Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 1, 3—13 (1962)

Folgen normierter Maße auf kompakten Gruppen

Von

JOHANN CIGLER

Einleitung

In letzter Zeit erschien eine Reihe von Arbeiten, in denen das Konvergenzverhalten von Faltungsprodukten normierter Maße auf kompakten topologischen Gruppen untersucht wurde. In der vorliegenden Arbeit sollen nun analoge Fragestellungen vom Standpunkt der Theorie der Gleichverteilung aus behandelt werden. Ein wesentliches Hilfsmittel bildet dabei eine Verallgemeinerung des van der Corputschen Hauptsatzes der Theorie der Gleichverteilung, die in § 2 bewiesen wird. In § 3 betrachten wir Folgen von Potenzen μ^n. Ein Großteil der hier gewonnenen Resultate ist bereits bekannt (vgl. die Arbeiten von ITO und KAWADA [*12*], URBANIK [*15*], KLOSS [*13*] und GLICKSBERG [*7*]). Wir bringen sie jedoch in einer Gestalt, die sie als Verallgemeinerung von Gleichverteilungssätzen erscheinen läßt. Der erweiterte van der Corputsche Hauptsatz ermöglicht uns nun den Beweis weiterer Sätze, die mit anderen Methoden nicht so leicht zu gewinnen wären. Zum Schluß definieren wir einen Gleichverteilungsbegriff auf der additiven Gruppe der reellen Zahlen, die als lokalkompakte, aber nicht kompakte, Gruppe nicht unmittelbar unter die Überlegungen der vorangegangenen Paragraphen fällt.

§ 1. Definitionen und Hilfssätze

Sei G eine multiplikativ geschriebene kompakte topologische Gruppe. Mit $C(G)$ bezeichnen wir den Banachraum aller stetigen komplexwertigen Funktionen f auf G mit der Norm $\|f\| = \max_{x \in G} |f(x)|$. $M(G)$ sei die Menge aller normierten Maße μ auf G, d. h. die Menge aller stetigen linearen Funktionale μ auf $C(G)$ mit $\mu(f) \geqq 0$ für $f \geqq 0$ und $\mu(1) = 1$. Wir führen in $M(G)$ die schwache Topologie (weak* topology) ein: Eine Moore-Smith-Folge normierter Maße μ_σ heißt konvergent gegen ein Maß μ, wenn $\lim \mu_\sigma(f) = \mu(f)$ für jedes $f \in C(G)$ gilt. In dieser Topologie ist $M(G)$ bekanntlich kompakt.

Nach dem Satz von PETER-WEYL besitzt jede kompakte Gruppe G ein vollständiges System $\mathfrak{U}$ irreduzibler unitärer endlichdimensionaler Darstellungen $U = (u_{ik}(g))$. Sei $\mathfrak{U}'$ die Menge aller nichttrivialen Darstellungen $U \in \mathfrak{U}$. Dann ist jedes Maß $\mu \in M(G)$ eindeutig durch die Matrizen $\mu(U)$ $(U \in \mathfrak{U}')$ bestimmt. Dabei bedeutet $\mu(U)$ die Matrix $(\int_G u_{ik}(g)\, d\mu(g))$. Insbesondere ist das Haarsche Maß λ auf G charakterisiert durch $\lambda(U) = 0$ (0 bedeutet die Nullmatrix) für jedes $U \in \mathfrak{U}'$. Unter dem (Faltungs-)Produkt zweier Maße μ und ν versteht man bekanntlich das Maß $\mu\nu$, gegeben durch $\mu\nu(f) = \int\int f(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$ für alle $f \in C(G)$.

Ist $\mu \in M(G)$, so bezeichnen wir mit μ^* das Maß, das durch

$$\mu^*(f) = \int f(x^{-1})\, d\mu(x)$$

definiert ist.

Besonders wichtig sind die idempotenten Maße, d. h. die Maße ν mit $\nu^2 = \nu$. Ein Maß ν ist genau dann idempotent, wenn es Haarsches Maß auf einer kompakten Untergruppe H von G ist (vgl. J. G. WENDEL [*17*]).

Unter dem Träger $Tr\,\mu$ eines Maßes μ versteht man das Komplement der größten offenen Menge V, für die $\mu(V) = 0$ gilt. Sind μ und $\nu \in M(G)$, dann gilt $Tr\,\mu\nu = Tr\,\mu \cdot Tr\,\nu$. Von wesentlicher Bedeutung für das Folgende ist auch die Gleichung $\mu\nu(U) = \mu(U)\,\nu(U)$, die für je zwei Maße μ und ν und jede Darstellung $U \in \mathfrak{U}$ erfüllt ist.

Die Gruppe G kann in $M(G)$ topologisch isomorph eingebettet werden durch die Zuordnung: $g \in G \rightarrow \varepsilon_g \in M(G)$, wobei ε_g das im Punkt g konzentrierte Maß ist ($\varepsilon_g(f) = f(g)$ für jedes $f \in C(G)$). Wenn keinerlei Mißverständnis zu befürchten ist, schreiben wir statt ε_g kurz g.

Im folgenden benötigen wir öfter den Begriff der Norm einer Matrix A. Wir verstehen darunter $\|A\| = \sup\limits_{|\mathfrak{x}| \leq 1} |A\,\mathfrak{x}|$. Dabei bedeutet

$$|\mathfrak{x}| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_k|^2}$$

die euklidische Länge des Vektors $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots x_k)$.

Beim Beweis des verallgemeinerten Hauptsatzes der Theorie der Gleichverteilung brauchen wir überdies ein Skalarprodukt im Raum aller Matrizen einer gegebenen Ordnung. Das sei gegeben durch $(A/B) = Sp(B^*A)$. ($B^* = (\overline{b_{ki}})$, wenn $B = (b_{ik})$). Die zugehörige Norm bezeichnen wir mit $\|A\|_2$, also $\|A\|_2^2 = (A/A)$. Für die verwendeten Begriffe und Sätze aus der Theorie der Gleichverteilung sei auf den Bericht [*4*] verwiesen.

§ 2. Definition der Gleichverteilung und Hauptsatz

Definition 1. Eine Folge von Maßen $\mu_n \in M(G)$ besitzt das Verteilungsmaß ν, wenn für jedes $f \in C(G)$ gilt

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu_n(f) = \nu(f). \tag{1}$$

Die Folge $\{\mu_n\}$ besitzt also genau dann das Verteilungsmaß ν, wenn die Folge $\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu_n\right\}$ schwach gegen ν strebt. Wir nennen ν ein Häufungsmaß der Folge $\{\mu_n\}$, wenn $\nu \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geq n} \nu_k}$ gilt. Dabei ist $\nu_k = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\mu_n$ und der Querstrich bedeutet den Abschluß in der schwachen Topologie. Aus der Kompaktheit von $M(G)$ folgt, daß jede Folge $\{\mu_n\}$ mindestens ein Häufungsmaß besitzt. Sie besitzt genau dann ein Verteilungsmaß, wenn alle Häufungsmaße einander gleich sind.

Eine unmittelbare Folgerung aus Definition 1 und dem Satz von PETER-WEYL ist der folgende Satz, den wir auch als Weylsches Kriterium bezeichnen wollen.

Satz 1. *Die Folge $\{\mu_n\}$ besitzt genau dann das Verteilungsmaß ν, wenn für jedes $U \in \mathfrak{U}'$*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu_n(U) = \nu(U) \tag{2}$$

gilt.

Besitzt eine Folge $\{\mu_n\}$ das Haarsche Maß λ auf G als Verteilungsmaß, so nennen wir sie gleichverteilt.

In der Theorie der Gleichverteilung spielt der van der Corputsche Hauptsatz eine dominierende Rolle. Er lautet in der ursprünglichen Gestalt (aber gleich für beliebige kompakte Gruppen formuliert): Ist $\{x_n\}$ eine Folge von Elementen aus G und ist für jede natürliche Zahl $h = 1, 2, 3, \ldots$ die Folge $\{x_{n+h}x_n^{-1}\}$ gleichverteilt, dann auch die Folge $\{x_n\}$ selbst. (Der Begriff der Gleichverteilung einer Folge von Elementen $x_n \in G$ ist natürlich in Definition 1 enthalten. Man wähle nämlich für μ_n das im Punkt x_n konzentrierte Maß). Dieser Satz wurde bereits mehrfach verallgemeinert (s. J. G. VAN DER CORPUT [*5*], E. HLAWKA [*9, 10*], und J. CIGLER [*3*]). Wir wollen nun die Ergebnisse von [*3*] auf den vorliegenden Fall übertragen.

Satz 2 (Hauptsatz). *Die Folgen $\{\mu_{n+h}\mu_n^*\}$ mögen das Verteilungsmaß ν_h besitzen $(h = 0, 1, 2, 3, \ldots)$. Ist die Folge $\{\nu_h\}$ gleichverteilt, dann auch die Folge $\{\mu_n\}$. Ist für eine natürliche Zahl l die Folge $\{\nu_{hl}\}$ gleichverteilt, dann auch die Folge $\{\mu_{nl+j}\}$ $(0 \leqq j < l)$.*

Beweis. Der Beweis verläuft ganz analog zu den Ausführungen in [*3*]. Wir deuten ihn daher nur kurz an.

Sei

$$\nu_h = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu_{n+h}\mu_n^* .$$

Für $U \in \mathfrak{U}'$ setzen wir $\gamma_U(h) = (\nu_h(U)/E)$, wobei E die Einheitsmatrix bedeutet. Dann ist $\gamma_U(h)$ positiv definit. Denn sind λ_p beliebige komplexe Zahlen, dann gilt

$$\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \lambda_p \bar{\lambda}_q \gamma_U(p-q) = \sum_p \sum_q \lambda_p \bar{\lambda}_q \left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu_{n+p}\,\mu^*{}_{n+q}(U) | E \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_p \sum_q \lambda_p \bar{\lambda}_q \mu_{n+p}\,\mu_{n+q}^*(U) | E \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_p \lambda_p \mu_{n+p}(U) \,|\, \sum_p \lambda_p \mu_{n+p}\,(U) \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \| \sum_p \lambda_p \mu_{n+p}(U) \|_2^2 \geqq 0 .$$

Aus [*3*] Satz 4 folgt nun: Ist

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{N} \gamma_U(h) = 0 ,$$

dann ist auch

$$\left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu_n(U) \,|\, E \right) = 0 ,$$

d. h. aus

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \nu_h(U) = 0 \quad \text{folgt} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu_n(U) = 0 .$$

Da $U \in \mathfrak{U}'$ beliebig war, ergibt sich somit: Aus

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \nu_h = \lambda \quad \text{folgt} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu_n = \lambda$$

und das ist gerade die Behauptung des ersten Teiles von Satz 2. Der zweite Teil wird ganz analog bewiesen (vgl. [*3*] Satz 6).

Bemerkung. In [*3*] legten wir statt des arithmetischen Mittels in der Definition der Gleichverteilung beliebige stark reguläre Toeplitzmatrizen zugrunde. Satz 2 gilt natürlich auch für diesen Fall.

§ 3. Folgen von Potenzen μ^n

Wir betrachten nun ausführlich den Fall der Folgen $\mu_n = \mu^n$.

Satz 3. *Für $\mu \in M(G)$ besitzt die Folge $\{\mu^n\}$ stets ein Verteilungsmaß.*

Beweis. Sei $U \in \mathfrak{U}'$ fest und $\nu(U)$ ein beliebiger Häufungswert der Folge $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^n(U)$. Dann gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$ und unendlich viele N

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^n(U) - \nu(U) \right\| < \varepsilon/2$$

und da stets $\|\mu(U)\| \leqq 1$ gilt, auch

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^{n+1}(U) - \mu(U)\,\nu(U) \right\| < \varepsilon/2 .$$

Wegen

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^n(U) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^{n+1}(U) \right\| \leqq 2/N$$

gilt für hinreichend große N $\|\mu(U)\nu(U) - \nu(U)\| < \varepsilon$.

Da das für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ergibt sich somit $\mu(U)\,\nu(U) = \nu(U)$. Es folgt weiter $\mu^k(U)\,\nu(U) = \nu(U)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ und daher für jedes N $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^n(U)\,\nu(U) = \nu(U)$ woraus sich für $N \to \infty$ die Beziehung $(\nu(U))^2 = \nu(U)$ ergibt.

Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Häufungswerte der Folge $\{\mu^n(U)\}$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ natürliche Zahlen M und N mit

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^n(U) - \nu_1(U) \right\| < \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad \left\| \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mu^m(U) - \nu_2(U) \right\| < \varepsilon/2 .$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\nu_1(U) - \nu_2(U)\| &\leqq \left\| \nu_1(U) - \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^n(U)\right)\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mu^m(U)\right) \right\| + \\
&+ \left\| \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^n(U)\right)\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mu^m(U)\right) - \nu_2(U) \right\| = \\
&= \left\| \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mu^m(U)\right)\left(\nu_1(U) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^n(U)\right) \right\| + \\
&+ \left\| \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^n(U)\right)\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mu^m(U) - \nu_2(U)\right) \right\| < \varepsilon .
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch. Also existiert für jedes $U \in \mathfrak{U}'$ der Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu^n(U) = \nu(U).$$

Die Folge $\{\mu^n\}$ besitzt daher ein Verteilungsmaß ν, für das offensichtlich $\mu\nu = \nu$ und $\nu^2 = \nu$ gilt.
Da ν idempotent ist, ist es das Haarsche Maß auf einer kompakten Untergruppe H von G. Es gilt überdies $Tr\mu \subseteq H$. Das ergibt sich aus $\mu\nu = \nu$. Denn es ist dann $Tr\mu\ Tr\nu = Tr\nu = H$, und das ist nur möglich, wenn $Tr\mu \subseteq H$ ist.

Wir leiten jetzt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gleichverteilung ab.

Satz 4. *Die Folge $\{\mu^n\}$ ist genau dann gleichverteilt, wenn für jedes $U \in \mathfrak{U}'$ mit $\|\mu(U)\| = 1$ gilt* $\det(\mu(U) - E) \neq 0$.

Bemerkung. Satz 4 besagt offenbar, daß $\{\mu^n\}$ genau dann gleichverteilt ist, wenn $\mu(U)$ für kein $U \in \mathfrak{U}'$ den Eigenwert 1 besitzt. Für den Spezialfall $\mu = x \in G$ stammt dieses Kriterium von B. Eckmann [6]. In diesem Fall wird die Gruppe G von den Potenzen von x erzeugt, sie ist also insbesondere abelsch.

Beweis. Wir beweisen zuerst die Notwendigkeit der Bedingung in Satz 4. Sei also $\{\mu^n\}$ gleichverteilt und $U \in \mathfrak{U}'$. Dann gilt $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} \mu^n(U) = 0$. Sei $\|\mu(U)\| = 1$. Wäre nun $\det(\mu(U) - E) = 0$, dann gäbe es einen Vektor $\mathfrak{x} \neq 0$ mit $\mu(U)\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$. Es wäre daher auch $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} \mu^n(U)\mathfrak{x} = \mathfrak{x} \neq 0$ und das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Bedingung ist auch hinreichend. Ist nämlich $\|\mu(U)\| < 1$, dann gilt trivialerweise $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} \mu^n(U) = 0$.

Sei also $\|\mu(U)\| = 1$. Wir setzen $S_N = \mu(U) + (\mu(U))^2 + \cdots + (\mu(U))^N$. Dann gilt $S_N\mu(U) - S_N = \mu^{N+1}(U) - \mu(U)$. Für S_N ergibt sich also $S_N = (\mu^{N+1}(U) - \mu(U))(\mu(U) - E)^{-1}$. Daraus folgt sofort $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{S_N}{N} = 0$.

Ebenso ergibt sich der

Korollar. *Die Folgen $\{\mu^{kn}\}$ sind für jedes $k = 1, 2, 3, \ldots$ gleichverteilt genau dann, wenn für jedes $U \in \mathfrak{U}'$ mit $\|\mu(U)\| = 1$ $\det(\mu^k(U) - E) \neq 0$ gilt, m. a. W., wenn kein Eigenwert von $\mu(U)$ eine Einheitswurzel ist.*

Ist G zusammenhängend und abelsch, dann folgt aus der Gleichverteilung der Potenzen $\{x^n\}$ des Gruppenelementes x stets die Gleichverteilung der Folgen $\{x^{kn}\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Ein Analogon zu diesem Resultat stellt der folgende Satz dar.

Satz 5. *Sei T ein stetiger Endomorphismus von G auf sich. $T\mu$ sei durch $T\mu(f) = \int f(Tx)\,d\mu(x)$ definiert. Dann folgt aus der Gleichverteilung der Folge $\{\mu^n\}$ auch die Gleichverteilung der Folge $\{(T\mu)^n\}$.*

Beweis. Ist U eine nichttriviale Darstellung von G, dann auch $TU = U(Tg)$. Da nach Voraussetzung für alle $U \in \mathfrak{U}'$ $\det(\mu(U) - E) \neq 0$ ist, gilt dasselbe auch für alle TU.

Eine weitere wichtige Frage ist es, zu untersuchen, wann in den betrachteten Fällen sogar Konvergenz eintritt.

Satz 6. *Notwendig und hinreichend für die Konvergenz der Folge* $\{\mu^n\}$ *gegen das Haarsche Maß* λ *fau* G *ist, daß für* $U \in \mathfrak{U}'$ *kein Eigenwert von* $\mu(U)$ *den Betrag* 1 *besitzt.*

Angenommen, ein Eigenwert ϱ von $\mu(U)$ hätte den Betrag 1. Dann existiert ein $\mathfrak{x} \neq 0$ mit $\mu(U)\mathfrak{x} = \varrho\mathfrak{x}$. Daraus ergibt sich $\mu^n(U)\mathfrak{x} = \varrho^n\mathfrak{x}$. Konvergenz kann nur für $\varrho = 1$ eintreten. Dieser Fall ist aber unmöglich, weil sonst

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^n(U)\mathfrak{x} = \mathfrak{x} \neq 0$$

wäre. Daß die Bedingung hinreichend ist, zeigt man genauso.

Analog zu Satz 4 und Satz 6 zeigt man leicht die folgenden Sätze.

Satz 7. *Die Folge* $\{\mu^n\}$ *besitzt genau dann das Verteilungsmaß* ν, *wenn* $\mu\nu = \nu\mu = \nu$ *gilt und für jedes* $U \in \mathfrak{U}'$

$$\|(\mu - \nu)(U)\| \leqq 1 \text{ und } \det((\mu - \nu)(U) - E) \neq 0$$

gilt.

Bemerkung. Das Maß ν ist dann natürlich idempotent und daher das Haarsche Maß auf einer kompakten Untergruppe von G.

Satz 8. *Notwendig und hinreichend für die Konvergenz von* $\{\mu^n\}$ *ist die folgende Bedingung: Für jeden Eigenwert* ϱ *von* $\mu(U)$ $(U \in \mathfrak{U}')$ *gilt entweder* $|\varrho| < 1$ *oder* $\varrho = 1$.

Korollar. *Ist* $\mu \in M(G)$, *dann ist die Folge* $(\mu\mu^*)^n$ *stets konvergent.*

Beweis. Sei $U \in \mathfrak{U}'$. Die Matrix $\mu\mu^*(U) = \mu(U)\mu^*(U) = \mu(U)(\mu(U))^*$ besitzt nur positive Eigenwerte, denn sei $\mu\mu^*(U)\mathfrak{x} = \varrho\mathfrak{x}$, dann gilt, wenn $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ das innere Produkt der Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bedeutet

$$\varrho(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (\varrho\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (\mu\mu^*(U)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (\mu^*(U)\mathfrak{x}, \mu^*(U)\mathfrak{x}) \geqq 0.$$

Jeder Eigenwert ist also nichtnegativ und entweder kleiner 1 oder gleich 1. Daraus folgt nach Satz 8 die Behauptung.

Wir bezeichnen nun mit $[Tr\,\mu]$ die kleinste abgeschlossene Untergruppe H von G, die $Tr\,\mu$ enthält.

Satz 9. (ITO-KAWADA [*12*], GLICKSBERG [*7*].) *Das Verteilungsmaß* ν *der Folge* $\{\mu^n\}$ *ist das Haarsche Maß auf der Untergruppe* $[Tr\,\mu]$.

Beweis. Sei ν das Verteilungsmaß der Folge $\{\mu^n\}$. Dann gilt $Tr\,\mu \subseteq Tr\,\nu = H$, also auch $[Tr\,\mu] \subseteq H$.

Ang. $[Tr\,\mu] = H_1 \neq H = Tr\,\nu$. Dann sei ν_1 das Haarsche Maß auf H_1. Es gilt $\mu\nu_1 = \nu_1$ und daher $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu^n\nu_1 = \nu_1$. Es wäre somit $\nu = \nu\nu_1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu^n\nu_1 = \nu_1$, und das ist ein Widerspruch zur Annahme.

Satz 10. (URBANIK [*15*], KLOSS [*13*].) *Für die Konvergenz der Folge* $\{\mu^n\}$ *ist notwendig und hinreichend, daß*

$$[Tr\,\mu] = [Tr(\mu\mu^*)] = [Tr\,\mu(Tr\,\mu)^{-1}] \tag{3}$$

gilt.

Wir führen den Beweis für den Fall $\mu\mu^* = \mu^*\mu$ durch. Der allgemeine Fall geht analog unter Benützung eines bekannten Satzes von H. WEYL über die Eigenwerte der Matrizen A und A^*A.

Beweis. Sei (3) erfüllt. Dann gilt nach Satz 9

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^n = \lim_{n\to\infty} (\mu\mu^*)^n = \nu .$$

Sei $U \in \mathfrak{U}'$. Die Matrix $\nu(U)$ besitzt wegen der Idempotenz von ν als Eigenwerte nur die Zahlen 0 und 1. Die Matrizen $(\mu\mu^*)^n(U)$ streben gegen $\nu(U)$ und daher die Eigenwerte σ_i^n von $(\mu\mu^*)^n(U)$ gegen die Eigenwerte von $\nu(U)$. Wegen $\sigma_i \geqq 0$ strebt σ_i^n genau dann gegen 1, wenn $\sigma_i = 1$ ist. Für die Eigenwerte ϱ_i von $\mu(U)$ gilt $|\varrho_i|^2 = \sigma_i$. Ist $\sigma_i = 1$, dann gilt $|\varrho_i| = 1$. Ang. es wäre $\varrho_i \neq 1$, dann wäre

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varrho_i^n = 0\,, \text{ d.h. } \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\mu(U))^n = \nu_0(U) \neq \nu(U)\,.$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Es ist also $\varrho_i = 1$. Daraus folgt nun nach Satz 8 die Konvergenz der Folge $\{\mu^n\}$.

Ist umgekehrt $\{\mu^n\}$ konvergent, dann ist entweder $|\varrho_i| < 1$ oder $\varrho_i = 1$. Dasselbe gilt für σ_i, die Folgen $\{\mu^n\}$ und $\{(\mu\mu^*)^n\}$ konvergieren also beide gegen dasselbe Maß. Für den Träger dieses Maßes gilt dann natürlich (3).

Bemerkung. Alle Sätze dieses Paragraphen bleiben richtig, wenn man in der Definition der Gleichverteilung an Stelle des arithmetischen Mittels beliebige stark reguläre Toeplitzverfahren zuläßt. Überdies ist die Beschränkung auf positive Maße für die Sätze 3 bis 8 überflüssig. Man kann beliebige reelle Radonmaße zulassen, ohne diese Resultate zu ändern. Satz 3 ist sogar noch für beliebige komplexe Radonmaße richtig. Die Charakterisierung der idempotenten Maße als Haarsche Maße auf Untergruppen ist dann natürlich nicht mehr möglich.

In der Theorie der Gleichverteilung mod 1 zeigt man u. a. den Satz: Ist ϑ eine irrationale Zahl, dann ist nicht nur die Folge $\{n\vartheta\}$ gleichverteilt mod 1, sondern sogar die Folge $\{P(n)\vartheta\}$, wobei $P(n)$ ein beliebiges Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten bedeutet. Auch dieser Satz besitzt ein Analogon für Maße auf kompakten Gruppen. Allerdings sind noch einige zusätzliche Voraussetzungen erforderlich.

Satz 11. *Ist für jedes $U \in \mathfrak{U}'$ mit $\|\mu(U)\| = 1$*

$$\det(\mu^k(U) - E) \neq 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

und gilt überdies $\mu\mu^* = \mu^*\mu$, dann ist die Folge $\{\mu^{P_l(n)}\}$ gleichverteilt, wenn $P_l(n)$ ein beliebiges Polynom l-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten bedeutet.

Beweis. Wir wenden Induktion nach l an. Für $l = 1$ ist der Satz richtig (Korollar zu Satz 4). Es sei also $l > 1$ und der Satz bereits für alle Polynome vom Grad $l - 1$ bewiesen. Dann ist, wenn wir das Polynom $(l-1)$-ten Grades $P_l(n+h) - P_l(n)$ kurz mit $P_{l-1}(n)$ bezeichnen,

$$\mu^{P_l(n+h)}\,\mu^{*P_l(n)} = \mu^{P_l(n)+(P_l(n+h)-P_l(n))}\,\mu^{*P_l(n)} = \mu^{P_{l-1}(n)}\,(\mu\mu^*)^{P_l(n)}\,.$$

Die Folge $\{\mu\mu^*)^n\}$ konvergiert auf Grund des Korollars nach Satz 8 gegen ein Maß ν. Daher gilt

$$\nu_h = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^{P_l(n+h)}\,\mu^{*P_l(n)} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu^{P_{l-1}(n)}\right) \nu = \lambda\,,$$

da die Folge $\{\mu^{p_{l-1}(n)}\}$ nach Induktionsvoraussetzung gleichverteilt ist. Es ist also $\nu_h = \lambda$ für $h = 1, 2, 3, \ldots$ und somit gilt $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum\limits_{h=1}^{N} \nu_h = \lambda$. Nach Satz 2 ergibt sich daraus die Gleichverteilung der Folge $\{\mu^{p_l(n)}\}$.

Unsere Resultate lassen sich ohne Schwierigkeiten auch auf Mehrfachfolgen übertragen. Wir sagen, die Folge $\{\mu_1^{n_1}\ldots\mu_k^{n_k}\}$ besitzt das Verteilungsmaß ν, wenn

$$\lim_{N_1,\ldots N_k\to\infty} \frac{1}{N_1 N_2\ldots N_k}\sum_{n_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{n_k=1}^{N_k}\mu_1^{n_1}\ldots\mu_k^{n_k} = \nu$$

gilt, wobei $N_1, \ldots, N_k$ unabhängig voneinander gegen Unendlich streben. Es gilt der

Satz 12. *Besitzt* $\{\mu_j^n\}$ *das Verteilungsmaß* ν_j $(j = 1, 2, 3, \ldots k)$, *dann besitzt die Folge* $\{\mu_1^{n_1}\ldots\mu_k^{n_k}\}$ *das Verteilungsmaß* $\nu_1\nu_2\ldots\nu_k$.

Beweis. Das folgt aus der Gleichung

$$\frac{1}{N_1 N_2\ldots N_k}\sum_{n_1}\cdots\sum_{n_k}\mu_1^{n_1}\ldots\mu_k^{n_k} = \left(\frac{1}{N_1}\sum_{n_1}\mu_1^{n_1}\right)\left(\frac{1}{N_2}\sum_{n_2}\mu_2^{n_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{N_k}\sum_{n_k}\mu_k^{n_k}\right).$$

Korollar 1. *Die Folge* $\{\mu_1^{n_1}\ldots\mu_k^{n_k}\}$ *ist genau dann gleichverteilt, wenn für beliebige Häufungsmaße* ν_j *der Folgen* $\{\mu_i^n\}$ gilt $\nu_1\nu_2\ldots\nu_k = \lambda$.

Korollar 2. (HELMBERG [8].) *Gibt es für jedes* $U \in \mathfrak{U}'$ *mindestens ein* j *mit* det $(\mu_j(U) - E) \neq 0$, *dann ist die Folge* $\{\mu_1^{n_1}\ldots\mu_k^{n_k}\}$ *gleichverteilt.*

Diese Bedingung ist i. a. natürlich nicht notwendig.

§ 4. Gleichverteilung auf der Zahlengeraden

Sei R die additive Gruppe der reellen Zahlen. Sie ist lokalkompakt, aber nicht kompakt. Geht man zur fastperiodischen Kompaktifizierung über, so kann man Teile der vorangegangenen Theorie auch auf diesen Fall übertragen. Es erweist sich jedoch als zweckmäßig, die „natürliche" Topologie auf R beizubehalten und stattdessen den Begriff der Gleichverteilung zu modifizieren.

Definition 2. Eine Folge $\{\mu_n\}$ von beschränkten normierten Maßen auf R heißt gleichverteilt, wenn für jede stetige fastperiodische Funktion f auf R

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu_n(f) = M(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt \tag{4}$$

gilt.

Satz 13. (*Weylsches Kriterium.*) *Die Folge* $\{\mu_n\}$ *ist genau dann gleichverteilt in* R, *wenn für jeden nichttrivialen stetigen Charakter* $\chi(x) = e^{2\pi i t x}$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu_n(\chi) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t x}\,d\mu_n(x) = 0 \tag{5}$$

gilt.

Beweis. Der Beweis ergibt sich einfach daraus, daß sich jede stetige fastperiodische Funktion f auf R gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximieren läßt.

Es gilt auch in diesem Fall der Hauptsatz:

Satz 14. *Ist für* $h = 1, 2, 3, \ldots$ *die Folge* $\{\mu_{n+h}\mu_n^*\}$ *gleichverteilt in* R, *dann auch die Folge* $\{\mu_n\}$.

Beweis. Analog wie bei Satz 2.

Wir betrachten zuerst gleichverteilte Folgen von reellen Zahlen. Aus (5) ergibt sich, daß die Folge $\{x_n\}$ genau dann in R gleichverteilt ist, wenn für jede reelle Zahl $t \neq 0$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i t\, x_n} = 0 \text{ gilt.}$$

Es ist klar, daß die Folge $\{n\vartheta\}$ für kein reelles ϑ gleichverteilt in R ist. Wählt man nämlich $t = 1/\vartheta$, so ergibt sich

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \frac{1}{\vartheta} n\vartheta} = 1 \neq 0.$$

Es gilt der

Satz 15. *Die Folge* $\{x_n\}$ *ist genau dann in* R *gleichverteilt, wenn die Folge* $\{tx_n\}$ *für jedes reelle* $t \neq 0$ *gleichverteilt* mod 1 *ist.*

Beweis. Das ergibt sich unmittelbar durch Vergleich der Definitionen der Gleichverteilung in R und der Gleichverteilung mod 1 (für letztere vgl. man [*4*]).

Derartige Folgen sind z. B. gegeben durch $x_n = g(n)$, wobei $g(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion ist, die die Fejérschen Bedingungen erfüllt, d. h. daß sie für x gegen Unendlich monoton gegen Unendlich strebt, während ihre Ableitung monoton gegen Null und $xf'(x)$ gegen Unendlich strebt. Also z. B. $g(n) = m^\sigma$ $(0 < \sigma < 1)$ oder $(\log n)^\tau$ $(\tau > 1)$.

Durch iterierte Anwendung des Hauptsatzes ergibt sich dann auch die Gleichverteilung von $\{n^\sigma\}$ für beliebiges $\sigma > 0$ mit $\sigma \not\equiv 0 \pmod 1$. Wie man leicht sieht, besteht eine notwendige Bedingung für die Gleichverteilung einer Folge $\{x_n\}$ in R darin, daß sie nicht beschränkt ist.

Wir wollen nun weitere Beispiele für in R gleichverteilte Folgen von Maßen geben.

Das positive normierte Maß μ lasse sich in der Form $\mu = \exp(\nu)$ darstellen, wobei ν ein Maß auf R ist, d. h. es gelte

$$\mu = \varepsilon_0 + \frac{\nu}{1!} + \frac{\nu^2}{2!} + \cdots + \frac{\nu^k}{k!} + \cdots$$

(Das Maß ν ist dann natürlich nicht mehr positiv, d. h. aus $f \geqq 0$ folgt nicht notwendig $\nu(f) \geqq 0$. Überdies gilt $\nu(1) = 0$.) Durch $\mu_t = \exp(t\nu)$ ist ein schwachstetiger Homomorphismus von $[0, \infty]$ in die Menge der positiven normierten Maße auf R gegeben. Denn offenbar ist $\mu_{t+s} = \mu_t\mu_s$ und ist f eine beliebige beschränkte stetige Funktion auf R, dann gilt $\lim\limits_{t\to 0} \mu_t(f) = \mu_0(f)$.

Es gilt nun der folgende

Satz 16. *Ist* $\{x_n\}$ *eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen, die in* R *gleichverteilt ist und ist* $\mu = \exp \nu$, *wobei* $\nu(\chi) \neq 0$ *für jeden nichttrivialen Charakter* χ *auf* R *gilt, dann ist auch die Folge* $\mu_{x_n} = \exp(x_n\nu)$ *gleichverteilt in* R.

Beweis. Ist $|\mu(\chi)| < 1$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} (\mu(\chi))^{x_n} = 0$. Es sei also $|\mu(\chi)| = 1$. Dann ist $\mu(\chi) \neq 1$. Also ist $\mu(\chi) = e^{2\pi i t}$ für ein passendes $t \neq 0$ und $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} e^{2\pi i x_n t} = 0$, da die Folge $\{x_n\}$ in R gleichverteilt ist.

§ 5. Beispiele gleichverteilter Folgen

Wir wollen nun wieder voraussetzen, daß G eine kompakte Gruppe ist. Ein Maß μ aus $M(G)$ heiße ein Poissonmaß, wenn gilt

$$\mu = \exp_H(\nu) = \varepsilon_H + \frac{\nu}{1!} + \frac{\nu^2}{2!} + \cdots + \frac{\nu^k}{k!} + \cdots .$$

Dabei bedeutet ε_H das Haarsche Maß einer kompakten Untergruppe H von G. Für ν gilt $\varepsilon_H \nu = \nu \varepsilon_H = \nu$. Außerdem ist $\nu(1) = 0$ und für jedes $f \in C(G)$ mit $f \geqq 0$ und $f(x) = 0$ für $x \in H$ gilt $\nu(f) \geqq 0$. (Die hier gegebene Definition des Poissonmaßes stammt von W. BÖGE [*1*]; Spezialfälle wurden von K. URBANIK [*16*] und E. HLAWKA [*11*] angegeben.)

Es gilt nun der folgende

Satz 17. *Sei $\mu \in M(G)$ ein Poissonmaß, $\mu = \exp_H \nu$ und sei überdies $\mu\mu^* = \mu^*\mu$. Gilt für jedes $U \in \mathfrak{U}'$ $\det(\mu(U) - E) \neq 0$ und ist $\{x_n\}$ eine monoton wachsende in R gleichverteilte Folge reeller Zahlen, dann ist die Folge $\mu_n = \exp_H(x_n \nu)$ gleichverteilt auf G.*

Beweis. Wegen $\mu\mu^* = \mu^*\mu$ gilt für $U \in \mathfrak{U}$ $\mu(U)\mu^*(U) = \mu^*(U)\mu(U)$ und daraus ergibt sich bekanntlich, daß die Matrix $\mu(U)$ durch eine unitäre Transformation auf Diagonalform gebracht werden kann. Man kann daher o.B.d.A. annehmen (sonst gehe man zu einer äquivalenten Darstellung über), daß $\mu(U) = \varDelta$ eine Diagonalmatrix ist. Nach Voraussetzung ist kein Eigenwert von $\varDelta$ gleich 1. Für jeden Eigenwert ϱ_j gilt daher $\varrho_j = e^{2\pi i t_j}$ mit $t_j \neq 0$ oder $|\varrho_j| < 1$. Ist $|\varrho_j| < 1$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |\varrho_j^{x_n}| = 0$. Ist $\varrho_j = e^{2\pi i t_j}$, dann ist der entsprechende Eigenwert von $\exp_H(x_n\nu)\,(U)$ gegeben durch $e^{2\pi i x_n t_j}$. Es gilt aber nach Voraussetzung

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i x_n t_j} = 0 .$$

Daher gilt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp_H(x_n \nu) = \lambda .$$

Literatur

[*1*] BÖGE, W.: Zur Charakterisierung unendlich teilbarer Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf lokalkompakten Gruppen. Unveröffentlichtes Manuskript.

[*2*] CIGLER, J.: Der individuelle Ergodensatz in der Theorie der Gleichverteilung mod 1. J. reine angew. Math. **205**, 91—100 (1960).

[*3*] CIGLER, J.: Über eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Theorie der Gleichverteilung. J. reine angew. Math. Im Druck.

[*4*] CIGLER, J. und G. HELMBERG: Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung. J.-Ber. Deutsch. Math. Verein **64**, 1—50 (1961).

[*5*] CORPUT, J. G. VAN DER: Diophantische Ungleichungen I. Zur Gleichverteilung modulo Eins. Acta math. **56**, 373—456 (1931).

[*6*] ECKMANN, B.: Über monothetische Gruppen. Commentarii math. Helvet. **16**, 249—263 (1943/44).

[*7*] GLICKSBERG, I.: Convolution semigroups of measures. Pacific J. Math. **9**, 51—67 (1959).

[*8*] HELMBERG, G.: A theorem on equidistribution in compact groups. Pacific J. Math. **8**, 227—241 (1958).

[9] Hlawka, E.: Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **4**, 33–47 (1955).
[10] Hlawka, E.: Zum Hauptsatz der Theorie der Gleichverteilung. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. Anzeiger **1957**, 313–317.
[11] Hlawka, E.: Statistik auf kompakten Gruppen I. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. Anzeiger **1959**, 13–24.
[12] Ito, K., and Y. Kawada: On the probability distribution on a compact group. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **22**, 977–998 (1940).
[13] Kloss, B. M.: Über Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf kompakten topologischen Gruppen (russ.). Teor. Verojatn. Primen. **4** (1959).
[14] Prékopa, A., A. Rényi und K. Urbanik: Über die Grenzwahrscheinlichkeit von Summen unabhängiger Zufallsvariablen auf kompakten kommutativen topologischen Gruppen (russ.). Acta math. Acad. Sci. Hungar. **7**, 11–16 (1956).
[15] Urbanik, K.: On the limiting probability distribution on a compact topological group. Fund. Math. **44**, 243–261 (1957).
[16] Urbanik, K.: Poisson distributions on compact abelian topological groups. Colloquium math. **6**, 13–24 (1958).
[17] Wendel, J. G.: Haar measure and the semigroup of measures on a compact group. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 923–929 (1954).

Mathematisches Institut
der Universität
Wien IX
Strudlhofgasse 4

(Eingegangen am 6. November 1961)