpha \in R^1_\alpha$ und Standardabweichung $\sigma > 0$ besitzt

$$f(\mathfrak{y}; \alpha, \sigma) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha)^2\right) \quad \text{für} \quad \mathfrak{y} \in R^n.$$

Wir bilden die Parametermenge $T := (R^1_\alpha, \{\sigma : \sigma > 0\})$ wie am Anfang von § 3 auf die Gruppe Θ der Transformationen

$$\tau_{\alpha,\sigma}(\mathfrak{y}) = \sigma\mathfrak{y} + (\alpha, \ldots, \alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha \in R^1_\alpha, \quad \sigma > 0$$

mit dem Produkt $\tau_{\alpha_1,\sigma_1}\,\tau_{\alpha_2,\sigma_2} = \tau_{\alpha_1+\sigma_1\alpha_2,\sigma_1\sigma_2}$ ab.

Für $a \in R^1$ seien die Vorbewertungen $\varphi_a|\mathfrak{B}$ durch

$$\varphi_a(B) := \int_B \sigma^{a-2}\,d\alpha\,d\sigma, \quad B \subset T, \tag{4.1}$$

definiert. Da die Funktionen $\Delta_a(\tau_{\alpha,\sigma}) = \sigma^a$ mit $a \in R^1$ bekanntlich alle stetigen Homomorphien von Θ auf R_+ sind und $\varphi_a|\mathfrak{B}$ für $a = 0$ das bis auf einen positiven konstanten Faktor eindeutige linke Haarsche Maß ist, sind die $\varphi_a|\mathfrak{B}$, $a \in R^1$ alle semiinvarianten Vorbewertungen mit $\Delta_a(\tau_{\alpha,\sigma}) = \sigma^a$. H. JEFFREYS wählt in seinem Lehrbuch [*3*] speziell $a = 1$.

Nun wollen wir nachprüfen, ob Voraussetzung I erfüllt ist. Zunächst ist

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha)^2 = n(\alpha - \bar{y})^2 + n s^2$$

mit

$$\bar{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{und} \quad s^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2. \tag{4.2}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\int_T f(\mathfrak{y}; \alpha, \sigma)\,\varphi(d(\alpha, \sigma)) \\
&= \int_{\sigma>0}\int_{R^1\alpha} \sigma^{a-2}\,(\sigma\sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}[(\alpha - \bar{y})^2 + s^2]\right) d\alpha\,d\sigma \\
&= C_1 \int_{\sigma>0} \sigma^{a-n-1} \exp\left(-\frac{n s^2}{2\sigma^2}\right) d\sigma = C_2 s^{a-n}.
\end{aligned}$$

Dabei ist dann und nur dann $C_2 < +\infty$, wenn das letzte Integral endlich ist, d. h. wenn $a < n$ ist. Also ist nach Satz (2.6) Voraussetzung I genau dann erfüllt, wenn $a < n$ ist. Für $a < n$ erhalten wir also aus Satz (2.6) und (3.6) sowie $e = \tau_{0,1}$

$$g(\mathfrak{y}) = C_3 s^{n-a} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i\right).$$

Wir definieren ein $V \subset (R^n, \Theta)$ durch seine Schnittmengen

$$V_\mathfrak{y} := \left\{\tau_{\alpha,\sigma} : \left(\frac{s}{\sigma}\right)^{n-a} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha)^2\right] \geqq C_4\right\}.$$

Aus

$$\sup_{\alpha,\sigma}\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{n-a} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha)^2\right] = \sup_{\sigma>0}\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{n-a} = +\infty$$

für $a < n$ folgt $\{\mathfrak{y} : V_{\mathfrak{y}} = 0\} = 0$, also ist V ein Konfidenzverfahren. Eine einfache Rechnung zeigt, daß V gemäß Definition (3.11) invariant ist. Bei geeigneter Wahl der Konstanten C_4 ist schließlich nach Definition (3.14) $V \in \mathfrak{S}_\beta$. Also ist V nach Satz (3.15) φ_a-trennscharf bezüglich $\mathfrak{F}_\beta$ und weiter wegen $\mathfrak{S}_\beta \subset \mathfrak{U}_\beta$ nach Satz (2.11) φ_a-trennscharf bezüglich $\mathfrak{B}_\beta$.

Durch die suffizienten Statistiken (4.2) lassen sich die Konfidenzbereiche der invarianten φ_a-trennscharfen Konfidenzverfahren folgendermaßen beschreiben, wobei wir zur ursprünglichen Parameterdarstellung (α, σ) zurückkehren:

$$V_{\bar{y}, s} = \left\{(\alpha, \sigma) : \left(\frac{\bar{y} - \alpha}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{s}{\sigma}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{a}{n}\right) \log\left(\frac{s}{\sigma}\right) \leqq C_5\right\}.$$

Für $a = 0$ ist V nach Satz (3.19) sogar unverfälscht, da dann φ_a linksinvariant ist.

2. Beispiel. Wir betrachten die m-dimensionale Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwertsvektor $\alpha \in R^m$, aber bekannter Kovarianzmatrix Q^{-1}, also die Dichte

$$f(\mathfrak{y} - \alpha) = \sqrt{(2\pi)^{-m} \det Q} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathfrak{y} - \alpha)' Q (\mathfrak{y} - \alpha)\right).$$

Diesmal bilden wir den Parameterraum R^m auf die Gruppe aller Translationen des R^m ab. Für $\mathfrak{k} \in R^m$ werden durch

$$\varphi_{\mathfrak{k}}(B) := \int_B \exp(\mathfrak{k}'\alpha)\, d\alpha$$

semiinvariante Vorbewertungen $\varphi_{\mathfrak{k}} | \mathfrak{B}$ mit $\Delta_{\mathfrak{k}}(\alpha) = \exp(\mathfrak{k}'\alpha)$ definiert. Diese sind wieder alle semiinvarianten Vorbewertungen, weil die $\Delta_{\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{k} \in R^m$, alle stetigen Homomorphismen der Translationsgruppe auf R_+ sind und $\varphi_{\mathfrak{k}}$ für $\mathfrak{k} = 0$ das Lebesguesche Maß ist, d. h. ein linkes Haarsches Maß ist. Hier existiert $g(\mathfrak{y})$ für alle $\mathfrak{k} \in R^m$. Denn wegen

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{y} - \alpha)' Q (\mathfrak{y} - \alpha) - 2\mathfrak{k}'\alpha \\ &\quad = (\mathfrak{y} + Q^{-1}\mathfrak{k} - \alpha)' Q (\mathfrak{y} + Q^{-1}\mathfrak{k} - \alpha) - \mathfrak{k}' Q^{-1} \mathfrak{k} - 2\mathfrak{k}'\mathfrak{y}\end{aligned}$$

erhalten wir

$$\int_{R^m} f(\mathfrak{y} - \alpha)\, \varphi_{\mathfrak{k}}(d\alpha) = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}\mathfrak{k}'[Q^{-1}\mathfrak{k} + 2\mathfrak{y}]\right) < +\infty$$

und daraus nach Satz (2.6) und (3.6)

$$g(\mathfrak{y}) = C_2 \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathfrak{y} + Q^{-1}\mathfrak{k})' Q (\mathfrak{y} + Q^{-1}\mathfrak{k})\right). \tag{4.3}$$

Definieren wir $V \subset (R^m, R^m)$ durch seine Schnittmengen

$$V_{\mathfrak{y}} := \{\alpha : (\mathfrak{y} + Q^{-1}\mathfrak{k} - \alpha)' Q (\mathfrak{y} + Q^{-1}\mathfrak{k} - \alpha) \leqq C_3\},$$

so sieht man unmittelbar, daß V gemäß Definition (3.11) und (1.2) ein invariantes Konfidenzverfahren ist. Bei passender Wahl $C_3 > 0$ folgt aus (4.3) und Definition (3.14) $V \in \mathfrak{S}_\beta$. Also ist nach Satz (3.15) bzw. (2.11) V $\varphi_{\mathfrak{k}}$-trennscharf bezüglich $\mathfrak{F}_\beta$ bzw. $\mathfrak{B}_\beta$.

Sind $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ n unabhängige Beobachtungen von $\mathfrak{y}$, so erhalten wir mit $\bar{\mathfrak{y}} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{y}_i$ die invarianten $\varphi_{\mathfrak{k}}$-trennscharfen Konfidenzbereiche

$$W_{\bar{\mathfrak{y}}} := \left\{\alpha : \left(\bar{\mathfrak{y}} + \frac{1}{n} Q^{-1}\mathfrak{k} - \alpha\right)' Q \left(\bar{\mathfrak{y}} + \frac{1}{n} Q^{-1}\mathfrak{k} - \alpha\right) \leqq C_4\right\},$$

da $\bar{\mathfrak{y}}$- m-dimensional normalverteilt mit dem Mittelwertsvektor $\alpha \in R^m$ und der Kovarianzmatrix $(n\,Q)^{-1}$ ist. Im Fall $\mathfrak{k} = 0$ sind V und W nach Satz (3.19) unverfälscht.

3. Beispiel. In der n-maligen unabhängigen Wiederholung einer Γ-Verteilung mit dem Parameterwert $\sigma > 0$ sei

$$f(\mathfrak{y}; \sigma) := \Gamma^{-n}(p)\,\sigma^{-np} \prod_{i=1}^{n} y_i^{p-1} \exp\left(-\frac{n\,\bar{y}}{\sigma}\right) \quad \text{für} \quad y_i > 0$$

und $f(\mathfrak{y}; \sigma) = 0$ sonst. Dabei sei $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$ und $p > 0$ eine bekannte Konstante (oft eine natürliche Zahl). Wir bilden den Parameterraum $T := \{\sigma : \sigma > 0\}$ auf die Gruppe aller Transformationen $\mathfrak{y} \to \sigma\mathfrak{y}$ ab. Dann werden für $a \in R^1$ durch

$$\varphi_a(B) := \int_B \sigma^{a-1}\,d\sigma, \quad B \subset T,$$

invariante Vorbewertungen $\varphi_a|\mathfrak{B}$ mit $\Delta_a(\sigma) = \sigma^a$ definiert. Die φ_a sind alle semiinvarianten Vorbewertungen, da φ_a für $a = 0$ das Haarsche Maß der Gruppe ist und die Δ_a, $a \in R^1$, alle stetigen Homomorphien der Gruppe auf R_+ sind.

Wir prüfen nun nach, für welche $a \in R^1$ Voraussetzung I erfüllt ist und berechnen gegebenenfalls $g(\mathfrak{y})$:

$$\begin{aligned}\Gamma^{(n)}(p) \int_{\sigma>0} f(\mathfrak{y}; \sigma)\,\varphi_a(d\sigma) &= \int_{\sigma>0} \sigma^{a-1-np} \prod_{i=1}^{n} y_i^{p-1} \exp\left(-\frac{n\,\bar{y}}{\sigma}\right) d\sigma \\ &= C_1\,\bar{y}^{a-np} \prod_{i=1}^{n} y_i^{p-1}.\end{aligned}$$

Dabei ist C_1 dann und nur dann endlich, wenn $a < np$ ist. Also ist nach Satz (2.6) Voraussetzung I genau dann erfüllt, wenn $a < np$. Aus demselben Satz und (3.6) folgt

$$g(\mathfrak{y}) = C_2\,\bar{y}^{np-a} \exp(-n\bar{y}). \tag{4.4}$$

Eine einfache Rechnung ergibt, daß für

$$C_3 \leqq \left(p - \frac{a}{n}\right)\left[\log\left(p - \frac{a}{n}\right) - 1\right] \quad \text{durch} \quad V_{\bar{y}} := \left\{\sigma : \left(p - \frac{a}{n}\right) \log\left(\frac{\bar{y}}{\sigma}\right) - \frac{\bar{y}}{\sigma} \geqq C_3\right\}$$

die Konfidenzbereiche eines invarianten Konfidenzverfahrens V definiert werden. Aus (4.4) und Definition (3.14) folgt $V \in \mathfrak{G}_\beta$ für ein geeignetes C_3. Aus Satz (3.15) bzw. Satz (2.11) erhalten wir, daß V φ_a-trennscharf bezüglich $\mathfrak{F}_\beta$ bzw. $\mathfrak{V}_\beta$ ist. V ist im Fall $a = 0$ nach Satz (3.19) unverfälscht.

Die drei angeführten Beispiele sind gleichzeitig Beispiele für die Existenz subjektivtrennscharfer Konfidenzverfahren bei Nichtexistenz trennscharfer Verfahren, wie in § 1 angekündigt. Denn die Vorbewertungen φ_a bzw. $\varphi_{\mathfrak{k}}$ erfüllen die Voraussetzungen 2. von Satz (1.9) und die φ_a- bzw. $\varphi_{\mathfrak{k}}$-trennscharfen Konfidenzverfahren sind μ-fast eindeutig bestimmt und hängen von dem Parameter a bzw. $\mathfrak{k}$ der Vorbewertung tatsächlich ab. Dies ist aber nach Satz (1.9) nur möglich, wenn kein trennscharfes Verfahren existiert.

Zum Schluß möchte ich noch den Herren Dr. D. Bierlein, Prof. Dr. J. Neyman und Prof. Dr. H. Richter für wertvolle Anregungen und Literaturhinweise herzlich danken.

Literatur [1]

[1] Halmos, P. R.: The range of a vector measure. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 416—421 (1948).
[2] Halmos, P. R.: Measure Theory. New York: Van Nostrand 1950.
[3] Jeffreys, H.: The Theory of Probability, 2. Aufl. Oxford: Cambridge Univ. Press 1948.
[4] Lehmann, E. L.: Testing Statistical Hypotheses, in: Wiley Publications in Statistics, New York, Wiley: 1959.
[5] Ljapunoff, A.: Sur les fonctions-vecteurs complément additives. Bull. Acad. Sci. URSS Sér. Math. **4**, 465—478 (1940).
[6] Neyman, J.: Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **236**, 333—380 (1937).
[7] Neyman, J.: L'estimation statistique traitée comme un problème classique de probabilité. Actualités scientifiques et industrielles. **739**, 26—57 (1938).
[8] Richter, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie, in: Grundlehren der math. Wissenschaften, 86. Band. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1956.
[9] Richter, H.: Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie, Teil V. Math. Ann. **128**, 305—339 (1954).
[10] Schmetterer, L.: Einführung in die mathematische Statistik. Wien: Springer 1956.
[11] Wallace, D. L.: Conditional confidence level properties. Ann. math. Stat. **30**, 864—876 (1959).

Seminar für Wirtschafts- und Sozialstatistik
an der Universität zu Köln, 5 Köln-Lindenthal, Albertus-Magnus-Platz 1

(Eingegangen am 16. April 1961)

---

[1] Während der Drucklegung erschien: Pratt, J. W.: Length of confidence intervals. J. Amer. statist. Assoc. **56**, 549—567 (1961).