Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 1, 28—46 (1962)

Über die Fortsetzung von Wahrscheinlichkeitsfeldern

Von

DIETRICH BIERLEIN

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 28
Bezeichnungen 30
§ 1. Über die Existenz und die Eindeutigkeit von Fortsetzungen 31
a) Die Frage der Eindeutigkeit 31
b) Schranken für die Fortsetzbarkeit 32
§ 2. Fortsetzung bei Adjunktion von abzählbar vielen disjunkten Mengen 34
§ 3. Kriterien für die Existenz einer Fortsetzung, die eine gegebene Funktion $f|M$ meßbar macht 37
a) Zusammenhang zwischen Graph und Meßbarkeit einer Funktion 38
b) Kriterien für die σ-Additivität eines Inhaltes auf $\mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$ 39
c) Kriterien für die Bedingung $\mu^*(X(f)) = 1$ 43
Literatur 46

Einleitung

Die Problemstellung dieser Arbeit ergibt sich aus den Schwierigkeiten, die in der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihren Anwendungsgebieten auftreten, wenn das zur Verfügung stehende Wahrscheinlichkeitsfeld zu grob ist, um die Meßbarkeit bestimmter Mengen und Funktionen folgern zu können. Bevor wir diese Problemstellung eingehender erläutern, wollen wir den Begriff der Fortsetzung eines Wahrscheinlichkeitsfeldes (kurz: WFeld) erklären und gegen benachbarte Begriffe abgrenzen.

Unter einem WFeld $(M, \mathfrak{K}, p)$ versteht man bekanntlich die symbolische Zusammenfassung einer Grundmenge M, eines σ-Körpers $\mathfrak{K}$ von Teilmengen von M und eines auf $\mathfrak{K}$ definierten normierten (σ-additiven) Maßes (Wahrscheinlichkeitsmaß, kurz: WMaß) p. Ein WFeld $(M, \mathfrak{K}_1, p_1)$ wird in dieser Arbeit eine „Fortsetzung" von $(M, \mathfrak{K}, p)$ genannt, wenn die Bedingungen $\mathfrak{K}_1 \supset \mathfrak{K}$ und $p_1 | \mathfrak{K} = p | \mathfrak{K}$ erfüllt sind*. Ebenso wird das Maß $p_1 | \mathfrak{K}_1$ unter diesen Bedingungen als eine Fortsetzung des Maßes $p | \mathfrak{K}$ bezeichnet. Die Fortsetzung ist zu unterscheiden von der „Erweiterung" eines Mengenkörpers zum σ-Körper und eines σ-additiven Inhaltes zum Maß. Während die Erweiterung stets und eindeutig existiert, handelt es sich bei der Frage nach der Existenz einer Fortsetzung um eine Verallgemeinerung des Lebesgueschen Maßproblems, das sich interpretieren läßt als die Frage, ob das WFeld $(M, \mathfrak{K}, p) = (E, \mathfrak{L}, l)$, wobei E das Intervall $[0,1]$ und $l | \mathfrak{L}$ das Lebesguemaß bedeuten, eine bewegungsinvariante Fortsetzung p_1 auf $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{P}(E)$, dem σ-Körper aller Teilmengen von E, besitzt. Bekanntlich läßt sich mit Hilfe des Auswahlaxioms das Intervall E in abzählbar viele disjunkte, mod 1 kongruente

* Ist $(M, \mathfrak{K}_1, p_1)$ eine Fortsetzung von $(M, \mathfrak{K}, p)$, so ist $(M, \mathfrak{K}, p)$ eine „Vergröberung" von $(M, \mathfrak{K}_1, p_1)$ im Sinn von [8], S. 150, und umgekehrt.

Mengen $A_1, A_2, \ldots$ aufspalten mit der Folge, daß auf einem σ-Körper $\mathfrak{K}_1$, der die A_ν enthält, kein normiertes Maß die Zusatzbedingung der Bewegungsinvarianz erfüllt. Ohne diese Zusatzbedingung existiert jedoch, wie aus den Ergebnissen von § 2 folgen wird, eine (nicht eindeutige) Fortsetzung des l-Maßes, welche diese nicht l-meßbaren Mengen meßbar macht. Ein Spezialfall einer Fortsetzung ist die „Vervollständigung" eines Maßes $p \mid \mathfrak{K}$; es handelt sich dabei um die Fortsetzung von $p \mid \mathfrak{K}$ auf den σ-Körper $\tilde{\mathfrak{K}}$, der aus $\mathfrak{K}$ durch Hinzunahme aller Teilmengen von p-Nullmengen entsteht.

Beispiele, in denen eine Fortsetzung bzw. die Fortsetzbarkeit eines WFeldes interessieren, begegnen vor allem in der Theorie der stochastischen Prozesse. Es handelt sich dabei meist um eine Situation, bei der aus den gegebenen Daten ein WFeld abgeleitet wird, das die Meßbarkeit von Mengen oder Funktionen, die man zu untersuchen hat, noch nicht gewährleistet. In der Theorie der Spiele mit unendlich vielen reinen Strategien tritt bei der Bestimmung der Gesamtheit der als gemischte Strategien zugelassenen WMaße die Frage auf, wie sich die Wahl des als Definitionsbereich für diese Maße zugrunde gelegten σ-Körpers, bei der ja die Meßbarkeit der Auszahlungsfunktion im Auge behalten werden muß, auf die Menge der zugelassenen Maße auswirkt; genauer: ob sich alle auf einem kleineren (d. h. gröberen) σ-Körper $\mathfrak{K}$ existierenden Maße auch noch auf einen bestimmten größeren σ-Körper $\mathfrak{K}_1$ fortsetzen lassen oder ob bei dem Übergang von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{K}_1$ Maße in diesem Sinne verloren gehen*.

In der Literatur ist der Spezialfall von Fortsetzungen behandelt, bei dem $\mathfrak{K}_1$ aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion von endlich vielen Teilmengen von M erzeugt wird [*5*, *6* u. a.]. In diesem Fall ist die Fortsetzung eines beliebigen WMaßes $p \mid \mathfrak{K}$ nach $\mathfrak{K}_1$ stets möglich. Die Klasse der dort angegebenen Fortsetzungen ist jedoch selbst im Fall der Adjunktion von nur einer Menge — von Spezialfällen abgesehen — nicht die Gesamtheit aller möglichen Fortsetzungen [*6*]. Auf der anderen Seite wurde unter schwachen mengentheoretischen Hypothesen gezeigt, daß sich nicht jedes WFeld beliebig weit fortsetzen läßt [*2*, *9*]; zum Beispiel lassen sich auf den σ-Körper aller Teilmengen des R^1 nur die diskreten Maße fortsetzen.

§ 1 dieser Arbeit dient der Klärung der allgemeinen Situation. Zur Abrundung des Bildes wird die Eindeutigkeit von Fortsetzungen untersucht. Dabei zeigt sich, daß Fortsetzungen im allgemeinen nur eindeutig sind, soweit sie nicht über den Bereich der Vervollständigung hinausgehen (Satz 1A). Die Frage nach der Existenz einer Fortsetzung bei Adjunktion von abzählbar vielen beliebigen Teilmengen von M und die damit äquivalente Frage nach der Existenz einer Fortsetzung, die eine beliebig gegebene reelle Funktion $f \mid M$ meßbar macht, wird durch Satz 1C geklärt: Bereits jede Menge M von der Mächtigkeit $\aleph_1$ besitzt ein abzählbares System von Teilmengen, bei dessen Adjunktion sich nur rein diskrete Maße fortsetzen lassen. Es ist also auch nicht allgemein möglich, eine beliebige Funktion $f \mid M$ durch geeignete Fortsetzung des WFeldes meßbar zu machen. Handelt es sich jedoch um abzählbar viele disjunkte Teilmengen, so ist eine Fortsetzung stets möglich (Satz 2B). Die Gesamtheit aller Fortsetzungen bei Adjunktionen von abzählbar vielen disjunkten Mengen wird in Satz 2A angegeben.

* Vgl. [*4*], dazu die in [7], S. 356f., und [*10*], S. 48, erwähnten Schwierigkeiten.

Mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen eine gegebene Funktion durch eine geeignete Fortsetzung des WFeldes meßbar gemacht werden kann, befaßt sich § 3. Ausgangspunkt der Untersuchung ist Satz 3A, wonach $(M, \mathfrak{K}, p)$ eine Fortsetzung, die $f \mid M$ meßbar macht, genau dann besitzt, wenn ein Maß $\mu \mid {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$* existiert, das $p \mid \mathfrak{K}$ als Marginalmaß besitzt und dem Graphen $X(f)$ der Funktion das äußere Maß 1 zuordnet. In § 3b) und c) werden für die Konstruktion eines solchen Maßes μ nützliche Kriterien bereitgestellt. Danach genügt für die σ-Additivität eines Inhaltes $m \mid \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$ der Nachweis, daß der Marginalinhalt von m auf dem Körper $\mathfrak{G}_0$ der endlichen Summen „dyadischer" Intervalle σ-additiv ist (Satz 3C'). Für die Erfüllbarkeit der Bedingung $\mu^*(X(f)) = 1$ ist hinreichend, daß eine Menge $B_0 \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ existiert, die den Graphen $X(f)$ in einem bestimmten Sinne „$\mathscr{A}$" approximiert und auf der sich das Maß $\mu = 1$ konzentrieren läßt (Satz 3D). Um eine Funktion $f \mid M$, deren Graph durch eine Menge B_0 $\mathscr{A}$-approximiert wird, durch eine Fortsetzung von $(M, \mathfrak{K}, p)$ meßbar zu machen, genügt es also, ein Maß $\mu \mid {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ mit $\mu(B_0) = 1$ und mit $p \mid \mathfrak{K}$ als Marginalmaß zu konstruieren. Eine solche Konstruktion läßt sich beispielsweise — wie in einer späteren Arbeit im einzelnen dargelegt werden wird — ausführen, wenn sich B_0 in der Form $\sum\limits_r^{\cdot} \prod\limits_s^{\cdot} \sum\limits_t^{\cdot} (K_{rst}, I_{rst})$ schreiben läßt mit K_{rst} aus $\mathfrak{K}$ und offenen Intervallen I_{rst}.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, Herrn Professor Dr. H. RICHTER für zahlreiche wertvolle Anregungen und Ratschläge meinen verbindlichsten Dank zum Ausdruck zu bringen.

Bezeichnungen

Die in dieser Arbeit verwendeten Begriffe und Symbole lehnen sich eng an die Terminologie von [*1*] und [*8*] an.

Der „definierende Doppelpunkt" wird im Zusammenhang „$:=$" verwendet. $\dot{+}$ und $\sum^{\cdot}$ bezeichnen die Vereinigung, $\cdot$ und $\prod^{\cdot}$ den Durchschnitt, $\underset{\cdot}{+}$ den Unterschied von Mengen.

Durch $A_1 + A_2 = B$ (bzw. $\sum\limits_\nu A_\nu = B$) werden die beiden Aussagen

1. $A_1 \dot{+} A_2 = B$ (bzw. $\sum\limits_\nu^{\cdot} A_\nu = B$), 2. die A_ν sind paarweise fremd,

durch $A - B = C$ die beiden Aussagen

1. $A \underset{\cdot}{+} B = C$, 2. $A \supset B$

zusammengefaßt. $\bar{A}$ bedeutet das Komplement von A, 0 die leere Menge, $\{x:\ldots\}$ die Menge aller x mit ..., (A, B) das kartesische Produkt von A und B. N und R bezeichnen die Mengen der natürlichen bzw. der reellen Zahlen, E das Intervall $[0,1]$.

$\mathfrak{P}(M)$ ist das System aller Teilmengen, $\mathfrak{B}(M)$ der σ-Körper der Borelschen Teilmengen der Menge M. Für $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{P}(M)$ ist ${}^K\mathfrak{L}$ (bzw. ${}^B\mathfrak{L}$) der kleinste $\mathfrak{L}$ umfassende Mengenkörper (bzw. σ-Körper). Für $\mathfrak{L}_\nu \subset \mathfrak{P}(M_\nu)$ ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) := \{(L_1, L_2) : L_\nu \in \mathfrak{L}_\nu\}$, das System der „Rechtecke" (L_1, L_2) mit „Seiten" aus $\mathfrak{L}_1$ bzw. $\mathfrak{L}_2$. Für $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{P}(M)$ ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{L}) := \{(L, E) : L \in \mathfrak{L}\}$, das System der Zylindermengen mit Basis aus $\mathfrak{L}$ und der „Höhe" E.

Für $A \subset (M, M')$ und $x \in M$ ist $A/_x := \{y \in M' : (x, y) \in A\}$, die Schnittmenge von A bei x.

---

* $\mathfrak{B}$ ist dabei der σ-Körper der Borelschen Teilmengen des Wertebereichs von f.

Ist $\mathfrak{G}$ ein Körper, so heißt eine Menge der Gestalt $\sum_t^{\cdot} G_t$ (bzw. $\overline{\sum_t^{\cdot} G_t}$, $\prod_s^{\cdot} \sum_t^{\cdot} G_{st}$, $\sum_r^{\cdot} \prod_s^{\cdot} \sum_t^{\cdot} G_{rst}$) mit $G_{.} \in \mathfrak{G}$ ein S (bzw. $\bar{S}, S_\delta, S_{\delta\sigma}$) zu $\mathfrak{G}$.

Ist $f \mid M$ eine reelle Funktion, so ist

$$\mathfrak{K}_f := {}^B\{\{x \in M : f(x) \leqq y\} : y \in \mathsf{R}\} \quad \text{und} \quad X(f) := \{(x, f(x)) : x \in M\}.$$

$\chi_A(x)$ ist die charakteristische Funktion der Menge A, also 1 für $x \in A$ und 0 sonst.

Ein Inhalt ist eine nichtnegative additive Mengenfunktion auf einem Mengenkörper, ein Maß ein σ-additiver Inhalt auf einem σ-Körper. Für Maße $p_\nu \mid \mathfrak{K}_\nu$ bezeichnet $p_1 \times p_2$ das auf ${}^B(\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2)$ definierte Produktmaß; $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$ ist dabei der Körper ${}^K\{(K_1, K_2) : K_\nu \in \mathfrak{K}_\nu\}$.

Das Ende eines Beweises wird durch das Zeichen $\lrcorner$ markiert

§ 1. Über die Existenz und die Eindeutigkeit von Fortsetzungen

Die Frage nach der Existenz einer Fortsetzung von $(M, \mathfrak{K}, p)$ ist bereits für den Fall, daß zu $\mathfrak{K}$ endlich viele Mengen adjungiert werden sollen, positiv [*5, 6* u. a.], für den Fall der Fortsetzung auf den σ-Körper aller Teilmengen von M für nicht diskretes Maß p unter schwachen Einschränkungen negativ entschieden [*9*]. Von Interesse ist nun, wo die Existenz von Fortsetzungen verloren geht, welche Systeme von Teilmengen von M sich nicht mehr stets adjungieren lassen, ohne die Fortsetzbarkeit zu zerstören. Diese Frage wird Gegenstand des Abschnittes b) sein. Zuvor behandeln wir die damit verwandte Frage, inwieweit sich $(M, \mathfrak{K}, p)$ in eindeutiger Weise fortsetzen läßt.

a) Die Frage der Eindeutigkeit

Aus der Definition der zum WFeld $(M, \mathfrak{K}, p)$ gehörigen inneren und äußeren Maße

$$p_*(L) := \sup_{L \supset K \in \mathfrak{K}} p(K) \quad \text{und} \quad p^*(L) := \inf_{L \subset K \in \mathfrak{K}} p(K) \quad \text{für} \quad L \subset M$$

ergeben sich fast unmittelbar die beiden folgenden einfachen Hilfssätze:

Hilfssatz 1.1. *Ist $(M, \mathfrak{K}, p)$ ein WFeld und A eine Teilmenge von M, so werden durch $p'(K) := p_*(AK)$ und $p''(K) := p^*(AK)$ zwei Maße auf $\mathfrak{K}$ definiert.*

Beweis: Zu A existiert ein $K_* \in \mathfrak{K}$ mit den Eigenschaften $K_* \subset A$ und $p(K_*) = p_*(A)$. Dann ist auch $p_*(AK) = p(K_* K)$ für $K \in \mathfrak{K}$, woraus die σ-Additivität von $p' \mid \mathfrak{K}$ folgt. Analog für $p'' \mid \mathfrak{K}$. $\lrcorner$

Hilfssatz 1.2. *Ist $p_1 \mid \mathfrak{K}_1$ eine Fortsetzung von $p \mid \mathfrak{K}$, so gilt*

$$p_*(A) \leqq p_1(A) \leqq p^*(A).$$

Beweis: Für $K_1 \subset A \subset K_2$ mit $K_\nu \in \mathfrak{K}$ gilt

$$p(K_1) = p_1(K_1) \leqq p_1(A) \leqq p_1(K_2) = p(K_2);$$

daraus folgt die Behauptung. $\lrcorner$

$\tilde{p} \mid \tilde{\mathfrak{K}}$ sei die Vervollständigung von $p \mid \mathfrak{K}$, also $\tilde{\mathfrak{K}} = \{L : p_*(L) = p^*(L)\}$ und $\tilde{p}(L) = p_*(L)$ für $L \in \tilde{\mathfrak{K}}$. Innerhalb von $\tilde{\mathfrak{K}}$ besitzt $p \mid \mathfrak{K}$ nur eine Fortsetzung, nämlich $\tilde{p}$. Bei einer Fortsetzung, die über den Bereich der Vervollständigung hinaus geht, ist im allgemeinen mit einer Eindeutigkeit nicht mehr zu rechnen:

Satz 1A. *Ist* $(M, \mathfrak{K}, p)$ *ein WFeld und* $\tilde{p} \mid \tilde{\mathfrak{K}}$ *die Vervollständigung von* $p \mid \mathfrak{K}$, *dann gilt:*

a) *Auf* $\mathfrak{K}_1$ *mit* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_1 \subset \tilde{\mathfrak{K}}$ *ist* $\tilde{p}$ *die einzige Fortsetzung von* $p \mid \mathfrak{K}$.

b) *Zu jedem* $A \in \mathfrak{P}(M) - \tilde{\mathfrak{K}}$ *existieren mindestens zwei verschiedene Fortsetzungen von* $p \mid \mathfrak{K}$ *nach* $\mathfrak{K}_1 = {}^B(\mathfrak{K} \dot{+} \{A\})$.

Beweis zu a): Es sei $A \in \mathfrak{K}_1$ und $p_1 \mid \mathfrak{K}_1$ irgendeine Fortsetzung von $p \mid \mathfrak{K}$. Wegen $\mathfrak{K}_1 \subset \tilde{\mathfrak{K}}$ folgt aus Hilfssatz 1.2 dann $p_1(A) = p_*(A) = \tilde{p}(A)$.

Beweis zu b): Auf $\mathfrak{K}_1 = \{AK_1 + \bar{A}K_2 : K_\nu \in \mathfrak{K}\}$ definieren wir

$$p_1'(AK_1 + \bar{A}K_2) := p_*(AK_1) + p^*(\bar{A}K_2) \quad \text{und}$$
$$p_1''(AK_1 + \bar{A}K_2) := p^*(AK_1) + p_*(\bar{A}K_2).$$

Wegen Hilfssatz 1.1 sind p_1' und p_1'' Maße, und zwar Fortsetzungen von $p \mid \mathfrak{K}$, da $p_*(AK) + p^*(\bar{A}K) = p(K)$. Wegen $A \in \mathfrak{P}(M) - \tilde{\mathfrak{K}}$ ist

$$p_1'(A) = p_*(A) < p^*(A) = p_1''(A). \quad \lrcorner$$

b) Schranken für die Fortsetzbarkeit

Nachdem bereits bekannt ist, daß jedes WFeld eine Fortsetzung für die Adjunktion von endlich vielen Mengen besitzt, soll nun der Fall der Adjunktion von abzählbar vielen Mengen untersucht werden. Dieser Fall ist äquivalent mit dem der Adjunktion des durch eine Funktion $f \mid M$ erzeugten σ-Körpers

$$\mathfrak{K}_f := {}^B\{\{x \in M : f(x) \leqq y\} : y \in \mathsf{R}^1\};$$

denn es gilt:

Satz 1B. a) *Zu jedem abzählbaren System* $\mathfrak{A}$ *von Teilmengen von* M *existiert eine Funktion* $f \mid M$ *derart, daß* $\mathfrak{K}_f = {}^B\mathfrak{A}$.

b) *Zu jeder Funktion* $f \mid M$ *existiert ein abzählbares System* $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(M)$ *mit* ${}^B\mathfrak{A} = \mathfrak{K}_f$.

Beweis: Teil b) ist klar (man wähle z. B. $\mathfrak{A} := \{\{x : f(x) \leqq r\} : r \text{ rat.}\}$), zu zeigen bleibt a):

Es sei $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ und $\chi_\nu(x)$ die charakteristische Funktion von A_ν (also $\chi_\nu(x) = 1$ für $x \in A_\nu$ und 0 sonst).

Die Menge $\{0, 1\}^{\mathsf{N}}$ wird durch

$$g(\mathfrak{y}) := 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu \cdot 3^{-\nu} \quad \text{für} \quad \mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots)$$

eineindeutig auf das Cantorsche Diskontinuum abgebildet. Wir wollen nun zeigen, daß $f(x) := g(\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots)$ eine Funktion mit $\mathfrak{K}_f = {}^B\mathfrak{A}$ ist.

Die Mengen $\{x : f(x) < 0\}$ und $\{x : f(x) > 1\}$ sind leer, und für $n \in \mathsf{N}$ gilt

$$\{x : 0 \leqq f(x) - 2\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \cdot 3^{-\nu} \leqq 3^{-(n+1)}\} = \left\{x : \chi_\nu(x) = \begin{matrix} y_\nu & \text{für } \nu \leqq n \\ 0 & \text{für } \nu = n+1 \end{matrix}\right\} \in {}^B\mathfrak{A},$$

$$\{x : 3^{-(n+1)} < f(x) - 2\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \cdot 3^{-\nu} < 2 \cdot 3^{-(n+1)}\} = 0,$$

$$\{x : 2 \cdot 3^{-(n+1)} \leqq f(x) - 2 \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \cdot 3^{-\nu} \leqq 3^{-n}\} = \left\{x : \chi_\nu(x) = \begin{matrix} y_\nu & \text{für } \nu \leqq n \\ 1 & \text{für } \nu = n+1 \end{matrix}\right\} \in {}^B\mathfrak{A}.$$

Daraus ergibt sich $\{x : f(x) \leqq y\} \in {}^B\mathfrak{A}$ für jedes $y \in \mathsf{R}^1$ und damit

(1) $$\mathfrak{K}_f \subset {}^B\mathfrak{A}.$$

Die endliche Intervallsumme

$$B_k := \sum_{\varkappa=1}^{3^{k-1}} [\varkappa \cdot 3^{-(k-1)} - 3^{-k}, \varkappa \cdot 3^{-(k-1)}]$$

besitzt als Urbild A_k; denn

$$\{x : f(x) \in B_k\} = \{x : \chi_k(x) = 1\} = A_k.$$

Also ist $A_k \in \mathfrak{K}_f$ und

(2) $${}^B\mathfrak{A} \subset \mathfrak{K}_f.$$

Wegen (1) und (2) erfüllt $f|M$ also $\mathfrak{K}_f = {}^B\mathfrak{A}$. $\lrcorner$

Das Problem, ein WFeld so fortzusetzen, daß ein bestimmtes System von abzählbar vielen Teilmengen von M in den Definitionsbereich des Maßes einbezogen wird bzw. daß eine bestimmte Funktion $f|M$ meßbar wird, ist nicht allgemein lösbar:

Satz 1 C. *Ist* $(M, \mathfrak{K}, p)$ *ein WFeld* mit $\aleph(M) = \aleph_1$* *und nicht rein diskretem Maß* p*, so existiert eine Funktion* $f|M$*, die sich durch keine Fortsetzung von* $(M, \mathfrak{K}, p)$ *meßbar machen läßt***.

Wegen Satz 1 B folgt der Beweis aus

Satz 1 C'. *Zu jeder Menge* M *von der Mächtigkeit* $\aleph_1$* *existiert ein System* $\mathfrak{A}$ *von abzählbar vielen Teilmengen von* M *derart, daß jedes auf* $\mathfrak{K}_1 \supset {}^B\mathfrak{A}$ *definierte WMaß rein diskret ist.*

Beweis: Unter Ausnutzung der Voraussetzung $\aleph(M) = \aleph_1$ werden wir nach dem Vorbild von Ulam in [*9*], S. 143, eine Matrix von $\aleph_1$ mal $\aleph_0$ Teilmengen von M bilden, die dem Definitionsbereich eines WMaßes gemeinsam nur dann angehören können, wenn das Maß rein diskret ist. Schließlich werden wir ein abzählbares System $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(M)$ konstruieren derart, daß die Mengen dieser Matrix in ${}^B\mathfrak{A}$ enthalten sind. Nun der Beweis im einzelnen:

1. Wegen $\aleph(M) = \aleph_1$ läßt sich M als transfinite Reihe $x_1, x_2, \ldots x_\sigma, \ldots$ mit $\sigma < \Omega$ schreiben. Für $\tau < \sigma$ definieren wir die Abbildung

$$\varphi_\tau(x_\sigma) := n_\tau^\sigma \in \mathsf{N} \quad \text{mit (*)} \quad n_{\tau_1}^\sigma \neq n_{\tau_2}^\sigma \quad \text{für} \quad \tau_1 \neq \tau_2;$$

die Zusatzbedingung (*) läßt sich erfüllen, da $\aleph(\sigma) \leqq \aleph_0$ für $\sigma < \Omega$ ist. Weiter bilden wir die Mengen

$$A_\tau^n := \{x_\sigma : \sigma > \tau, n_\tau^\sigma = n\} \quad \text{für} \quad n \in \mathsf{N}, \quad 0 < \tau < \Omega,$$

$$A_0^n := M - \sum_\tau{}^{\cdot} A_\tau^n \quad \text{für} \quad n \in \mathsf{N}.$$

* Die Bedingung $\aleph(M) = \aleph_1$ läßt sich abschwächen zu der Ulamschen Einschränkung, daß es keine (Kuratowskische) unerreichbare Kardinalzahl $\aleph_\xi$ gibt mit $\aleph_0 < \aleph_\xi \leqq \aleph(M)$, wie man analog der in [*9*], S. 143–145, verwendeten Schlußweise erkennt.

** Ist p diskret, so ist jede Funktion $f|M$ meßbar bzgl. der Vervollständigung $\tilde{p}|\mathfrak{P}(M)$.

Dann gilt

(1) $$A^n_{\tau_1} \cdot A^n_{\tau_2} = 0 \quad \text{für} \quad \tau_1 \neq \tau_2 \quad (\text{wegen } (*)),$$

(2) $$A^{n_1}_\tau \cdot A^{n_2}_\tau = 0 \quad \text{für} \quad n_1 \neq n_2, \quad \tau \neq 0,$$

(3) $$\sum_n A^n_\tau = \{x_\sigma : \sigma > \tau\} = M - \{x_\sigma : \sigma \leqq \tau\} \quad \text{für} \quad 0 \neq \tau < \Omega,$$

dabei enthält $\{x_\sigma : \sigma \leqq \tau\} = : A_\tau$ nur abzählbar viele Punkte.

2. Jedes WMaß $p_1 | \mathfrak{K}_1$ mit $\mathfrak{K}_1 \supset \{A^n_\tau : n \in \mathsf{N}, \tau < \Omega\}$ erfüllt wegen (2) und (3)

$$\sum_n p_1(A^n_\tau) + p_1(A_\tau) = 1 \quad \text{für} \quad 0 \neq \tau < \Omega.$$

Unter der Annahme, daß p_1 nicht rein diskret ist, gilt

$$\sum_n p_1(A^n_\tau) > 0 \quad \text{für} \quad \text{jedes} \quad \tau \neq 0,$$

also $p_1(A^{n(\tau)}_\tau) > 0$ für mindestens ein $n = n(\tau)$ zu jedem $\tau \neq 0$. Dann existiert aber mindestens ein n^*, für das $\{\tau : n(\tau) = n^*\}$ überabzählbar ist. Das bedeutet, daß unter den nach (1) disjunkten Mengen $A^{n^*}_\tau$, $\tau < \Omega$, überabzählbar viele mit positivem Maß auftreten — im Widerspruch zu $p_1(M) = 1$.

3. y_τ sei eine injektive Abbildung von $\{\tau : 0 \leqq \tau < \Omega\}$ in $E = [0, 1]$, also $y_{\tau_1} \neq y_{\tau_2}$ für $\tau_1 \neq \tau_2$. Wegen (1) läßt sich für jedes $n \in \mathsf{N}$ eine Funktion $f_n | M$ erklären durch

$$f_n(x) := y_\tau \quad \text{für} \quad x \in A^n_\tau, \quad 0 \leqq \tau < \Omega.$$

Nun ist

$$A^n_\tau = \{x : f_n(x) = y_\tau\} \in \mathfrak{K}_{f_n};$$

wir gewinnen also mit

$$\mathfrak{A} := \sum_n{}^{\cdot} \{\{x : f_n(x) \leqq r\} : r \text{ rational}\}$$

ein abzählbares System von Teilmengen von M mit der Eigenschaft

$${}^B\mathfrak{A} \supset \sum_n{}^{\cdot} \mathfrak{K}_{f_n} \supset \{A^n_\tau : n \in \mathsf{N}, \tau < \Omega\}.$$

Nach Teil 2 existiert auf ${}^B\mathfrak{A}$ kein nicht rein diskretes WMaß. ⌋

Nun erhebt sich die Frage, ob nicht in wichtigen Spezialfällen eine Fortsetzung bei Adjunktion von abzählbar vielen Mengen bzw. bei Adjunktion von $\mathfrak{K}_f$ doch existiert. Zunächst — in § 2 — wird der Fall von abzählbar vielen disjunkten Mengen betrachtet, hier ist eine Fortsetzung tatsächlich stets möglich. Später werden wir uns mit Bedingungen beschäftigen, unter denen sich eine Funktion meßbar machen läßt.

§ 2. Fortsetzung bei Adjunktion von abzählbar vielen disjunkten Mengen

Als gegeben betrachten wir ein WFeld $(M, \mathfrak{K}, p)$ und abzählbar viele Mengen $A_1, A_2, \ldots$, die M disjunkt zerlegen: $\sum_\nu A_\nu = M$. Werden diese Mengen zu $\mathfrak{K}$ adjungiert, so gelangt man zum σ-Körper

$$\mathfrak{K}_1 := {}^B(\mathfrak{K} \dotplus \{A_1, A_2, \ldots\}) = \{\sum_\nu A_\nu K_\nu : K_\nu \in \mathfrak{K}\}.$$

Besitzt nun $p \mid \mathfrak{K}$ eine Fortsetzung $p_1 \mid \mathfrak{K}_1$? Wir wollen die Existenz nachweisen und die Gesamtheit aller derartigen Fortsetzungen explizit angeben. Hilfsmittel dafür werden in dem folgenden Hilfssatz bereitgestellt:

Hilfssatz 2.1. *$(M, \mathfrak{K}, p)$ sei ein WFeld. Zu jedem $L \subset M$ existieren dann Funktionen* $_*d_L \mid M$ und $^*d_L \mid M$ *mit den Eigenschaften*

a) *$_*d_L \mid M$ und $^*d_L \mid M$ sind $\mathfrak{K}$-meßbar,*

b) $\int\limits_K {}^{(*)}_{\;*}d_L(x)\, dp = p^{(*)}_{*}(LK)$ für $K \in \mathfrak{K}$,

c) *$_*d_L(x)$, $^*d_L(x)$ und $\delta_L(x) := {}^*d_L(x) - {}_*d_L(x)$ nehmen nur die Werte 0 und 1 an,*

d) *sind $L_1, L_2, \ldots$ disjunkt, so nimmt $\sum\limits_\nu {}_*d_{L_\nu}(x)$ nur die Werte 0 und 1 an,*

e) *ist $\sum\limits_\nu{}' L_\nu = M$, so nimmt $\sum\limits_\nu {}^*d_{L_\nu}(x)$ nur Werte aus $\mathsf{N} + \{\infty\}$ an.*

Beweis: Zu L wählen wir zwei Mengen $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}$ mit $K_1 \subset L \subset K_2$ und $p_*(L - K_1) = p_*(K_2 - L) = 0$, analog dem Beweis zu Hilfssatz 1.1. Es ist dann $p_*(LK) = p(K_1 K)$ und $p^*(LK) = p(K_2 K)$ für $K \in \mathfrak{K}$. $_*d_L(x) := \chi_{K_1}(x)$ und $^*d_L(x) := \chi_{K_2}(x)$ erfüllen also a) bis e). $\lrcorner$

Funktionen ${}^{(*)}_{\;*}d_L(x)$ mit den Eigenschaften a) und b) können als „innere (äußere) Dichten von L an der Stelle x" charakterisiert werden, die Eigenschaft c) ist eine für unsere Zwecke allgemein sehr nützliche Normierung, d) und e) erleichtern den Existenznachweis für Fortsetzungen des in diesem Paragraphen diskutierten Types. Bemerkt sei dabei, daß $L_1 \subset L_2$ nicht allgemein (aber natürlich p-fast überall) ${}^{(*)}_{\;*}d_{L_1}(x) \leqq {}^{(*)}_{\;*}d_{L_2}(x)$ zur Folge hat. Unter Verwendung der — nach Hilfssatz 2.1 stets existierenden — normierten inneren und äußeren Dichten können wir die allgemeine Form der Fortsetzung $p_1 \mid \mathfrak{K}_1$ von $p \mid \mathfrak{K}$ angeben:

Satz 2A. *An Voraussetzungen seien erfüllt:*

I. *$(M, \mathfrak{K}, p)$ ist ein WFeld, $\sum\limits_\nu A_\nu = M$,*

II. *$_*d_\nu(x)$ und $^*d_\nu(x)$ erfüllen* a) *bis* c) *aus Hilfssatz 2.1 für*

$$L = A_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Zur Abkürzung wird gesetzt:

$$\mathfrak{K}_1 := \{\sum_\nu A_\nu K_\nu : K_\nu \in \mathfrak{K}\},$$

$$\delta_\nu(x) := {}^*d_\nu(x) - {}_*d_\nu(x) \quad \text{für} \quad \nu \in \mathsf{N},$$

$$\Lambda := \left\{ \begin{array}{ll} (\lambda_1 \mid M, \lambda_2 \mid M, \ldots) : \lambda_\nu(x)\ \mathfrak{K}\text{-meßbar}, \quad 0 \leqq \lambda_\nu(x) \leqq 1 & \text{auf } M \\ \sum\limits_\nu ({}_*d_\nu(x) + \lambda_\nu(x) \cdot \delta_\nu(x)) = 1\ p\text{-fast} & \text{auf } M \end{array} \right\},$$

$$p^{(\lambda)}(\sum_\nu A_\nu K_\nu) := \sum_\nu \int\limits_{K_\nu} ({}_*d_\nu(x) + \lambda_\nu(x) \cdot \delta_\nu(x))\, dp \text{ für } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in \Lambda.$$

Es gilt dann $\{p^{(\lambda)} \mid \mathfrak{K}_1 : \lambda \in \Lambda\} = \{p_1 \mid \mathfrak{K}_1 : p_1 \mid \mathfrak{K} = p \mid \mathfrak{K}\}$, d. h.

a) *für jedes $\lambda \in \Lambda$ ist $p^{(\lambda)} \mid \mathfrak{K}_1$ eine Fortsetzung von $p \mid \mathfrak{K}$,*

b) *ist $p_1 \mid \mathfrak{K}_1$ eine Fortsetzung von $p \mid \mathfrak{K}$, so existiert ein $\lambda \in \Lambda$, so daß*

$$p_1 \mid \mathfrak{K}_1 = p^{(\lambda)} \mid \mathfrak{K}_1.$$

Beweis zu a): 1. Zuerst ist zu zeigen, daß $p^{(\lambda)} | \mathfrak{K}_1$ eindeutig definiert ist: Für $\sum\limits_\nu A_\nu K_\nu = \sum\limits_\nu A_\nu K_\nu'$ folgt $A_\nu K_\nu = A_\nu K_\nu'$, daraus $p_*^{(*)}(A_\nu(K_\nu \dotplus K_\nu')) = 0$; also ist ${}_*d_\nu(x) = {}^*d_\nu(x) = 0$ p-fast auf $K_\nu \dotplus K_\nu'$ und folglich $p^{(\lambda)}(\sum\limits_\nu A_\nu K_\nu) = p^{(\lambda)}(\sum\limits_\nu A_\nu K_\nu')$.

2. Zum Nachweis der σ-Additivität von $p^{(\lambda)} | \mathfrak{K}_1$ gehen wir von einer Zerlegung $\sum\limits_\nu A_\nu K_\nu = \sum\limits_\mu (\sum\limits_\nu A_\nu K_{\mu\nu})$ aus. Mit $K_{m\nu}' := \sum\limits_{\mu \leq m}^{\cdot} K_{\mu\nu} - \sum\limits_{\mu < m}^{\cdot} K_{\mu\nu}$ erhält man $A_\nu K_\nu = A_\nu \sum\limits_\mu K_{\mu\nu}'$ und $A_\nu K_{\mu\nu} = A_\nu K_{\mu\nu}'$. Aus der Definition von $p^{(\lambda)}$ folgt daraus:

$$p^{(\lambda)}(\sum_\nu A_\nu K_\nu) = \sum_\nu \sum_\mu p^{(\lambda)}(A_\nu K'_{\mu\nu}) = \sum_\nu \sum_\mu p^{(\lambda)}(A_\nu K_{\mu\nu}) = \sum_\mu p^{(\lambda)}(\sum_\nu A_\nu K_{\mu\nu}).$$

Da für $\lambda \in \Lambda$ wegen Vor. II stets ${}_*d_\nu + \lambda_\nu \cdot \delta_\nu \geqq 0$ und folglich $p^{(\lambda)} | \mathfrak{K}_1 \geqq 0$ erfüllt ist, ist also $p^{(\lambda)} | \mathfrak{K}_1$ für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein Maß.

3. Zu zeigen ist noch, daß $p^{(\lambda)} | \mathfrak{K}_1$ eine Fortsetzung von $p | \mathfrak{K}$ ist: Für $\lambda \in \Lambda$ und $K \in \mathfrak{K}$ folgt $p^{(\lambda)}(K) = p^{(\lambda)}(\sum\limits_\nu A_\nu K) = \int\limits_K 1\, dp = p(K)$.

Beweis zu b): Ist $p_1 | \mathfrak{K}_1$ eine Fortsetzung von $p | \mathfrak{K}$, so gilt

(1) $\qquad p_*(A_\nu K) \leqq p_1(A_\nu K) \leqq p^*(A_\nu K)$ für $K \in \mathfrak{K}$, $\nu \in \mathsf{N}$
(nach Hilfssatz 1.2),

(2) $\qquad \sum\limits_\nu p_1(A_\nu K) = p(K)$ für $K \in \mathfrak{K}$.

Für jedes $\nu \in \mathsf{N}$ ist $p_1(A_\nu K)$ ein Maß auf $\mathfrak{K}$ mit $p_1(A_\nu K) \leqq p(K)$; also existieren nach dem Satz von Radon-Nikodym $\mathfrak{K}$-meßbare, nichtnegative Funktionen $d_\nu | M$, $\nu \in \mathsf{N}$, mit

(3) $$p_1(A_\nu K) = \int_K d_\nu(x)\, dp \quad \text{für} \quad K \in \mathfrak{K}.$$

Wegen (1) und (2) folgt

(4) $$ {}_*d_\nu \leqq d_\nu \leqq {}^*d_\nu \quad \text{und} \quad \sum_\nu d_\nu = 1 \ \ p\text{-fast überall auf } M.$$

Die Ausnahmemenge sei die p-Nullmenge N. Durch die Festsetzung

$$\lambda_\nu(x) := \begin{cases} (d_\nu - {}_*d_\nu)/\delta_\nu & \text{für} \quad x \in \overline{N}\{x : \delta_\nu(x) > 0\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erhalten wir wegen (4) ein $\lambda \in \Lambda$ mit $p^{(\lambda)} | \mathfrak{K}_1 = p_1 | \mathfrak{K}_1$. $\lrcorner$

Für die Fortsetzung bei Adjunktion einer einzelnen Menge $A \subset M$ erhält man aus Satz 2A die spezielle Aussage

Satz 2A'. *$(M, \mathfrak{K}, p)$ sei ein WFeld und $A \subset M$; ${}_*d(x)$ und ${}^*d(x)$ seien Funktionen, die* a) *bis* c) *aus Hilfssatz 2.1 für $L = A$ erfüllen. Zur Abkürzung wird gesetzt:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_1 &:= \{AK_1 + \overline{A}K_2 : K_\nu \in \mathfrak{K}\}, \\ \delta(x) &:= {}^*d(x) - {}_*d(x), \\ \Lambda' &:= \{\lambda | M : \lambda(x)\ \mathfrak{K}\text{-}\textit{meßbar},\quad 0 \leqq \lambda(x) \leqq 1 \ \ \textit{auf}\ \ M\}, \\ p^{(\lambda)}(AK_1 + \overline{A}K_2) &:= \int_{K_1} ({}_*d(x) + \lambda(x) \cdot \delta(x))\, dp + \\ &\quad + \int_{K_2} [1 - ({}_*d(x) + \lambda(x) \cdot \delta(x))]\, dp. \end{aligned}$$

Dann gilt $\{p^{(\lambda)} \,|\, \mathfrak{K}_1 : \lambda \in \Lambda'\} = \{p_1 \,|\, \mathfrak{K}_1 : p_1 \,|\, \mathfrak{K} = p \,|\, \mathfrak{K}\}$.

Beweis: Wir wenden Satz 2A auf den Spezialfall $A_1 = A$, $A_2 = \overline{A}$ an, wobei von ${}^{(*)}_{\;*}d_1(x) := {}^{(*)}_{\;*}d(x)$ und ${}^{(*)}_{\;*}d_2(x) := 1 - {}^{\;*}_{(*)}d(x)$ ausgegangen wird. Es ist dann $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ und

$$\text{(1)} \qquad \sum_{\nu=1}^{2} ({}_*d_\nu + \lambda_\nu \cdot \delta_\nu) = 1 + (\lambda_1 + \lambda_2 - 1) \cdot \delta .$$

$p^{(\lambda)}$ aus Satz 2A′ stimmt wegen ${}_*d_2 + (1-\lambda) \cdot \delta_2 = 1 - ({}_*d + \lambda \cdot \delta)$ mit $p^{(\lambda, 1-\lambda)}$ aus Satz 2A überein. Für $\lambda \in \Lambda'$ ist $(\lambda, 1-\lambda) \in \Lambda$; für $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$ ist umgekehrt $\lambda_1 \in \Lambda'$ und wegen (1)

$$\lambda_1(x) + \lambda_2(x) = 1 \;\; p\text{-fast auf } \{x : \delta(x) > 0\},$$

folglich $p^{(\lambda_1, \lambda_2)} = p^{(\lambda_1, 1-\lambda_1)}$. $\{p^{(\lambda)} \,|\, \mathfrak{K}_1 : \lambda \in \Lambda'\}$ stellt nach Satz 2A also genau die Menge aller Fortsetzungen von $p \,|\, \mathfrak{K}$ nach $\mathfrak{K}_1$ dar. $\lrcorner$

Die in Satz 2A angegebene Gesamtheit der Fortsetzungen von $p \,|\, \mathfrak{K}$ bei Adjunktion der abzählbar vielen disjunkten Mengen $A_1, A_2, \ldots$ ist stets nicht leer; es besteht also immer die Möglichkeit, alle diese A_ν durch eine Fortsetzung meßbar zu machen:

Satz 2B. *Ist* $(M, \mathfrak{K}, p)$ *ein WFeld und* $\sum_\nu A_\nu = M$, *dann existiert ein WMaß* $p_1 \,|^B (\mathfrak{K} \dotplus \{A_1, A_2, \ldots\})$ *mit* $p_1 \,|\, \mathfrak{K} = p \,|\, \mathfrak{K}$.

Beweis: Wir wählen für die Mengen A_ν innere und äußere Dichten ${}_*d_\nu$ bzw. ${}^*d_\nu$ mit den Eigenschaften a) bis e) von Hilfssatz 2.1. In Satz 2A ist dann auch Vor. II erfüllt, so daß zum Beweis zu zeigen bleibt, daß Λ aus Satz 2A nicht leer ist. Zur Konstruktion eines $\lambda \in \Lambda$ bilden wir nun disjunkte Mengen $K_n \in \mathfrak{K}$, $n = 0, 1, \ldots$ in folgender Weise:

$$K_0 := \{x : \sum_\nu {}_*d_\nu = 1\},$$

$$\text{wegen Hilfssatz 2.1, d) folgt } \overline{K}_0 = \{x : \sum_\nu {}_*d_\nu = 0\},$$

$$K_1 := K_0\{x : \delta_1 = 1\}, \quad \text{also} \quad K_1 \subset \{x : \sum_\nu {}_*d_\nu + \delta_1 = 1\},$$

$$K_n := \{x : \sum_\nu {}_*d_\nu + \sum_{\nu < n} \delta_\nu = 0, \, \delta_n = 1\} \text{ für } n > 1.$$

Es gilt also $K_\nu \in \mathfrak{K}$ und wegen Hilfssatz 2.1, c) und e) $\sum_{\nu \geqq 0} K_\nu = M$. Durch den Ansatz $\lambda_\nu(x) := \chi_{K_\nu}(x)$ für $\nu \in \mathsf{N}$ erhalten wir $\mathfrak{K}$-meßbare Funktionen mit $0 \leqq \lambda_\nu(x) \leqq 1$ auf M und

$$\sum_\nu ({}_*d_\nu + \lambda_\nu \cdot \delta_\nu) = \begin{cases} \sum_\nu {}_*d_\nu \qquad\quad = 1 \text{ auf } K_0 \\ \sum_\nu {}_*d_\nu + \delta_n = 1 \text{ auf } K_n; \end{cases}$$

das bedeutet $\lambda \in \Lambda$. $\lrcorner$

§ 3. Kriterien für die Existenz einer Fortsetzung, die eine gegebene Funktion f | M meßbar macht

Wir betrachten ein vollständiges WFeld* (M, $\mathfrak{K}$, p) und eine reelle Funktion $f|M$ als vorgegeben. Die Voraussetzung der Vollständigkeit des WFeldes bedeutet

* Das W-Feld $(M, \mathfrak{K}, p)$ nennen wir vollständig, wenn $p|\mathfrak{K}$ ein vollständiges Maß ist.

keine Einschränkung der Allgemeinheit, da die Vervollständigung eines ursprünglich gegebenen Maßes stets und in eindeutiger Weise existiert und ohne weiteres angegeben werden kann. Nach Satz 1C ist das Problem, $f|M$ durch eine Fortsetzung von $(M, \mathfrak{K}, p)$ meßbar zu machen, nicht allgemein lösbar. Es sollen nun Bedingungen ermittelt werden, unter denen eine derartige Fortsetzung doch existiert. Hierzu setzen wir noch voraus, daß f die Menge M in das Einheitsintervall $E := [0,1]$ abbildet. Durch eine geeignete stetige Schränkungstransformation läßt sich die ursprünglich gegebene Funktion stets in diese normierte Form überführen, ohne daß die Meßbarkeit der Funktion davon berührt wird. Unter $\mathfrak{B}$ wird für den Rest der Arbeit stets der σ-Körper der Borelschen Teilmengen von E verstanden, also $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(E)$.

a) Zusammenhang zwischen Graph und Meßbarkeit einer Funktion

Da $(M, \mathfrak{K}, p)$ vollständig ist, ist nach [*3*] eine reelle Funktion $f|M$ genau dann $\mathfrak{K}$-meßbar, wenn ihr Graph $X(f) := \{(x, f(x)) : x \in M\}$ zu ${}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ gehört; und zwar ist das genau dann der Fall, wenn $X(f)$ ein $\overline{S}$ zu $\mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$ ist, d. h. wenn $\overline{X(f)}$ sich als Vereinigung $\sum\limits_{\nu}^{\cdot} R_\nu$ von „Rechtecken" $R_\nu = (K_\nu, B_\nu)$ mit $K_\nu \in \mathfrak{K}$, $B_\nu \in \mathfrak{B}$ darstellen läßt. Auch die Frage nach der Existenz einer Fortsetzung, die f meßbar macht, läßt sich, wie wir sehen werden, so formulieren, daß nur noch der Graph von f in Erscheinung tritt. Es existiert nämlich nach Satz 3A eine Fortsetzung von $p\,|\,\mathfrak{K}$, die f meßbar macht, genau dann, wenn ein WMaß $\mu\,|\,{}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ existiert mit den beiden Eigenschaften

$$\text{a)}\ \mu(K, E) = p(K), \qquad \text{b)}\ \mu^*(X(f)) = 1.$$

Dem Beweis für diesen Satz schicken wir einige Hilfssätze voraus. Zur Abkürzung soll dabei gelten:

$$\mathfrak{K}_1 := {}^B(\mathfrak{K} \dotplus \mathfrak{K}_f), \qquad X := X(f),$$
$$\varphi(L) := \{x : (x, f(x)) \in L\} \text{ für } L \subset (M, E).$$

Hilfssatz 3.1. $\mathfrak{K}_1 = \{\varphi(L) : L \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})\}$.

Beweis: Wegen der Operationstreue von φ gilt, wie sich z. B. analog zu [*8*], S. 158, zeigen läßt,

$$\{\varphi(L) : L \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})\} = {}^B\{\varphi(L) : L \in \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}\}. \tag{1}$$

Für $K \in \mathfrak{K}$ folgt $K = \varphi(K, E)$ und zu $K \in \mathfrak{K}_f$ existiert ein $B \in \mathfrak{B}$, so daß $K = \{x : f(x) \in B\} = \varphi(M, B)$. Also ist $\mathfrak{K} \dotplus \mathfrak{K}_f \subset \{\varphi(L) : L \in (\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})\}$ und wegen (1) auch

$$\mathfrak{K}_1 = {}^B(\mathfrak{K} \dotplus \mathfrak{K}_f) \subset \{\varphi(L) : L \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})\}. \tag{2}$$

$L \in \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$ besitzt eine Darstellung $L = \sum\limits_{\nu \leqq n}^{\cdot} (K_\nu, B_\nu)$ mit $K_\nu \in \mathfrak{K}$, $B_\nu \in \mathfrak{B}$; daraus folgt

$$\varphi(L) = \sum_{\nu \leqq n}^{\cdot} \varphi(K_\nu, B_\nu) = \sum_{\nu \leqq n}^{\cdot} K_\nu \{x : f(x) \in B_\nu\} \in {}^K(\mathfrak{K} \dotplus \mathfrak{K}_f) \subset \mathfrak{K}_1 .$$

Also ist $\{\varphi(L) : L \in \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}\} \subset \mathfrak{K}_1$ und folglich

$${}^B\{\varphi(L) : L \in \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}\} \subset \mathfrak{K}_1 . \tag{3}$$

(1), (2) und (3) ergeben die Behauptung. $\lrcorner$

Hilfssatz 3.2. *$((M, E), {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B}), \mu)$ sei ein WFeld; dann ist $\mu^*(X) = 1$ notwendig und hinreichend dafür, daß*

a) *p_1 auf $\mathfrak{K}_1$ durch $p_1(\varphi(L)) := \mu(L)$ für $L \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ eindeutig erklärt wird,*
b) *$(M, \mathfrak{K}_1, p_1)$ ein WFeld ist.*

Beweis: 1. Zunächst seien a) und b) erfüllt. Wegen $\varphi(X) = M$ ist dann für $X \subset L \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ stets $\mu(L) = p_1(M) = 1$, also $\mu^*(X) = 1$.

2. Nun sei $\mu^*(X) = 1$; für $L_{(\nu)} \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ gilt dann: Ist $\varphi(L) = 0$, so ist $L \subset \overline{X}$ und folglich $\mu(L) = \mu_*(\overline{X}) = 0$. Ist $\varphi(L_1) = \varphi(L_2)$, so folgt $\varphi(L_1 \dotplus L_2) = 0$, $\mu(L_1 \dotplus L_2) = 0$ und schließlich $\mu(L_1) = \mu(L_2)$; also ist p_1 eindeutig erklärt auf $\{\varphi(L) : L \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})\}$, nach Hilfssatz 3.1 also auf $\mathfrak{K}_1$.

Ist $\varphi(L_1) + \varphi(L_2) = \varphi(L_3)$, so ist $\varphi(L_1 \cdot L_2) = 0$ und $\varphi(L_1 \dotplus L_2) = \varphi(L_3)$, folglich $\mu(L_1 \cdot L_2) = 0$ und $\mu(L_1 \dotplus L_2) = \mu(L_3)$, also $\mu(L_1) + \mu(L_2) = \mu(L_3)$; $p_1 \mid \mathfrak{K}_1$ ist somit additiv und wegen $p_1(M) = \mu(M, E) = 1$ ein normierter Inhalt.

Ist $\sum\limits_\nu \varphi(L_\nu) = M$, so ist $\varphi(\sum\limits_\nu^{\cdot} L_\nu) = M$, folglich $\sum\limits_\nu^{\cdot} L_\nu \supset X$, also $\sum\limits_\nu \mu(L_\nu) \geqq \mu^*(X) = 1$; somit ist $p_1 \mid \mathfrak{K}_1$ auch σ-additiv. $\lrcorner$

Hilfssatz 3.3. *$((M, E), {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B}), \mu)$ sei ein WFeld mit $\mu^*(X) = 1$, p_1 sei wie in Hilfssatz 3.2 erklärt; dann ist $\mu(K, E) = p(K)$, $K \in \mathfrak{K}$, notwendig und hinreichend dafür, daß $(M, \mathfrak{K}_1, p_1)$ ein WFeld mit $p_1 \mid \mathfrak{K} = p \mid \mathfrak{K}$ ist.*

Beweis: Nach Hilfssatz 3.2 ist $(M, \mathfrak{K}_1, p_1)$ ein WFeld. Dabei ist $\mathfrak{K}_1 = {}^B(\mathfrak{K} \dotplus \mathfrak{K}_f) \supset \mathfrak{K}$. Die Bedingung $p_1 \mid \mathfrak{K} = p \mid \mathfrak{K}$ ist $p_1(K) = \mu(K, E)$ äquivalent mit $\mu(K, E) = p(K)$ für $K \in \mathfrak{K}$. $\lrcorner$

Nach dieser Vorbereitung gelangen wir zu

Satz 3A. *Es sei $(M, \mathfrak{K}, p)$ ein WFeld und f eine Abbildung von M in E; dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(A) *Es existiert ein WMaß $p_1 \mid {}^B(\mathfrak{K} \dotplus \mathfrak{K}_f)$ mit $p_1 \mid \mathfrak{K} = p \mid \mathfrak{K}$.*
(B) *Es existiert ein WMaß $\mu \mid {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ mit* (B_1) $\mu(K, E) = p(K)$,
(B_2) $\mu^*(X(f)) = 1$.

Beweis: Gilt (A), so definieren wir $\mu(L) := p_1(\varphi(L))$ für $L \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$; wegen $\mu(K, E) = p_1(K) = p(K)$ ist die Bedingung (B_1), wegen $\mu^*(X) = \inf\limits_{L \supset X} p_1(\varphi(L)) = 1$ die Bedingung (B_2) erfüllt. Gilt (B), so genügt $p_1(\varphi(L)) := \mu(L)$ nach Hilfssatz 3.3 der unter (A) stehenden Bedingung. $\lrcorner$

Mit Hilfe von Satz 3A läßt sich die „abstrakte" Bedingung der Fortsetzung von $(M, \mathfrak{K}, p)$ bei Adjunktion von $\mathfrak{K}_f$ durch die beträchtlich besser überblickbaren Bedingungen (B_1) und (B_2) für μ ersetzen. Beim Versuch, eine Fortsetzung p_1 zu konstruieren, bereitet es besondere Schwierigkeiten, die σ-Additivität von p_1 sicherzustellen. Für die σ-Additivität von μ können wir uns dagegen auf ein einfaches Kriterium (Satz 3C) stützen, dem zufolge die σ-Additivität von $\mu \mid {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ bereits aus der σ-Additivität des Marginalinhaltes von μ auf $\mathfrak{S}_0$, einem verhältnismäßig leicht zu beherrschenden Teilkörper von $\mathfrak{B}$, folgt. Hinreichende Bedingungen für $\mu^*(X(f)) = 1$ werden in Abschnitt c) behandelt.

b) Kriterien für die σ-Additivität eines Inhaltes auf $\mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$

Um ein Maß $\mu \mid {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ mit den Eigenschaften (B_1) und (B_2) aus Satz 3A zu konstruieren, bietet sich in groben Umrissen folgendes Vorgehen an: Vom Ansatz

$\mu_0(K, E) := p(K)$ für $K \in \mathfrak{K}$ ausgehend wird für eine Folge sukzessiv verfeinerter Unterteilungen von (M, E) eine Folge verträglicher Fortsetzungen schrittweise definiert, also eine Folge von WFeldern $((M, E), \mathfrak{F}_\nu, \mu_\nu)$, $\nu \in \mathsf{N}$, mit

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{K}) := \{(K, E) : K \in \mathfrak{K}\} \subset \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \ldots$$

und den Verträglichkeitsbedingungen $\mu_1(K, E) = p(K)$ und $\mu_{\nu+1} | \mathfrak{F}_\nu = \mu_\nu | \mathfrak{F}_\nu$ für $\nu \in \mathsf{N}$. Die Unterteilungen (und damit die σ-Körper $\mathfrak{F}_\nu$) sowie die Maße μ_ν sind hierbei so zu wählen, daß ${}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ durch ${}^B(\sum_\nu{}^{\boldsymbol{\cdot}} \mathfrak{F}_\nu)$ überdeckt wird und daß ein mit den Maßen $\mu_\nu | \mathfrak{F}_\nu$, $\nu \in \mathsf{N}$, verträgliches Maß $\mu |^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ existiert, wobei zusätzlich die Bedingung (B_2) aus Satz 3A erfüllt ist. Für die Fortsetzung in jedem Einzelschritt stehen die Hilfsmittel des § 2 zur Verfügung, falls die Verfeinerung — im wesentlichen — durch abzählbar viele disjunkte Mengen erzeugt wird. Nun ist zwar wegen der Verträglichkeit der Maße $\mu_\nu | \mathfrak{F}_\nu$, $\nu \in \mathsf{N}$, durch $m | \mathfrak{F}_\nu := \mu_\nu | \mathfrak{F}_\nu$ stets ein Inhalt m auf dem Körper $\sum_\nu{}^{\boldsymbol{\cdot}} \mathfrak{F}_\nu$ erklärt; doch ist die σ-Additivität von m durch die der Maße μ_ν allein noch nicht verbürgt, wie das folgende Beispiel 1 zeigt. Wir benötigen vielmehr ein brauchbares Kriterium, um die σ-Additivität des Inhaltes m auf $\mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$ verifizieren zu können.

Zunächst führen wir für bestimmte Systeme „dyadischer" Intervalle, die bei Unterteilungen von E eine Rolle spielen werden, feste Bezeichnungen ein:

$$\mathfrak{I}_n := \{[0,2^{-n}]\} + \{(k 2^{-n}, (k+1) 2^{-n}] : k = 1, 2, \ldots 2^n - 1)\} \text{ für } n \in \mathsf{N};$$
$$\mathfrak{I} := \sum_n \mathfrak{I}_n; \quad \mathfrak{G}_0 := {}^K\mathfrak{I}.$$

$\mathfrak{I}_n$ ist also ein System von endlich vielen disjunkten Intervallen der Länge 2^{-n} mit E als Vereinigung, $\mathfrak{G}_0$ das System der endlichen Summen von Intervallen aus $\mathfrak{I}$.

Beispiel 1. $(M, \mathfrak{K}, p)$ sei irgendein WFeld; E wird im ersten Schritt in die Mengen $R_0 := \{x \in E : x \text{ rational}\}$ und $\overline{R}_0$ zerlegt, im n-ten Schritt $(n > 1)$ treten bei der Unterteilung zusätzlich die Intervalle aus $\mathfrak{I}_n$ auf, so daß wir erhalten

$$\mathfrak{F}_1 = {}^B(\mathfrak{K} \times {}^K\{R_0\}) = \mathfrak{K} \times {}^K\{R_0\}, \quad \mathfrak{F}_n = \mathfrak{K} \times {}^K(\mathfrak{I}_n + \{R_0\}) \text{ für } n > 1.$$

Wir definieren nun auf dem Körper ${}^K(\mathfrak{I}_n + \{R_0\}) = \{G R_0 + G' \overline{R}_0 : G, G' \in {}^K\mathfrak{I}_n\}$ den Inhalt $q_n(G R_0 + G' \overline{R}_0) := l(G)$, wobei l das Lebesguemaß bedeutet. Da ${}^K(\mathfrak{I}_n + \{R_0\})$ ein endlicher Körper ist, ist q_n ein Maß. Das direkte Produkt $\mu_n := p \times q_n$ ist dann ein Maß auf $\mathfrak{F}_n$ mit

$$\mu_n(M, R_0) = p(M) \cdot q_n(R_0) = 1, \quad \mu_n(K, E) = p(K) \cdot q_n(E) = p(K).$$

Wegen der Verträglichkeit von $\mu_1, \mu_2, \ldots$ ist ein Inhalt $m | \sum_\nu{}^{\boldsymbol{\cdot}} \mathfrak{F}_\nu$ durch $m | \mathfrak{F}_\nu := \mu_\nu | \mathfrak{F}_\nu$ erklärbar. Jedoch ist m nicht σ-additiv, da in $\mathfrak{I}$ Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ existieren mit $\sum_n{}^{\boldsymbol{\cdot}} I_n \supset R_0$ und $\sum_n l(I_n) < 1$, woraus $\sum_n{}^{\boldsymbol{\cdot}} (M, I_n R_0) = (M, R_0)$ mit $\sum_n m(M, I_n R_0) = \sum_n l(I_n) < m(M, R_0)$ folgt.

Definition. Ist $\mathfrak{K}_\nu$ ein Körper von Teilmengen einer Menge M_ν, $\nu = 1,2$, so nennen wir einen Inhalt $m | \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$ S-additiv, falls die Marginalinhalte von m auf $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ σ-additiv sind.

Die S-Additivität, definiert als eine „Seiten-σ-Additivität", läßt sich auch als „Streifen-σ-Additivität" interpretieren; denn es gilt:

Hilfssatz 3.4. *Ein Inhalt $m \mid \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$ ist genau dann S-additiv, wenn m σ-additiv ist auf den „Streifen"*

$$\{(K, K''): K \in \mathfrak{K}_1\} \text{ für jedes } K'' \in \mathfrak{K}_2 \text{ und}$$
$$\{(K', K): K \in \mathfrak{K}_2\} \text{ für jedes } K' \in \mathfrak{K}_1 .$$

Beweis 1. Die σ-Additivität auf den Streifen mit $K'' = M_2$ bzw. $K' = M_1$ bedeutet die S-Additivität.

2. Ist $m \mid \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$ ein S-additiver Inhalt, so gilt für K_ν, $\sum\limits_\nu K_\nu \in \mathfrak{K}_1$, $K'' \in \mathfrak{K}_2$

$$(1) \qquad m(\sum_\nu K_\nu, K'') \geqq \sum_\nu m(K_\nu, K''), \quad m(\sum_\nu K_\nu, \overline{K''}) \geqq \sum_\nu m(K_\nu, \overline{K''})$$

$$(2) \qquad m(\sum_\nu K_\nu, K'') + m(\sum_\nu K_\nu, \overline{K''}) = \sum_\nu m(K_\nu, K'') + \sum_\nu m(K_\nu, \overline{K''}).$$

Wegen (2) steht in (1) das Gleichheitszeichen; das bedeutet die σ-Additivität auf dem Streifen $\{(K, K''): K \in \mathfrak{K}_1\}$. ⌟

In vielen Fällen ist die S-Additivität hinreichend für die σ-Additivität eines Inhaltes, insbesondere in dem uns interessierenden Fall $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$:

Satz 3B. *Es sei $\mathfrak{K}$ ein Körper von Teilmengen von M; dann gilt: Ist $m \mid \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$ ein S-additiver Inhalt, so ist $m \mid \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$ auch σ-additiv.*

Beweis: Für eine absteigende Mengenfolge $L_1, L_2, \ldots, L_\nu \in \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$, mit leerem Durchschnitt sei $\lim\limits_{\nu \to \infty} m(L_\nu) =: \vartheta$ gesetzt; zu zeigen ist nun $\vartheta = 0$.

Wegen der S-Additivität ist der Marginalinhalt von m auf $\mathfrak{B}$ ein Intervallmaß*. Zu $L_\nu = \sum\limits_{\lambda \leqq l_\nu} (K_{\nu\lambda}, B_{\nu\lambda})$ und $\varepsilon > 0$ existieren also kompakte Mengen $F_{\nu\lambda} \subset B_{\nu\lambda}$ derart, daß $m(L_\nu - \tilde{L}_\nu) < \varepsilon 2^{-\nu}$ für $\tilde{L}_\nu := \sum\limits_\lambda (K_{\nu\lambda}, F_{\nu\lambda})$ erfüllt ist. Mit $L_n' := \prod\limits_{\nu \leqq n}^{\cdot} \tilde{L}_\nu$ erhalten wir eine absteigende Folge

$$(1) \qquad L_1' \supset L_2' \supset \cdots \text{ mit } L_n' \subset \tilde{L}_n \subset L_n \text{ und } \prod_n^{\cdot} L_n' = 0 .$$

Dabei läßt sich L_n' in der Form

$$(2) \qquad \sum_{\mu \leqq m_n}^{\cdot} (K_{n\mu}', F_{n\mu}') \text{ mit } K_{n\mu}' \in \mathfrak{K},\ F_{n\mu}' \text{ kompakte Teilmenge von } E,$$

schreiben. Wegen

$$L_n - L_n' = \sum_{\nu \leqq n}^{\cdot} L_n \overline{\tilde{L}}_\nu \subset \sum_{\nu \leqq n}^{\cdot} (L_\nu - \tilde{L}_\nu)$$

folgt

$$(3) \qquad m(L_n - L_n') < \varepsilon .$$

Für jedes $x \in M$ bilden die Schnittmengen $L_n' \mid_x$ wegen (1) eine absteigende Folge mit leerem Durchschnitt. Da die $L_n' \mid_x$ wegen (2) kompakt sind, existiert ein $n(x) \in \mathrm{N}$ mit $L_{n(x)}' \mid_x = 0$. Also ist

$$(4) \qquad pr_M L_1' \supset pr_M L_2' \supset \cdots \text{ mit } \prod_n^{\cdot} pr_M L_n' = 0 .$$

---

* Im Sinn von [*8*], S. 29.

Die σ-Additivität des Marginalmaßes von m auf $\mathfrak{K}$ ergibt dann $\lim_{n\to\infty} m(pr_M L_n', E) = 0$. Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} m(L_n') = 0$ und mit (3) schließlich $\vartheta < \varepsilon$. $\lrcorner$

Am Rande sei bemerkt, daß sich der Beweis zu Satz 3B mühelos übertragen läßt, wenn $\mathfrak{B}$ durch einen σ-Körper $\mathfrak{K}'$ von Teilmengen eines topologischen Raumes M' ersetzt wird unter der Zusatzbedingung, daß der Marginalinhalt von m auf $\mathfrak{K}'$ ein reguläres Maß ist, d. h. daß jedes $K' \in \mathfrak{K}'$ von innen durch eine geeignete kompakte Teilmenge von M' ε-gut approximiert wird. Allgemein ist die S-Additivität nicht hinreichend für die σ-Additivität eines Inhaltes, wie Beispiel 2 zeigt:

Beispiel 2 (ein S-additiver, nicht σ-additiver Inhalt über (E, E)). Wir wählen

$$M = M' = E \text{ und } \mathfrak{K} = \mathfrak{K}' = {}^{B}(\mathfrak{B} + \{A\}) = \{B_1 \cdot A + B_2 \cdot \overline{A} : B_\nu \in \mathfrak{B}\},$$

wobei $l^*(A) = l^*(\overline{A}) = 1$*.

Durch $m(B_{11} \cdot A + B_{12} \cdot \overline{A},\, B_{21} \cdot A + B_{22} \cdot \overline{A}) := l(B_{11} \cdot B_{22})$** wird auf $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}'$ ein S-additiver Inhalt induziert, der nicht σ-additiv ist. Für $S_n := \sum_{I \in \mathfrak{J}_n} (IA, I\overline{A})$ gilt nämlich:

(1) $\quad S_1 \supset S_2 \supset \cdots$ mit $\prod_n^{\cdot} S_n = (A, \overline{A}) \cdot \prod_n^{\cdot} \sum_{I \in \mathfrak{J}_n} (I, I) = (A, \overline{A}) \cdot \{(x, x) : x \in E\} = 0,$

(2) $\quad m(S_n) = \sum_{I \in \mathfrak{J}_n} l(I) = 1.$

Satz 3B läßt sich noch folgendermaßen verschärfen:

Satz 3C. *$\mathfrak{K}$ sei ein Körper von Teilmengen von M; dann gilt: Ist $m \mid \mathfrak{K} \times \mathfrak{G}_0$ ein S-additiver Inhalt, so ist $m \mid \mathfrak{K} \times \mathfrak{G}_0$ auch σ-additiv.*

Beweis: Für jedes $K \in \mathfrak{K}$ ist nach Hilfssatz 3.4 durch $m_K(G) := m(K, G)$ ein σ-additiver (nicht notwendig normierter) Inhalt auf $\mathfrak{G}_0$ erklärt. Wegen ${}^{B}\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{B}$ läßt sich $m_K \mid \mathfrak{G}_0$ zu einem Maß $\mu_K \mid \mathfrak{B}$ erweitern. Für $(K, B) = \sum_{\nu \leqq n} (K_\nu, B)$ gilt dabei $\mu_K(B) = \sum_{\nu \leqq n} \mu_{K\nu}(B)$ wegen $m_K \mid \mathfrak{G}_0 = \sum_{\nu \leqq n} m_{K\nu} \mid \mathfrak{G}_0$. Wegen $\mu_K(\sum_\nu B_\nu) = \sum_\nu \mu_K(B_\nu)$ folgt daraus für beliebige endliche Zerlegungen $(K, B) = \sum_{\nu \leqq n} (K_\nu, B_\nu)$, $K_\nu \in \mathfrak{K}$, $B_\nu \in \mathfrak{B}$, allgemein $\mu_K(B) = \sum_{\nu \leqq n} \mu_{K\nu}(B_\nu)$. Die Festsetzung

$$m_1\Big(\sum_{\nu \leqq n} (K_\nu, B_\nu)\Big) := \sum_{\nu \leqq n} \mu_{K\nu}(B_\nu)$$

ist also eindeutig. Sie liefert einen Inhalt $m_1 \mid \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$, der wegen $m_1(M, B) = \mu_M(B)$ und $m_1(K, E) = \mu_K(E) = m(K, E)$ wieder S-additiv ist. Mit Satz 3B folgt daraus die σ-Additivität von $m_1 \mid \mathfrak{K} \times \mathfrak{B}$ und insbesondere von $m_1 \mid \mathfrak{K} \times \mathfrak{G}_0 = m \mid \mathfrak{K} \times \mathfrak{G}_0$. $\lrcorner$

Für unsere Anwendung formulieren wir Satz 3C noch etwas um, wobei wir für die Menge der endlichen Dualbrüche in $[0,1]$ die Abkürzung E_0 verwenden, also

$$E_0 := \{k 2^{-n} : k = 1, 2, \ldots 2^n, n \in \mathsf{N}\}.$$

---

* l bedeutet auch hier das Lebesguemaß.

** m ist wegen $l_*(A) = l_*(\overline{A}) = 0$ eindeutig definiert.

Satz 3C′. *$(M, \mathfrak{K}, p)$ sei ein WFeld, $m \mid \mathfrak{K} \times \mathfrak{G}_0$ ein Inhalt mit den Marginalinhalten $p \mid \mathfrak{K}$ und $q \mid \mathfrak{G}_0$. Wir setzen*

$$F(y) := q([0, y]) \text{ für } y \in E_0 .$$

Ist dann $F(y)$ auf E_0 von rechts stetig, so ist $m \mid \mathfrak{K} \times \mathfrak{G}_0$ σ-additiv.

Beweis: Da $[0, y] \in \mathfrak{G}_0$ genau dann, wenn $y \in E_0$, besteht eine eindeutige Zuordnung zwischen $F \mid E_0$ und $q \mid \mathfrak{G}_0$. $F \mid E_0$ läßt sich wegen der Stetigkeit von rechts zu einer Verteilungsfunktion $F_1 \mid \mathsf{R}^1$ erweitern durch die Festsetzung

$$F_1(y) := \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0 \\ \lim\limits_{E_0 \ni y_\nu \searrow y} F(y_\nu) & \text{für } y \in E \\ 1 & \text{für } y > 1 . \end{cases}$$

Das durch F_1 auf $\mathfrak{B}$ erzeugte WMaß $q_1 \mid \mathfrak{B}$ ist wegen $F_1 \mid E_0 = F \mid E_0$ eine Erweiterung des Inhaltes $q \mid \mathfrak{G}_0$; folglich ist $q \mid \mathfrak{G}_0$ ein σ-additiver Inhalt, also $m \mid \mathfrak{K} \times \mathfrak{G}_0$ S-additiv und nach Satz 3C σ-additiv. $\lrcorner$

c) Kriterien für die Bedingung $\mu^*(X(f)) = 1$

Um die Existenzaussage (B) aus Satz 3A zu gewinnen, ist es erforderlich, die Fortsetzungen $(M, \mathfrak{F}_\nu, \mu_\nu)$ in dem zu Beginn des Abschnittes b) skizzierten Konstruktionsverfahren so einzurichten, daß nicht nur ein mit μ_ν, $\nu \in \mathsf{N}$, verträglicher S-additiver Inhalt auf $\mathfrak{K} \times \mathfrak{G}_0$ existiert, sondern daß dessen Erweiterung $\mu \mid {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ auch noch die Bedingung $\mu^*(X(f)) = 1$ erfüllt. Wie Beispiel 3 zeigt, ist diese Bedingung durch $\mu_\nu^*(X(f)) = 1$ für jedes $\nu \in \mathsf{N}$ noch nicht gesichert.

Beispiel 3 ($\mu_\nu^*(X) = 1$ für $\nu \in \mathsf{N}$, $\mu^*(X) = 0$). Zum WFeld $(M, \mathfrak{K}, p) = (E, \mathfrak{B}, l)$ wählen wir die Funktion

$$f(x) = r \text{ für } x \in A_r ,$$

wobei $\sum\limits_{r \in R_0} A_r = E$ mit $l^*(A_r) = 1$, $R_0 := \{x \in E : x \text{ rational}\}$. Auf $\mathfrak{F}_\nu = {}^B(\mathfrak{B} \times {}^K\mathfrak{F}_\nu)$ setzen wir $\mu_\nu \mid \mathfrak{F}_\nu := l_2 \mid \mathfrak{F}_\nu$, wobei l_2 das Lebesguemaß über (E, E) bedeutet. Dann ist $\mu \mid \mathfrak{B}(E^2) = l_2 \mid \mathfrak{B}(E^2)$ verträglich mit $\mu_\nu \mid \mathfrak{F}_\nu$, $\nu \in \mathsf{N}$. Für jedes $B \in \mathfrak{F}_\nu$ mit $B \supset X$ folgt $\mu_\nu(B) = 1$; also ist $\mu_\nu^*(X) = 1$. Wegen $X \subset (E, R_0) \in \mathfrak{B}(E^2) = {}^B(\sum\limits_\nu{}^{\cdot} \mathfrak{F}_\nu)$ ist $\mu^*(X) = 0$.

Eine derartige Einbuße an äußerem Maß beim „Grenzübergang" $\nu \to \infty$ erleiden diejenigen Mengen nicht, die sich als Durchschnitt einer absteigenden Folge $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ mit $B_\nu \in \mathfrak{F}_\nu \cdot {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ darstellen lassen; denn aus $\mu_\nu^*(\prod\limits_\nu{}^{\cdot} B_\nu) = 1$ folgt dann $\mu(B_\nu) = \mu_\nu(B_\nu) = 1$ und $\mu(\prod\limits_\nu{}^{\cdot} B_\nu) = 1$. Ist $f \mid M$ nicht $\mathfrak{K}$-meßbar, so ist eine derartige Darstellung für $X(f)$ nicht möglich, da nach [3] $X(f)$ nicht zu ${}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ gehört. Schwächt man die Bedingung $B_\nu \in \mathfrak{F}_\nu \cdot {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ in die Bedingung $B_\nu \in \mathfrak{F}_\nu$ ab, so benötigt man die Existenz eines mit $\mu_\nu \mid \mathfrak{F}_\nu$, $\nu \in \mathsf{N}$, verträglichen Maßes $\tilde{\mu}$ auf ${}^B\sum\limits_\nu{}^{\cdot} \mathfrak{F}_\nu$, um $\tilde{\mu}(\prod\limits_\nu{}^{\cdot} B_\nu) = 1$ aus $\mu_\nu(B_\nu) = 1$, $\nu \in \mathsf{N}$, und daraus schließlich $\mu^*(\prod\limits_\nu{}^{\cdot} B_\nu) = 1$ folgern zu können. Der Nachweis der Existenz von $\tilde{\mu} \mid {}^B\sum\limits_\nu{}^{\cdot} \mathfrak{F}_\nu$ bzw. der σ-Additivität von $m \mid \sum\limits_\nu{}^{\cdot} \mathfrak{F}_\nu$ ist im allgemeinen Fall sehr schwierig; insbesondere ist das S-Additivitäts-Kriterium nicht anwendbar, wenn $\sum\limits_\nu{}^{\cdot} F_\nu$ kein Produktkörper ist.

Wir werden deshalb unser Augenmerk auf solche Mengen $B_0 \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ lenken, zu denen sich ein Maß $\mu|^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ mit $\mu(B_0) = 1$ konstruieren läßt und die den Graphen derart approximieren, daß aus $\mu(B_0) = 1$ auch $\mu^*(X(f)) = 1$ gefolgert werden kann. Die folgende Approximationsbedingung $\mathscr{A}$ nimmt nur auf das vorgegebene Maß $p\,|\,\mathfrak{K}$, nicht aber auf das erst noch zu konstruierende Maß $\mu|^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ Bezug.

Definition. Die Menge B_0 aus ${}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ heißt $\mathscr{A}$-Approximation des Graphen X (oder kurz: B_0 erfüllt Bed. $\mathscr{A}$), falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

($\mathscr{A}_1$) Es existiert eine Folge $B_1, B_2, \ldots$ mit $B_\nu \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ derart, daß $\sum\limits_\nu B_\nu \overline{X} \supset B_0 \overline{X}$ und $p_*(pr_M B_\nu \overline{X}) = 0$ für $\nu \in \mathsf{N}$.

($\mathscr{A}_2$) $p(pr_M B_0) = 1$.

Wie in Satz 3D näher erläutert wird, erlaubt die Bedingung ($\mathscr{A}_1$) den Schluß von $\mu(B_0) = 1$ auf $\mu^*(X) = 1$. Die Bedingung ($\mathscr{A}_2$) ist notwendig und — wie in einer späteren Arbeit dargelegt werden soll — für ein B_0 vom Typ $S_{\delta\sigma}$ zu $\mathfrak{K} \times \mathfrak{G}_0$ auch hinreichend für die Existenz eines Maßes $\mu|^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ mit $\mu(B_0) = 1$. Der Begriff der $\mathscr{A}$-Approximation soll nun veranschaulicht werden am Beispiel einer Klasse von Funktionen, deren Graphen von Mengen des Types $S_{\delta\sigma}$ zu $\mathfrak{K} \times \mathfrak{G}_0$ $\mathscr{A}$-approximiert werden.

Beispiel 4. $f\,|\,M$ sei von folgendem Typ

(1) $f|A_\nu = f_\nu|A_\nu, \quad \nu \in \mathsf{N}$, wobei $f_\nu|M$ $\mathfrak{K}$-meßbar ist und A_ν beliebig mit $\sum\limits_\nu A_\nu = M$.

Dann gilt $X(f) = \sum\limits_\nu (A_\nu, E) \cdot X(f_\nu)$ und folglich

(2) $X(f) \subset \sum\limits_\nu{}^{\boldsymbol{\cdot}} X(f_\nu)$, wobei $X(f_\nu)$ ein $\overline{S}$ zu $\mathfrak{K} \times \mathfrak{G}_0$ ist*.

Zu A_ν wählen wir $K_\nu \in \mathfrak{K}$ mit $K_\nu \supset A_\nu$ und $p_*(K_\nu - A_\nu) = 0$. Dann ist $B_0 := \sum\limits_\nu{}^{\boldsymbol{\cdot}} (K_\nu, E) \cdot X(f_\nu)$ ein $S_{\delta\sigma}$ zu $\mathfrak{K} \times \mathfrak{G}_0$ und erfüllt, wie wir nun zeigen wollen, Bed. $\mathscr{A}$:

Wir setzen $B_n := (K_n, E) \cdot X_n \cdot \overline{\sum\limits_{0<\nu<n} B_\nu}$ mit $X_n := X(f_n)$. Wegen $\sum\limits_\nu B_\nu = B_0$ ist $\sum\limits_\nu B_\nu \overline{X} \supset B_0 \overline{X}$ erfüllt und wegen

$$B_\nu \subset (K_\nu - A_\nu, E) \cdot X_\nu + (A_\nu, E) \cdot X \quad \text{folgt} \quad B_\nu \overline{X} \subset (\dot{K}_\nu - A_\nu, E)$$

und daraus

$$p_*(pr_M B_\nu \overline{X}) = p_*(K_\nu - A_\nu) = 0;$$

also ist ($\mathscr{A}_1$) erfüllt. ($\mathscr{A}_2$) folgt wegen $B_0 \supset X(f)$.

Funktionen des in Beispiel 4 behandelten Types lassen sich bereits mit den Hilfsmitteln des § 2 meßbar machen, und zwar durch Adjunktion der abzählbar vielen disjunkten Mengen A_ν, $\nu \in \mathsf{N}$; denn es gilt

$$\{x : f(x) \leqq y\} = \sum_\nu A_\nu \cdot \{x : f_\nu(x) \leqq y\} \in {}^B(\mathfrak{K} \dotplus \{A_1, A_2, \ldots\}).$$

---

* Wird umgekehrt (2) von $X(f)$ erfüllt, so ist wegen [3] stets f vom Typ (1).

Der Verdacht liegt nahe, daß jede Funktion, deren Graph von einer Menge $B_0 \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ $\mathscr{A}$-approximiert wird, zu dem in Beispiel 4 behandelten Typ gehört. Das ist jedoch nicht der Fall, wie bereits das folgende ganz einfache Beispiel zeigt.

Beispiel 5 (eine Funktion, die (1) in Beispiel 4 verletzt und deren Graph sogar von einem Rechteck $B_0 = (K, \prod_\nu^{\cdot} J_\nu)$, $K \in \mathfrak{K}$, $J_\nu \in \mathfrak{J}$, $\mathscr{A}$-approximiert wird).

Wir betrachten das vollständige WFeld $(M, \mathfrak{K}, p) = (E_x, \{0, E_x\}, p)$, wobei $E_x := \{x : 0 \leqq x \leqq 1\}$ zur formalen Unterscheidung vom Wertebereich E gesetzt wird, und dazu die Funktion $f(x) = x$. $f|M$ verletzt (1) in Beispiel 4; denn in diesem Fall ist jede $\mathfrak{K}$-meßbare Funktion konstant, so daß $X(f) = \{(x,x) : x \in E_x\}$ durch $\sum_\nu^{\cdot} X(f_\nu)$ mit $\mathfrak{K}$-meßbaren f_ν nicht zu überdecken ist.

$B_0 := (E_x, \{y_0\})$ erfüllt für ein beliebiges $y_0 \in E$ die Bedingung $\mathscr{A}$, wobei z. B. $B_1 := B_0$, $B_\nu := 0$ für $\nu > 1$ gewählt werden kann; denn wegen $B_1\overline{X} = (E_x - \{y_0\}, \{y_0\})$ gilt

$$p_*(pr_{E_x} B_1\overline{X}) = p_*(E_x - \{y_0\}) = 0\,.$$

In Beispiel 5 ist natürlich jedes WMaß auf $\mathfrak{B}(E_x)$ eine Fortsetzung, die f meßbar macht. Weniger triviale Gegenbeispiele gegen den erwähnten Verdacht lassen sich ohne große Mühe konstruieren.

Verfügt man im allgemeinen Fall über ein $B_0 \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$, das Bed. $\mathscr{A}$ erfüllt, so hat man nur noch dafür zu sorgen, das Maß $\mu|^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ unter Beachtung der Randbedingung $\mu(K, E) = p(K)$ so zu konstruieren, daß $\mu(B_0) = 1$ ist. Es folgt nämlich $\mu^*(X) = 1$ aus $\mu(B_0) = 1$ für ein $B_0 \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$, das $(\mathscr{A}_1)$ erfüllt, gemäß folgendem Kriterium:

Satz 3D. *Ist $(M, \mathfrak{K}, p)$ ein vollständiges WFeld, ist $\mu|^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ ein Maß mit $\mu(K, E) = p(K)$ und existiert ein $B_0 \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$, das $(\mathscr{A}_1)$ und $\mu(B_0) = 1$ erfüllt, so ist $\mu^*(X) = 1$.*

Beweis: Für $L \supset B \in {}^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ folgt nach [3], Hilfssatz 1 und 2, wegen der Vollständigkeit von $(M, \mathfrak{K}, p)$ stets $pr_M L \supset pr_M B \in \mathfrak{K}$ sowie

$$\mu(B) \leqq \mu(pr_M B, E) = p(pr_M B) \leqq p_*(pr_M L)\,.$$

Also gilt für jedes $L \subset (M, E)$ mit $p_*(pr_M L) = 0$ auch $\mu_*(L) = 0$.

Speziell für $L = B_\nu \overline{X}$ ergibt sich aus $(\mathscr{A}_1)$ damit $\mu_*(B_\nu\overline{X}) = 0$ und folglich

$$\mu_*(B_0\overline{X}) \leqq \mu_*(\sum_\nu B_\nu\overline{X}) = \sum_\nu \mu_*(B_\nu\overline{X}) = 0\,.$$

Daraus folgt schließlich

$$\mu^*(X) \geqq \mu^*(B_0 X) = \mu(B_0) - \mu_*(B_0\overline{X}) = 1\,. \qquad \rfloor$$

Das Problem, eine Funktion meßbar zu machen, deren Graph von einer Menge B_0 $\mathscr{A}$-approximiert wird, wird also durch die Sätze 3A und 3D auf das Problem reduziert, ein Maß $\mu|^B(\mathfrak{K} \times \mathfrak{B})$ mit $\mu(B_0) = 1$ und $\mu(K, E) = p(K)$ zu finden. Läßt sich $X(f)$ zum Beispiel von einer Menge des Types $S_{\delta\sigma}$ zu $\mathfrak{K} \times \mathfrak{G}_0$ $\mathscr{A}$-approximieren, so existiert ein solches Maß μ stets, wie in einer folgenden Arbeit gezeigt werden soll.

Literatur

[1] Aumann, G.: Reelle Funktionen. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1954.
[1a] Banach S.: Sur les suites d'ensembles excluant l'existence d'une mesure. Colloquium Math. **1**, 1948.
[2] Banach, S, et C. Kuratowski: Sur une généralisation du problème de la mesure. Fund. Math. **14**, 1929.
[3] Bierlein, D.: Der Graph meßbarer Funktionen mit abstraktem Definitionsbereich. Math. Z. **76**, 468—471 (1961).
[4] Bierlein, D.: Eine Bemerkung zur diskreten gemischten Erweiterung eines unendlichen Spieles. Arch. Math. **12**, 224—226 (1961).
[5] Halmos, P. .R: Measure Theory. Van Nostrand, Princeton, 1958.
[6] Loś, J., and E. Marczewski: Extensions of measure. Fund. Math. **36**, 1949.
[6a] Marczewski, E. and C. Ryll-Nardzewski: Remarks on the compactness and non direct products of measures. Fund. Math. **40**, 1953.
[7] McKinsey, J. C. C.: Introduction to the Theory of Games. New York, 1952.
[8] Richter, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1956.
[9] Ulam, S.: Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre. Fund. Math. **16**, 1930.
[10] Wald, A.: Statistical Decision Functions. New York: Wiley 1950.

Mathematisches Institut der Universität München
8 München, Schellingstraße 2/8

(Eingegangen am 21. August 1961)