Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 11, 311–326 (1969)

Sur la structure des lois indéfiniment divisibles (classe $\mathfrak{I}$ (X)) dans les espaces vectoriels X (sur le corps réel)

A. Tortrat

Reçu le premier décembre 1967

Summary. This work is a continuation of [7], and also considers the more general case of (probability) laws which are not tight. The main results are:

1. The good representation $\nu = e(F)$ for all tight laws of infinitely divisible Poisson type, in any polish (linear locally convex) space, and a theorem of accompanying law (corollaries 2 and 3 of theorem II).

2. An extension of a theorem of Lee (example following theorem I.2).

3. A formula of P. Levy for any infinitely divisible law, tight following compact sets of hilbertian separable type, in any linear (locally convex) space.

Introduction

Monsieur Lee a récemment (c.f. [4]) dans des cas particuliers envisagé le point de vue suivant:

X est plongé dans un espace R^T de trajectoires ($t \in T$ est le paramètre réel «temps»), muni de la topologie produit (des topologies des R_t), et de la tribu temporelle $\mathfrak{L}$, la plus petite rendant mesurables les v.a. x_t, à valeurs dans R espace vectoriel topologique muni de ses propres tribus cylindrique $\mathfrak{L}_R$ et borélienne $\mathfrak{B}_R$: $\mathfrak{L}$ est donc la tribu produit (notée $\prod \mathfrak{B}_t$).

Supposons qu'une loi μ donnée sur $\mathfrak{L}$ soit indéfiniment divisible[1] *et* «portée» par X: soit que $X \in \mathfrak{L}$, $\mu X = 1$, soit que la mesure extérieure $\mu^* X$ égale 1, ce qui est la situation générale (par raison de symétrie) lorsque T n'est pas dénombrable. On peut alors considérer la restriction μ_X de μ à $(X, X \cap \mathfrak{L})$.

Ce point de vue n'est pas très différent de celui qui consiste à partir directement de X muni d'une topologie $\mathfrak{C}$, et de la tribu cylindrique $\mathfrak{L}_Y$ que définit son dual Y. Etudier μ et des lois qui lui sont liées, dans X, en particulier leur σ-additivité sur $\mathfrak{L}_Y$, revient à plonger X dans R^Y [2] (R droite réelle), $\mathfrak{L}_Y$ devenant la tribu tem-

[1] Dans R^T, ce qui ne pose aucun problème, il est nècessaire et suffisant que les projections I-dimensionelles (I fini) $\in \mathfrak{J}(R^I)$ pour que les $\mu^{1/n}$ existent (dès que: toute loi dans R est parfaite).

[2] Plus exactement T divient l'espace quotient de Y par la droite réelle.

Abreviations

CV.	convergence
E.V.T.	espace vectoriel topologique
a. c., l. c.	absolument convexe, localement convexe
U.T.	uniformément tendue (famille de lois ou mesures)
K	désigne toujours un ensemble compact
$[\mu]$	variation totale de μ mesure bornée
$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{J}$	partie réelle, partie imaginaire de

porelle correspondante. Cependant l'identité n'est pas complète, l'étude suivant le deuxième point de vue suppose μ tendue (au moins faiblement); le premier point de vue est plus général mais avec des résultats plus faibles. Nous envisagerons, en I, une situation typique, celle où la projection de X sur chaque produit dénombrable R^Q (Q dense dans T) appartient à $\mathfrak{L}_Q = \prod_{t \in Q} \mathfrak{B}_t$ (et R en général polonais).

Dans les parties I et II nous reprenons les problèmes de structure étudiés dans [4] et [7]. En I nous prolongeons (à un contexte plus général et plus symétrique) ce qui nous parait être les deux principales idées de LEE dans [4]. Les problèmes, pour $\mu \in \mathfrak{J}(R^T)$ (soit $\mu^{1/n}$ existe sur $\mathfrak{B}$ pour chaque entier $n \geqq 2$) et $\mu^* X = 1$ sont:

1°) Séparer une composante normale ϱ, «*portée*» *elle aussi par* X (ainsi que la co-composante ν), si μ l'est; cette question n'est pas envisagée dans [4], et résolue dans [6] seulement si μ_X, dans X, est tendue. Cependant dans R^Q, s'il est polonais, cela est automatique, et le résultat s'étend alors à R^T, pour μ quelconque (de $\mathfrak{J}(R^T)$) — c.f. théorème I.1: le facteur ν restant est pour l'instant du type de Poisson en ce sens que ses projections fini-dimensionnelles *seulement* sont telles.

2°) Mettre la composante restante ν, dite «du type de Poisson» sous la forme $e(F)$, et étudier les propriétés de la définition obtenue (en particulier l'infinie divisibilité de $e(F)$). Dans R^T le premier point est trivial mais sa signification est faible *s'il se borne à la définition univoque de* ν *par ses projections* $\nu_{t_1 \ldots t_I}$ (dans R^I) en fonction de celles de F: lorsque F n'est pas bornée, ν est la limite de $e(F_U) * a_U$, les F_U étant les restrictions de F aux complémentaires de voisinages U de l'origine. La nature de ces U, et le type de CV obtenue ont de l'importance. Si $\nu^*(X) = 1$, le problème (considéré dans [4]) est de montrer F «portée» par X, puis de préciser le sens et les propriétés de $e(F)$. Dans la partie II nous donnans un résultat gènéral pour μt-régulière de $\mathfrak{J}(X)$, dont un corollaire est que $\mu = \varrho e(F)$ sans restrictions.

Dans la partie III nous abordons l'étude de conditions nécessaires et suffisantes pour que (nous plaçant dans le cas de lois tendues) la mesure F définisse $e(F)$, c.à.d. pour qu'il existe des $e(F_U) * a_U$ U.T. Il s'agit là d'une extension:

1°) des résultats de VARADHAN ([7]) dans un espace de Hilbert séparable (la méthode semblant particulière à ce cas et peu susceptible d'extension);

2°) de résultats dus à Monsieur FERNIQUE X. et qui lui ont permis une étude comparable, sous des hypothèses plus restrictives dues à l'absence du théorème de BADRIKIAN[3].

Nous utilisons deux lemmes (c.f. lemmes 5 et 3) de Mr. FERNIQUE que nous devons à son obligeance et nous l'en remercions à nouveau ici; sa méthode diffère ensuite de la nôtre en ce qu'il recherche les lois extrémales d'une certaine famille compacte convexe. On obtient donc la représentation de PAUL LEVY de lois t-régulières indéfiniment divisibles (la séparation d'une composante normale et d'une composante du type de Poisson est assurée (c.f. [6] partie IV), cela étant aussi un cas particulier du résultat gènéral susdit).

[3] Il faudrait dire théorème de MINLÖS-SCHWARTZ-BADRIKIAN, sans oublier les noms de PROHOROV et SAZONOV.

I. Etude des lois $\mu \in \mathfrak{J}(R^T)$ portées par un sous-espace vectoriel X

1. R dans tout ce qui suit désigne un espace vectoriel topologique (E.V.T.) localement convex (l.c.) séparé, muni de ses tribus cylindriques $\mathfrak{L}_R$ (définie par le dual R^* de R) et borélienne $\mathfrak{B}_R$ (engendrée par les ouverts de R). $\Omega = R^T$ est muni de la topologie produit et de la tribu $\mathfrak{L}$ cylindrique relativement aux projections $p_{t_1 \ldots t_I}\, \omega = \prod_1^I x_{t_i}(\omega)$ $(\omega = \{x_t\})$ dans R^I, c'est à dire la tribu engendrée par les $\{\omega\colon x_t(\omega) \in B$ de $\mathfrak{B}_R\}$ (ou les tribus borèliennes $\mathfrak{B}_t$ des R_t). La tribu borèlienne de Ω est $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{L}$. On a:

Lemme 1. *Le dual de R^T se compose des:*

(1) $$y = \sum_1^I y_i(x_{t_i}(\omega)), \qquad y_i \in R^*.$$

Prouvons ici cette proposition bien connue: pour y donné, $\exists$ un voisinage $U = \{\omega\colon\ x_{t_1} \in U_1, \ldots, x_{t_I} \in U_I\}$ de 0 dans Ω, dans lequel $|y(\omega)| < \varepsilon$, donc $|y(\omega)| < \varepsilon' \varepsilon$ dans $\varepsilon' U$, donc $y(\omega) = 0$ dans $X_0 = \{\omega\colon x_{t_i}(\omega) = 0,\ i = 1, \ldots, I\}$: y ne dépend de ω que modulo X_0, c'est une fonction linéaire définie (et continue) dans l'espace quotient Y/X_0, c'est à dire une fonction linéaire et continue des seules coordonnées x_{t_i} $(i = 1, \ldots, I)$.

Définition 1. Une loi ν de R^I (ou tout E.V.T. X) est dite „du type de Poisson" si ses projections finies dimensionnelles dans E^J (J fini, $E =$ droite réelle), définies par:

$$\prod_1^I x_i \to \prod_{j=1}^J \sum_{i=1}^I y_{ji}(x_i)$$

sont (indéfiniment divisibles) du type de Poisson. Cette définition ne fait intervenir ν que par sa restriction à $\prod_1^I \mathfrak{L}_{R_i}$ tribu cylindrique de R^I. Lorsque R est métrisable et séparable, $\mathfrak{L}_R = \mathfrak{B}_R$.

Remarque. Dans R polonais (donc dans R^Q), ces lois sont de la forme $e(F)$ au sens de la dèfinition 2 (c.f. I.2), mais avec unicité de F sur le σ-anneau $\dot{\mathfrak{A}}_R \subset \dot{\mathfrak{L}}_R$; voir le corollaire 3 du théorème II ci dessous.

Une loi ϱ dans un E.V.T. X est dite normale si ses projections fini-dimensionnelles dans E^J (définies par $\xi \to \prod_1^J y_j(\xi)$, $y_j \in$ dual de X) sont normales. Il suffit évidemment que cela soit vrai pour $J = 1$. ϱ est dite centrée (normale) si les v.a. $y(\xi)$ (de lois $y(\varrho)$) sont (normales) de moyennes nulles.

Rappels. μ mesure dans R^T (définie au moins sur $\mathfrak{L}$) est dite tendue si pour chaque $\eta > 0$ $\exists$ un compact K_η dans R^T hors duquel $\mu \leqq \eta$ $(A \in \mathfrak{L},\ A \cap K_\eta = \emptyset \Rightarrow \mu A \leqq \eta)$. Elle est régulière si $\mu A = \sup\limits_{F \subset A} \mu F$ (F désigne un fermé, de $\mathfrak{L}$ si μ est considérée seulement sur $\mathfrak{L}$, ou d'un σ-anneau plus petit si μ est définie seulement sur un tel σ-anneau).

Si μ est tendue et régulière (: t-régulière) et définie sur $\mathfrak{L}$, elle se prolonge à la tribu borélienne $\mathfrak{B}$ de R^T (en restant t-régulière), vu l'hypothèse R l.c. (Sazonov).

Pour que μ soit régulière sur $\mathfrak{L}$ il suffit que ses projections μ_t dans $(R_t, \mathfrak{B}_t)$ le soient (par exemple R est métrisable pour sa topologie, celle qui définit $\mathfrak{B}_R$).

Lorsque R est métrisable et séparable $\mathfrak{L}_R = \mathfrak{B}_R$, donc $\mathfrak{L} = \bigcup \mathfrak{L}_Q$[4] est la tribu cylindrique* de Ω ($\mathfrak{L}_Q$ est celle de R^Q).

Convolution. On peut parler de convolution ($\mu = \mu' \mu''$) et de «formule de Fubini» sans restriction, sur $\mathfrak{L}$ (sans supposer μ tendue) s'il en est ainsi dans les produits finis R^I, car la formule vraie dans chaque tribu $\mathfrak{B}_{t_1 \ldots t_I}$ l'est sur leur réunion $\mathfrak{A}$ donc sur $\mathfrak{L}$ engendrée par cette algèbre $\mathfrak{A}$. Il suffit donc que les μ_t soient t-régulières, par exemple que R soit polonais. Il en est de même pour les traces sur X des lois μ, μ', μ'' si $\mu^* X = \mu'^* X = \mu''^* X = 1$: $\mu_X = \mu'_X \mu''_X$ a un sens et vaut la formule de Fubini (l'image[5] de μ_X sur $\mathfrak{B}_{t_1 \ldots t_I}$ est $p_{t_1 \ldots t_I} \mu$).

Théorème I.1. *On suppose R polonais, μ définie sur $\mathfrak{L}$ et $\mu \in \mathfrak{J}(R^T)$. μ^* désignant la mesure extérieure définie par μ, on suppose le sous-espace vectoriel X de R^T tel que (p_Q désignant la projection dans R^Q)*

a) *X "porte" $\mu : \mu^* X = 1$,*

b) *$X_Q = p_Q X \in \mathfrak{L}_Q = \prod_{t \in Q} \mathfrak{B}_t$, pour toute partie dénombrable Q de T.*

Alors on a:

$$\mu = \varrho \nu, \quad \varrho^* X = \nu^* X = 1, \tag{2}$$

où ϱ est normale et les $p_{t_1 \ldots t_I} \nu$ sont de type de Poisson. Aussi bien on peut écrire:

$$\mu_X = \varrho_X \nu_X, \quad sur \quad X \cap \mathfrak{L}, \tag{2'}$$

ν_X ayant ses images (par les $p_{t_1 \ldots t_I}$) du type de Poisson (ce sont les $p_{t_1 \ldots t_I} \nu$); ϱ_X est normale au sens du dual X^* de X pour la topologie trace de celle de R^T.

Remarque. Il est équivalent de dire que les projections de ν dans les espaces E^J, définies par le dual de Ω sont du type de Poisson. Ce sont en effet les applications:

$$\omega \to \prod_{1}^{J} \sum_{i'=1}^{I_j} y_{ji'} (x_{t_{ji'}}(\omega))$$

et celles-ci se réduisent aux applications de la définition 1 en prenant pour I le nombre de $t_{ji'}$ distincts, et $y_{ji}(.) = y_{ji'}(x_{t_{ji'}})$ pour $(i, j) \leftrightarrow (j, i')$.

Démonstration. Pour Q fixé, R^Q étant polonais on a $\mu_Q = \varrho_Q \nu_Q$ avec des lois ϱ_Q et ν_Q t-régulières dans $(R^Q, \mathfrak{L}_Q = \mathfrak{B}_Q)$, et respectivement normale centrée et du type de Poisson, car μ_Q (projection de μ dans R^Q) est t-régulière (c.f. [6], lemme 2, corollaire 4).

Lorsque Q varie, les systèmes $\{\varrho_Q\}$, $\{\nu_Q\}$ sont évidemment compatibles, car en fait définis par les décompositions de Lévy-Khinchin des projections de R^T dans les E^J; ϱ et ν sont ainsi définies et σ-additives sur $\mathfrak{L} = \cup \mathfrak{B}_Q$. Mais soit $A \in \mathfrak{B}_Q$; on sait que dans $X_Q = p_a X$ il existe $C = \cup K_{2^{-i}}$ (réunion decompacts de R_Q, contenus dans X_Q), telle que $\mu_X C = 1$, et que ϱ_Q, ν_Q sont tendues suivant les

* au sens de l'E. V. T. (comme au sens dit ci-dessus l'espace de produit).

4 Nous désignons de même la tribu dans R^T des cylindres dont la base $\in \mathfrak{B}_a$, et $\mathfrak{B}_a$ elle même.

5 Ce n'est pas la restriction de μ_X à $\mathfrak{B}_{t_1 \ldots t_I}$ mais la loi définie par l'image inverse $p^{-1}{}_{t_1 \ldots t_I}$ de R^I dans X.

$K - K = K'$ et $K - K'$ (respectivement), eux aussi dans X_Q. Alors $\varrho_Q X_Q = \nu_Q X_Q = 1$ et

$$A \cap X = \emptyset \Rightarrow \varrho A = \nu A = 0 \Rightarrow \varrho^* X = \nu^* X = 1 .$$

Pour passer aux conclusions concernant (2') il suffit de remarquer que les fonctions $y(\xi)$ réelles linéaires continues sur X (pour la topologie trace de R^T) sont majorées dans X par une semi-norme $p_U(\omega)$ pour la topologie de R^T, donc prolongeables à R^T: X^* n'est pas plus riche que Ω^*.

Exemples de sous-espaces X de R^T. 1°) X se compose des trajectoires continues $x(t)$ à valeurs dans R(E.V.T.) métrisable (distance notée (x, x')). Les trajectoires étant uniformément continues pour $t \in [-N, N]$, considérons $\hat{X} = \cap \hat{X}_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$ avec:

$$\hat{X}_N = \left\{\omega : \lim_{k\infty} \downarrow \lim_{n\infty} \uparrow \psi_{N,n,k}(\omega) = 0\right\}, \tag{3}$$

$$\psi_{N,n,k}(\omega) = \sup\,(x_t(\omega), x_{t'}(\omega)), \tag{3'}$$

le sup. dans (3') étant pris sur $t, t' \in T_{N,n} = \{t : t = p/2^n, |t| \leqq N\}$ et $|t' - t| \leqq 2^{-k}$, $k \leqq n$.

On voit que $\hat{X}_N$ donc $\hat{X} \in \mathfrak{L}$, et que X est défini à partir des seules valeurs des $x(t)$ prises sur $Q = \lim\limits_{\substack{N\\ n}\infty} T_{N,n}$: $\hat{X}$ et X ont même trace X_Q dans R^Q, et cette trace $\in \mathfrak{L}_Q$.

Il en est de même pour tout Q dense dans T, de plus chaque X_Q est en correspondance biunivoque avec X[6] et $X = \bigcap\limits_Q \hat{X}_Q$ (a fortiori $X_Q \in \mathfrak{L}_Q$ pour toute partie Q (de T) dénombrable). Si R est en outre séparable et complet, le Théorème I–1 s'applique.

Remarque. Envisageons le cas particulier où R est la droite réelle E (ou un E_I) et X, X_Q limités à des trajectoires bornées. Ces espaces sont de Banach pour la norme $\|\xi\| = \sup\limits_t |x(t)|$, et X_Q (séparable) a pour tribu borélienne $\mathfrak{L}_Q$. Si l'on ne borne pas les trajectoires, on peut définir une topologie dans X, X_Q par la famille des (semi-) normes précédentes relatives aux X_N, $X_{Q,N}$. Ces espaces X, X_Q ont une base (de fonctions «triangulaires», dite elle aussi de Schauder, c.f. [2]), ce qui permet d'appliquer le théorème de [6] sur la structure $e(F)$ de ν_X, mais en supposant ν tendue pour cette topologie.

2°) X se compose des trajectoires $x(t)$ sans discontinuités de seconde espèce (et on les suppose continues à droite[7]). Il suffit dans ce qui précède de remplacer

---

[6] Cet exemple comme le suivant est donc assez particulier; il n'en est plus de même au 3e exemple si l'anneau $\mathfrak{A}$ n'est pas à base dénombrable.

[7] Cette deuxième hypothèse n'est pas une restriction en ce sens qu'on peut toujours, sans changer la loi temporelle remplacer les $x(t)$ par $x(t + 0)$ sous la première hypothèse, *et* si les lois des x_t dépendent continûment de t.

(3′) par:

$$(3'') \qquad \psi_{N,n,k}(\omega) = \sup\{\min[(x_\tau, x_t), (x_t, x_{\tau'})],\ \tau < t < \tau',\quad \tau' - \tau \leqq 2/2^k \quad (\text{et } k \leqq n,\ \tau, t, \tau' \in T_{N,n}).$$

La restriction à R^Q: la relation $X_Q \in \mathfrak{L}_Q$ vaut toujours, donc le théorème I.–1.

3°) (c.f. LEE dans [4]). $\mathfrak{A}$, anneau (de parties d'un espace arbitraire) remplace T, les Q comprennent alors tout anneau dénombrable $\mathfrak{Q}$ pris dans $\mathfrak{A}$. X partie de $E^{\mathfrak{A}}$ se compose des (peut représenter[8] les) mesures (signées, σ-additives, finies sur $\mathfrak{A}$), mais $X^{\mathfrak{A}}$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathfrak{A}}$ qui n'appartient pas à $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}$.

2. Définition 2. Nous dirons que ν, loi t-régulière, définie sur $\mathfrak{B}_R$, égale $e(F)$ s'il existe une mesure F, unique (nulle en 0) définie sur $\mathfrak{B}_R$ telle que (avec $e(G) = e^{-[G]}\{\delta(0) + G + \cdots + G^n/n! + \cdots\}$, $[G] = G(R) < \infty\}$):

$$(4) \qquad \nu = \lim_{\mathfrak{F}_R} e(F_U) * a_U,$$

où $\mathfrak{F}_R$ est le filtre défini par une base de voisinages U de O, où la CV. a lieu au sens de CV.U.T. de lois t-régulières, les F_U étant les restrictions (t-régulières et nécessairement bornées) de F à $R - U$.

Plus précisément rappelons que, si $\dot{\mathfrak{A}}_R$ désigne le σ-anneau engendré par les $y^{-1}\{\mathfrak{B}_{E-0}\}$, $y \in R^*$, F est unique sur $\dot{\mathfrak{A}}_R (\subset \mathfrak{L}_R)$. On peut affirmer (c.f. [3], [7]) que $\dot{\mathfrak{A}}_R$ égale la restriction $\dot{\mathfrak{L}}_R$ de $\mathfrak{L}_R$ à $R - 0$, s'il existe dans R^* une suite séparant les points de R (par exemple si R possède une base). Alors F (nulle en 0) est unique sur $\mathfrak{L}_R$, lorsqu'elle existe (c'est le cas si R a une base). Dans la définition 2 nous supposons $\dot{\mathfrak{A}}_R = \dot{\mathfrak{L}}_R$, d'où la définition de F par les représentations (dans E^J) $p_{y_1 \ldots y_j} \nu = e(F_{y_1 \ldots y_j})$. Cette hypothèse est alors vérifiée aussi dans un produit dénombrable de R (c'est évident si c'est l'existence d'une base qui l'assure dans R):

Lemme 2. *Si* $\dot{\mathfrak{A}} = \dot{\mathfrak{L}}$ *dans* R, *il en est de même dans* $R^\infty = \prod_1^\infty R_i$.

a) Dire que $\dot{\mathfrak{A}}_R = \dot{\mathfrak{L}}_R$ revient à dire que les $y^{-1}\{0\} - 0 \in \dot{\mathfrak{A}}_R$ pour tout $y \in R^*$. Cela est en effet nécessaire, et suffit car alors la famille $\mathfrak{R}$ des $A \in \dot{\mathfrak{A}}_R$ et $A \cup \{0\}$ est un σ-anneau qui contient les $y^{-1}B$ (B borélien dans E), donc aussi R, donc égale $\mathfrak{L}$.

b) Soit $y(x) = \sum_1^I y_i(x_i) \left(x = \prod_1^I x_i\right)$, du dual de $R^I = \prod_1^I R_i$. Dans R^I, $y^{-1}\{0\} - 0$ s'obtient en ajoutant à l'image inverse (pour $x \to p_I(x) = \prod_1^I y_i(x_i)$, de R^I dans E^I) de la partie (hyperplan épointé) $\left\{\sum_1^I y_i = 0, \prod_1^I y_i \neq 0\right\}$, de E^I (qui appartient au σ-anneau engendré par les $\left\{\prod_1^I y_i\colon\ y_i \in B_i,\ 0 \notin B_i \text{ pour } uni\right\}$, l'ensemble

[8] Aussi bien (ce peut être utile) on prendra $\mathfrak{C}$ ensemble de fonctions continues à support borné (dans un espace métrique) admettant inf. et sup., alors la topologie produit dans $R^{\mathfrak{C}}$ exprime la convergence vague des mesures signées, lorsqu'on pend sa trace dans X.

$p_I^{-1}\{0\} - 0$. Ce dernier est aussi dans $\dot{\mathfrak{A}}_{R^I}$, car, vu l'hypothèse, les parties

$$\{x\colon y_i(x_i) = 0,\ x \neq 0\} \quad \text{et} \quad \{x\colon x_i \neq 0\}, \qquad i = 1, \ldots, I$$

étant dans $\dot{\mathfrak{A}}_{R^I}$, on voit facilement par récurrence que $\{x\colon y_i(x_i) = 0,\ i = 1, \ldots, I\}$, y est aussi.

c) Soit, dans le dual de R^∞, l'élément $y = \sum_1^I y_i(x_i) \left(x = \prod_1^\infty x_i\right) \cdot y^{-1}\{0\} - 0$ s'obtient de même en ajoutant à l'image inverse pour la projection p_I de R^∞ dans R^I de la partie envisagée en b) (image inverse qui est donc de $\dot{\mathfrak{A}}_{R^\infty}$) l'ensemble $A_I = p_I^{-1}\{0\} - 0$. Or $\dot{\mathfrak{A}}_{R^I} = \dot{\mathfrak{L}}_{R^I}$ contient $A'_I = \left(x\colon \prod_1^I x_i \neq 0\right)$, $\dot{\mathfrak{A}}_{R^{I+J}}$ contient

$$B_{I,J} = A'_{I+J} - A'_I = \left\{x\colon \prod_1^I x_i = 0,\ \prod_1^{I+J} x_i \neq 0\right\},$$

et $A_I = \lim_{J\uparrow\infty} \uparrow B_{I,J}$ est bien dans $\dot{\mathfrak{A}}_{R^\infty}$.

Corollaire. *Dans R^Q, toute loi νt-réguliere à projections du type de Poisson (dans R^I ou E^J, c'est équivalent, vu la remarque suivant l'énoncé du théoreme* I — 1*) est $e(F)$, au sens de* (4) *sur la tribu $\mathfrak{L}_Q$ (dans R polonais $\mathfrak{L}_R = \mathfrak{B}_R$).*

Théorème I.2. *On suppose R polonais, tel que $\dot{\mathfrak{A}}_R = \dot{\mathfrak{L}}_R$. ν est une loi dans R^T (définie sur $\mathfrak{L}$) telle que:*

a) *ν est portée par un sous-espace vectoriel X tel que $X_Q = p_Q X \in \mathfrak{L}_Q$ pour toute partie dénombrable Q de $T (\nu^* X = 1)$;*

b) *les projections $p_{t_1 \ldots t_I}$ de ν dans R^I sont du type de Poisson (donc $e(F_{t_1 \ldots t_I})$, suivant la définition* 2*).*

Alors il existe une mesure F (nulle en 0*) unique sur le σ-anneau $\dot{\mathfrak{A}} = \prod_T \dot{\mathfrak{B}}_t$, bornée hors des voisinages $U = \{x_{t_i} \in U_i,\ i = 1, \ldots, I\}$, dont les projections dans les $\prod_1^I R_{t_i} - 0$ sont les $F_{t_1 \ldots t_I}$ (et F_Q dans R^Q), et telle que:*

a) *F est «portée» par X: $A \in \dot{\mathfrak{A}}$ et $A \cap X = \emptyset \Rightarrow FA = 0$;*

b) *pour chaque Q, il existe des constantes $a_{U(Q)}$ relatives aux voisinages $u_{t_1 \ldots t_I} (t_i \in Q)$, telles que* (5) *converge en projection dans R^Q, vers $\nu_Q = p_Q \nu$, lorsqu'on restreint les U aux $U(Q)$:*

$$p_Q\{e(F_{U(Q)}) * a_{U(Q)}\} \to p_Q \nu. \tag{5}$$

La convergence a lieu suivant l'ensemble filtrant croissant (dénombrable ou à base dénombrable) des U_Q. On peut supposes $a_{U(Q)} \in X$, mais ces a dépendent de Q et pas seulement de U. (5) *peut alors s'entendre dans X_Q et pas seulement dans R^Q.*

c) *$\nu \in \mathfrak{J}(R^T)$: ν est indéfiniment divisible c'est-à-dire $\nu^{1/n}$ existe sur $\mathfrak{L}$ (unique).*

Démonstration. La première assertion (existence de F) est évidente si l'on remarque (avec Lee) que F est σ-additive sur $\hat{\mathfrak{A}} = \cup\, \hat{\mathfrak{B}}_{t_1 \ldots t_I}$, $\hat{\mathfrak{B}}_{t_1 \ldots t_I}$ étant l'anneau $\subset \dot{\mathfrak{B}}_{t_1 \ldots t_I}$ ne comprenant (dans R^I) que les éléments *à* une distance positive de l'origine donc F-bornés, que $\sigma(\hat{\mathfrak{A}}) = \dot{\mathfrak{A}}$ et que les éléments des $\hat{\mathfrak{B}}_t$ sont approchés par des parties compactes (des R_t), relativement à F.

a) Puisque tout A de $\mathfrak{L}$ appartient à une tribu $\mathfrak{L}_Q$, il suffit de montrer que $A \cap X_Q = 0 \Rightarrow FA = 0$.

Restreignons nous donc, à R^Q, et supprimons pour la commodité certains indices Q.

Suivant l'idée de Lee, mais exprimée de façon assez différente, soit $F = F' + F''$ une décomposition (dans R^Q, $\mathfrak{L}_Q$)) de F, avec F' bornée (on complète $\dot{\mathfrak{A}}_Q = \dot{\mathfrak{L}}_Q$ en ajoutant $\{0\}$ de F mesure nulle). D'où $\nu = \nu'\nu''$ avec $\nu' = e(F')$, où $e(F')$ a un sens sur $\mathfrak{L}_Q$, de même que l'égalité $\nu = \nu'\nu''$ puisque R^Q est polonais. Puisque $\nu X = 1$ et $\nu' \geqq e^{-[F']}\delta(0) \Rightarrow \nu \geqq e^{-[F']}\nu''$, on a (avec $X = X_Q$) $\nu'' X = 1$, d'où[9]:

$$1 = \nu X = \int_X \nu'(X_{-\omega})\,\nu''(d\omega) = \nu' X\,,$$

car les translatés de X par $-\omega \in X$ égalent X.

Mais de même $F'\nu''$ est portée par X et $F'\nu''(X) = \int_X F'X.\ \nu''(d\omega) = F'X$ implique:

$$F'X = [F'\nu''] = [F'].$$

On a bien $A \cap X = 0 \Rightarrow FA = \sup F'A = 0$ (sup. pris sur les mesures bornées extraites de F).

b) Résulte de ce que R^Q est polonais. Les $a_{U(Q)}$ ne sont définis que par leur projection dans R^Q. Nous ne savons pas lier ces a_U entre eux (lorsque le voisinage U est fixe et que seul change l'espace de projection R^Q), mais lorsque Q est fixè, on peut èvidemment prendre $a_{U(Q)} \in X$.

c) Sera démontré dans la partie II, pour les νt-régulières, ce qui est le cas des ν_Q projections de ν dans les R^Q, et cela suffit ($\nu u\, \mathfrak{L} = \cup\, \mathfrak{L}_Q$).

Un exemple particulier (c.f. [4][10]). Nous reportant aux notations ci-dessus (3ème exemple de $X \subset R^T$), soit X le sous-espace vectoriel fermé de $E^{\mathfrak{A}}$ composé des fonctions additives définies sur l'anneau $\mathfrak{A}$ et à valeurs réelles: A et $A' \in \mathfrak{A}$, $A \cap A' = \emptyset \Rightarrow \omega(A + A') = \omega(A) + \omega(A')$. On suppose ν indéfiniment divisible dans $\Omega = E^{\mathfrak{A}}$, et «portée» par le cône $X^+ \subset E_+^{\mathfrak{A}}$ des fonctions $\omega \geqq 0$. Les projections $\nu_{j_1 \ldots j_l}$ dans E^I sont portées par E_+^I et $\in \mathfrak{J}(E_+^I)$ donc sont de la forme $a_{j_1 \ldots j_l} + e(F_{i_1 \ldots i_l})$, F étant portée par E_+^I, et la définition de $e(F_{i_1 \ldots i_l})$ ne comportant pas de translation (bien que F puisse être non bornée). Alors, d'après le théorème I.2, F est portée par X, donc X^+, et $e(F)$ étant «portée» par X (vu l'absence des translations dans sa définition), a (de projections $a_{j_1 \ldots j_l}$) l'est aussi (et $\geqq 0$).

On peut ajouter que la conclusion b) du théorème I.2 (avec $R = E$) vaut sans translations pour $e(F) = \nu_{-a}$ (translatée de $-a$ de ν), car les $a_{U(Q)} \to 0$ en projections dans R^Q (ce point appelant quelques dètails).

De plus, si on suppose ν «portée» par le cône $C = X_\sigma^+$ des mesures sur $\sigma(\mathfrak{A})$, il en est de même de a, F et des $\nu^{1/n}$ (c.f. [4] *pour* le cas $\sigma(\mathfrak{A})$ à la base dénombrable).

---

[9] Le [ ] désigne les variations totales.

[10] Nous levons l'hypothèse de l'existence d'un anneau dénombrable engendrant $\sigma(\mathfrak{A})$. Lorsqu'on désire considérer des ω qui ne soient pas p. s. finies sur $\mathfrak{A}$, c'est à dise prendre $E_+ = [0, \infty]$, l'argument final (prolongement de Mazur-Orlicz) ne nous parait plus assuré; nous rencontrons une difficulté qui parait intéressante.

Il suffit, supposant $a = 0$[11] de montrer que si $\nu = \nu'\nu''$, avec $\nu' = e(F_U)$, $\nu'' = e(F - F_U)$, ν' et ν'' sont «portées» par C, car alors, F_U étant bornée, F_U l'est aussi donc $F = \sup. F_U$.

Soit $L \in \mathfrak{L}$ et $L \cap C = \emptyset$. On a $L \in \mathfrak{L}_Q$, pour Q sous-anneau dénombrable de $\mathfrak{A}$. Supposons $\nu' L > \eta > 0$; $p_Q L$ et $p_Q X^+$ sont dans E^Q approchés par des compacts K' et K'' satisfaisant à $\nu'_Q K' > \eta$ et $\nu''_Q K'' > \eta' > 0$. $K' \oplus K''$ est donc, dans E^Q mesurable, donc base d'un élément de $\mathfrak{L}_Q$ ν-positif, qui coupe donc C en $\omega = x' + x''$ avec $p_Q x' \in K' \subset p_Q L$ et $p_Q x'' \geqq 0 \cdot p_Q x'$ est donc σ-additif, car majoré par $p_Q \omega$, sur Q.

Le théorème de Hahn-Banach (sous la forme dite de Mazur-Oricz}) assure alors que $p_Q x'$ peut être prolongée en une mesure sur $\mathfrak{A}$, donc que L coupe C. C est donc tel que $\nu'^* C = 1$. ⌋

II.

Sous l'hypothèse que μ est tendue dans X (E.V.T.l.c. séparé), on peut avancer des conclusions générales plus fortes que les précédentes.

Vu le lemme 2 de [7], rappelé au théorème I.1, de toute loi $\mu \in \mathfrak{J}(X)$ on peut séparer un facteur normal centré, il reste ν tendue et de projections $\nu_{y_1 \ldots y_J}$ dans E^J du type de Poisson, c.à.d. ν du type de Poisson suivant la définition 1 donnée ci-dessus (alors pour R^I).

Théorème. *Si ν est une loi t-réguliere dans $(X, \mathfrak{B})$, et du type de Poisson:*

a) *ν est indéfiniment divisible avec $\nu^{1/k}$ t-réguliere sur $\mathfrak{B}$,*

b) *il existe une mesure F, nulle en 0, définie (unique) sur le σ-anneau $\dot{\mathfrak{A}}$ (engendrée par les $y^{-1} \mathfrak{B}_{E-0}$), dont les restrictions F_U aux $X - U$ (U voisinage faible de 0) sont bornées et t-régulières, et telle que pour des translations a_U convenables:*

(5′) *la famille $e(F_U) * a_U$ est U.T. et ν est une de ses lois limites.*

Remarque. On sait (c.f. [7] lemme 9, ou simplement corollaire 1 du lemme 2) que les autres lois limites sont translatées de ν mais nous n'affirmons pas, pas plus qu'au théorème I.2, la convergence au sens des projections dans E^Q (ou même E^I): si cela était, il y aurait CV. au sens de la CV. des lois dans $(X, \mathfrak{B})$, puisque les $e(F_U) * a_U$ sont U.T., CV. suivant le filtre $\mathfrak{K}$ défini par les voisinages U de 0 pour la topologie faible dans X. Si X est métrisable pour cette topologie $\sigma(X, X^*)$ (ce n'est pas le cas général) on sait ce résultat (soit (5)) valable, d'après les propriétés générales des groupes métrisables. c.f. la remarque suivant la preuve du théorème I.2. Cependant un corollaire plus fort se déduit de cet énoncé (c.f. ci-aprés, corollaire 3).

Démonstration. a) Soit U un voisinage faible de 0, fixé pour l'instant:

$$U = \{x: |y_i(x)| < \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, I\}, \qquad \text{et} \quad A \in \dot{\mathfrak{B}}_{y'_1 \ldots y'_J}$$

un élément (de l'algèbre cylindrique engendrant $\mathfrak{L}$) ne contenant pas 0.

La relation $F_U A = F(A \cap U^c)$, avec $U^c = X - U$, définit une fonction additive, régulière, bornée sur l'anneau $\dot{\mathfrak{O}}$ réunion de ces $\dot{\mathfrak{B}}_{y'_1 \ldots y'_J}$. En effet F est définie (et unique) sur $\dot{\mathfrak{B}}_{y'_i, y'_j}$ dans E^{I+J}, par la projection correspondante de ν.

[11] Ce point ne soulevant pas de difficultés.

Mais $e(F_U)$ est définie sur $\dot{\mathfrak{L}} = \bigcup \mathfrak{B}_{y_1' \ldots y_J'}$, et dans chaque E^J est facteur de la projection correspondante $\nu_{y_1 \ldots y_J}$ de ν. Si $\nu K_\eta > 1 - \eta$, $K'_\eta = K\eta - K_\eta$, on a (toujours suivant le lemme 2 de [6]):

$$e(F_U + F_{\overline{U}})A \leqq 2\eta \quad \text{donc} \quad F_U A \leqq 2\eta\, e^{2(F_U)} \quad \text{si} \quad A \cap K'_\eta = \emptyset.$$

F_U satisfaisant au critère de Prohorov est σ-additive sur $\dot{\mathfrak{L}}$, prolongeable à $\dot{\mathfrak{A}} = \sigma(\dot{\mathfrak{L}})$ et t-régulière. F est définie sur ce σ-anneau par $FA = \sup_U F_U A$, ce qui justifie une partie de b).

Or $e(F_U)$ est t-régulière sur $\mathfrak{L}$, et *en projection* (dans les E^J) facteur de ν, donc $e(F_U)$ est facteur de ν (lemme 2 de [7]), d'où l'existence de la famille U.T. (5').

Toujours suivant ce lemme les lois limites de cette famille, ayant leurs projections translatées de celles de ν, sont des translatées de ν (on peut donc inclure ν parmi les lois limites).

b) De même, pour $t < 1$, les $e(tF_U) * a_{t,U}$ sont U.T. Considérons $t = 1/k$, et les lois $e(F_U) * k a_{1/k,U}$, elles aussi U.T. (comme k-ièmes convolées des $e(F_U/k) * a_{1/k,U}$); les $k a_{1/k,U} - a_U$ sont donc dans un même compact (U variant, k fixé) dépendant de k, a fortiori les $a_{1/k,U} - 1/k\, a_U$, donc les $e(F_U/k) * 1/k\, a_U$ sont U.T. Mais suivant un filtre $\mathfrak{K}'$, plus fin que $\mathfrak{K}$, pour lequel $e(F_U) * a_U \to \nu$, la seule loi limite pour cette famille U.T. est celle de projections $\nu^{1/k}_{y_1 \ldots y_J}$, c'est donc $\nu^{1/k}$, et ν est bien de $\mathfrak{J}(X)$. ┘

Corollaire 1. *Toute loi μ t-régulière, dans X, $\mathfrak{B}$, à projections finidimensionnelles indéfiniment divisibles est indéfiniment divisible.*

Corollaire 2. *Toute loi μ t-régulière, dans* $(X, \mathfrak{B})$ *dont les projections fini-dimensionnelles sont limites de convolutions à termes uniformément petits est indéfiniment divisible. A fortiori si μ elle même est limite, dans X, de telles convolutions: il suffit que les termes de la convolution soient petits au sens de la topologie faible de X ($\sigma(X, Y)$, Y dual de X).*

Corollaire 3. *Toute loi μ t-régulière dans X, indéfiniment divisible, s'écrit $\varrho e(F)$, $e(F)$ étant entendue au sens de* (5'), *mais avec la topologie initiale de X et d'autres a_U. Si X est mètrisable, alors c'est au sens de l'ègalitè* (4), *mais sans que F (nulle en 0) soit nècessairement unique (hors de $\sigma(\dot{\mathfrak{A}})$.*

Il suffit en effet de considérer la loi ϱ tendue (sans facteur propre du type $e(G)$ du théorème II de [7]), et de définir la famille compatible des lois $\nu_{\{y_1 \ldots y_J\}}$ dans E^J obtenues en séparant des $\varrho_{\{y_1 \ldots y_J\}}$ les composantes normales centrées: si ν n'était identiquement nulle, une des lois (non nulle) $e(F_U)$ de (5') serait un facteur propre de ν donc de ϱ. Nous utilisons ici le fait que l'hypothèse X métrisable (de [7]) peut être levée (Heinich).

III.

1. X désigne maintenant un E.V.T. séparé l.c., x un point de X, $\mathfrak{C}$ sa topologie; on n'étudie que des lois t-régulières, donc toujours prolongeables de la tribu cylindrique $\mathfrak{L}$ à la tribu borélienne $\mathfrak{B}$.

Définition 3. K partie absolument convexe (a.c.) de X est dite «hilbertienne» si le sous-espace vectoriel $X_K = \bigcup nK$, muni de la norme $\|x\| = \inf_{x \in \lambda K} |\lambda|$, qui est complet, est de Hilbert.

L'ensemble K (hilbertien) est dit «de type séparable» si cet Hilbert X_K est séparable. Il l'est alors a fortiori pour la topologie trace de $\mathfrak{C}$ qui est moins fine que la sienne.

Remarque. Cette séparabilité est automatique lorsque le dual Y de X, muni de la topologie $\mathfrak{C}^c$ de CV. uniforme sur les compacts absolument convexes de X, est nucléaire. Cela signifie en effet que $(Y, \mathfrak{C}^c)$ a une base de voisinages (a.c.) U de de l'origine, tels que chaque espace $\hat{Y}_U$ associé (Y_U est le quotient de Y par $\{y: y \in \varepsilon U, \text{ tout } \varepsilon > 0\}$, $\hat{Y}_U$ le complété) soit hilbertien et image d'un autre, soit $\hat{Y}_{U'}(U' \subset U)$ pour un opérateur complètement continu (en fait: symétrique et de type Hilbert-Schmidt). $\hat{Y}_U$ est donc séparable, donc aussi son dual X_K, avec $K = U^\circ$ polaire de U (pour la dualité entre X et Y). Les U formant une base pour $\mathfrak{C}^c$, les U° forment un système fondamental de compacts a.c. dans X, c.à.d. (Badrikian) que tout compact est contenu dans un élément de ce système, et toute loi tendue l'est suivant des U°. C'est là l'hypothèse qui assure une bonne théorie de la fonctionnelle caractéristique (f.c.) ou transformée de Fourier. Nous utiliserons en fait une hypothèse un peu plus faible, car, étudiant une loi $\nu \in \mathfrak{J}(X)$, et t-régulière, les facteurs de ν qui nous intéresseront (type ϱ ou $e(F_U)$) auront des f.c. uniformément voisines de 1 dans les K_η^0 (avec $\nu K_\eta \geqq 1 - \eta$): il nous suffira qu'un système de ces K_η (pour $\eta \downarrow 0$) soit hilbertien, et que l'un deux (pour $3\eta + \sqrt{2\eta} \leqq \frac{1}{6}$) soit séparable.

Pour des raisons de simplicité nous séparons le cas où $(X, \mathfrak{C})$ est métrisable, pouvant alors (pour des lois tendues suivant des compacts hilbertiens) appliquer le théorème IV de [7]. Lorsque ce n'est pas le cas, on est ramené, grâce au lemme 6, à une démonstration analogue, mais il faut réprendre la méthode d'un théorème général concernant les groupes abéliens (c.f. [5], et [7] théorème II).

Soit μ une loi dans $(X, \mathfrak{B})$ tendue (régulière) suivant les compacts hilbertiens K_η. Rappelons que si A désigne l'opérateur linéaire continu symétrique de $(Y, \mathfrak{C}^c)$ dans l'espace de Hilbert $\hat{Y}_U$, avec $U = \sqrt{2_\eta} K_\eta^0$, dèfini par:

$$\|Ay\|^2 = \frac{1}{2\eta} \int_{K_\eta} y^2(x)\, \mu(dx), \tag{6}$$

on a φ étant la f.c. de μ, définie dans Y:

$$\|Ay\|^2 \leqq 1 \Rightarrow |1 - \varphi(y)| \leqq \varepsilon = 3\eta + \sqrt{2\eta} \tag{7}$$

et l'opérateur A est du type de Hilbert-Schmidt, c.à.d. que π étant l'application canonique $y \to \hat{y}$ de Y dans $\hat{Y}_U$ (pour $U = K_\eta^0$). on a:

$$A = \hat{A}\pi, \qquad \sum \|\hat{A}\hat{y}_i\|^2 = \|\hat{A}\|_2^2 \leqq \frac{1}{2\eta} \int_{K_\eta} \|x\|^2 \mu(dx) \leqq 1, \tag{8}$$

car $\|x\|$ est relative à $K_\eta / \sqrt{2\eta}$, vu le choix de U (pour tout système $\{\hat{y}_i\}$ orthonormal dans $\hat{Y}_U$, $\|\hat{A}\|_2$ est la norme de Hilbert-Schmidt de $\hat{A}$).

Lemme 3. *Pour* $\mu \in \mathfrak{J}(X)$, (7) *entraine, pour tout* y,

$$n[1 - \Re\varphi^{1/n}(y)] \leqq \frac{9}{2}\varepsilon[1 + \|Ay\|^2], \quad si \quad \varepsilon \leqq \frac{1}{3}. \tag{9}$$

a) Pour tout x réel on a $|\sin x| \leqq n|\sin x/n|$ (d'après la concavité de $\sin x$ pour $0 \leqq x \leqq \pi$, cette relation vaut pour $|x| \leqq \pi$ et on vérifie que $|\sin x/n| < 1/n$ — cela suffit pour la preuve — entraine, pour $0 < x/n < \pi/2$, $x \leqq 2$). Alors $1 - \cos nx \leqq n^2(1 - \cos x)$ vaut et entraine $|\varphi(ny)| \geqq |\varphi(y)|^{n^2}$ pour $|\varphi(y)| = e\left\{-\int_{-\infty}^{\infty}[1 - \cos x]\,dF_y(x)\right\}$, donc aussi bien pour la f.c. de μ, car la composante normale (de $y(\mu)$) ne modifie pas l'inégalité.

b) Notant que $\Re Z \leqq 0$ (soit $|e^Z| \leqq 1$) entraine $|e^Z - 1| \leqq |Z|$, et que $|U| \leqq \frac{1}{2}$ entraine $|\mathrm{Log}(1 + U)| \leqq U + U^2 \leqq 3U/2$, on a (pour $1 + U = \varphi$):

$$|\varphi^{1/n} - 1| \leqq \frac{1}{n}|\mathrm{Log}\,\varphi| \leqq \frac{3U}{2n} \Rightarrow |e^{n(\varphi^{1/n}-1)} - 1| \leqq |n(\varphi^{1/n} - 1)| \leqq \frac{3U}{2}.$$

c) soit alors $k - 1 \leqq \|Ay\| < k$, et appliquons (7) à y/k: on a $|\mathrm{Log}\,\varphi(y/k)| \leqq 3\varepsilon/2$, d'où suivant a):

$$-\Re\,\mathrm{Log}\,\varphi(y) \leqq k^2(-\Re\,\mathrm{Log}\,\varphi(y/k)) \leqq \frac{3}{2}\varepsilon k^2 \leqq 3\varepsilon[1 + (k-1)^2]$$
$$\leqq 3\varepsilon[1 + \|Ay\|^2].$$

Appliquée à $n(\varphi^{1/n} - 1)$ (au lieu de $\mathrm{Log}\,\varphi$) et $3\varepsilon/2 \leqq \frac{1}{2}$ (au lieu de $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}$) on obtient (9). $\lrcorner$

Lemme 4. *Pour toute mesure bornée G telle que $e(G)$ soit facteur de μ satisfaisant à (7), et de $\mathfrak{J}(X)$, on a:*

$$\text{(9')} \qquad \int[1 - \cos y(x)]\,dG \leqq 9\varepsilon(1 + \|Ay\|^2), \quad si \quad \varepsilon \leqq \tfrac{1}{6}.$$

En effet si φ' est f.c. de $e(G)$, on a

$$|\varphi'|^2 \geqq |\varphi|^2 \Rightarrow 1 - |\varphi'|^{2/n} \leqq 1 - |\varphi|^{2/n}.$$

Posons:

$$\mathrm{Log}|\varphi'|^{2/n} = -\frac{2}{n}\int[1 - \cos y(x)]\,dG = -U \leqq \textit{avec } U \leqq \frac{4(G)}{n};$$
$$n \geqq 4[G] \Rightarrow U \leqq 1 \Rightarrow 1 - e^{-U} \geqq \frac{U}{2} \Rightarrow 1 - |\varphi|^2 \leqq 2(1 - |\varphi|) \leqq 2\varepsilon,$$

donc:

$$\frac{nU}{2} \leqq n[1 - e^{-U}] = n[1 - |\varphi'|^{2/n}] \leqq n[1 - |\varphi|^{2/n}] \leqq 9\varepsilon[1 + \|Ay\|^2]$$

(en appliquant (9) à $|\varphi|^2$ au lieu de φ et 2ε au lieu de ε). $\lrcorner$

Lemme 5. *La relation $|1 - \Re\varphi(y)| \leqq \varepsilon[1 + \|\hat{A}\hat{y}\|^2]$ entraine, lorsque le compact K_η correspondant est (hilbertien) de type séparable:*

$$\text{(10)} \qquad \int_X \inf(1, \|x\|^2)\,d\mu \leqq \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}\varepsilon[1 + \|\hat{A}\|_2^2],$$

suivant (8) c'est $\|\hat{A}\|_2^2 \leqq 1/2\eta$ si U est polaire de K_η, ou $\leqq 1$ si $U = \sqrt{2\eta}K_\eta^0$ (dans le 1er cas $\|x\|$ est relative à K_η, dans le 2ème à $K_\eta/\sqrt{2\eta}$).

Démonstration. Ici intervient la restriction fondamentale que X_{K_η} donc $\hat{Y}_U$ (donc Y_U) soient séparables. Pour le calcul qui suit, on doit considérer les fonctions $y(x)$ définies sur tout X, on ne peut donc considérer des $\hat{y} \notin Y_U$ (seulement à $\hat{Y}_U$)

qui définiraient $\hat{y}(x) = \langle \hat{y}, x \rangle$ seulement sur X_K; par ailleurs $\varphi(y)$ n'est pas définissable dans Y_U car dans (7) A et U varient avec η (et K_η) et $\| y - y' \| = 0$ n'entraine pas $\varphi(y) = \varphi(y')$.

a) La séparabilité de l'espace préhilbertien Y_U assure que:

$$x \in X_{K_\eta} \Rightarrow \| x \|^2 = \sum_1^\infty y_i^2(x), \tag{11}$$

pour un système orthonormée maximal $\{\hat{y}_i\}$ dans Y_U ou un système correspondant de $y_i \in Y$ (un y_i dans chaque classe d'équivalence $\hat{y}_i$). A fortiori, on a:

$$\| x \| = \sup \sum_1^I y_i^2(x), \quad y \text{ compris pour } \quad x \notin X_K \quad (\text{alors } \| x \| = \infty) \tag{11'}$$

le sup. étant pris sur tous les systèmes finis orthonormés de Y (pour la semi-norme $p(y) = \sup\limits_K | y(x) | = \| \hat{y} \|$), car $x \notin X_K$ équivaut à l'existence (dans $U = K^\circ$) de $y(x)$ de valeur arbitraire grande, donc $\| x \| = \infty$, au sens (11′).

b) μ étant t-régulière et $\inf\left(1, \sum_1^I y_i^2(x)\right)$continue, on a:

$$\begin{aligned}\int_X \inf(1, \| x \|^2)\, \mu(dx) &= \sup \int_X \inf\left(1, \sum_1^I y_i^2(x)\right) \\ &\leqq \sup \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1} \int_X \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_1^I y_i^2(x)\right\}\right) \mu(dx);\end{aligned}$$

la suite est classique:

$$\begin{aligned}\int_X \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_1^I y_i^2(x)\right\}\right) d\mu &= \int_X d\mu(x) \int_{E^I} \left(1 - \exp\left\{i \sum_1^I y_i(x)\, t_i\right\}\right) \\ &\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_1^I t_i^2\right\}}{(2\pi)1/2} \cdot \prod dt_i = \int_{E^I} [1 - \Re\varphi(y)] \exp\{-\tfrac{1}{2} \| y \|^2\}\, dy,\end{aligned}$$

pour

$$y = \sum_1^I t_i y_i, \quad dy = \prod dt_i, \quad \| y \|^2 = \sum t_i^2.$$

Vu l'hypothèse, on obtient pour (10) la majoration

$$\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}\, \varepsilon \left[1 + \sup \int_{E^I} \frac{\| \hat{A} \hat{y} \|^2}{(2\pi)^{I/2}} e^{-\frac{1}{2}\|\hat{y}\|^2} d\hat{y}\right], \quad \text{avec} \quad \hat{y} = \sum_1^I t_i y_i.$$

Un changement orthonormé dans E^I, réduisant $\hat{A}$ (qui est symétrique) à une forme diagonale: $\prod\limits_1^I t_i' \to \prod\limits_1^I \lambda_i t_i'$, remplace l'intégrale par $\sum\limits_1^I \lambda_i^2 \leqq \| A \|_2^2$ par définition de la norme $\| \hat{A} \|_2$ de Hilbert-Schmidt. ┘

Il est facile maintenant d'énoncer et démontrer la structure $\varrho e(F)$ du cas métrisable (en fait cette hypothèse peut être levée par une extension du théorème IV de [7], due à Heinich), puisqu'elle se réduit à caractériser F:

Théorème. *Dans* $(X, \mathfrak{C})$ *E.V.T.l.c., une condition suffisante pour que la mesure F définisse une loi e(F) tendue, est qu'il existe un compact (a.c.) K, hilbertien, tel que (pour la norme* $\|x\|_K$*):*

(12) $$\int_{\|x\|\leq 1} \|x\|^2 \, dF < \infty, \quad F \text{ t-régulière et bornée dans } X - K.$$

Cette condition est aussi nécessaire si la loi $\nu = e(F)$ *est tendue suivant des* K_η *hilbertiens, et si l'un de ceux-ci, pour* $\varepsilon = 3\eta + \sqrt{2\eta} \leqq \frac{1}{6}$ *est de type séparable.*

Démonstration. a) Si F est bornée hors de K, il suffit de prouver l'existence de $e(F)$ pour F portée par K et satisfaisant à l'inégalité (12). Or on a, pour toute G bornée $\leqq F$:

(13) $$\int_{\|x\|\leq 1} [e^{iy(x)} - 1 - iy(x)] \, dG \leqq \tfrac{1}{2} \int_K y^2(x) \, dF = \tfrac{1}{2} \|Ay\|^2.$$

A est de type de Hilbert-Schmidt, et les $-\int_{\|x\|\leq 1} y(x) \, dG$ sont linéaires et majorées par $[G] \, \|\hat{y}\|$, donc de la forme $y\ (\xi_G)$ avec $\xi_G \in X_K$. On a donc en (13) les 2ème f.c. des $e(G) * \xi_G$, qui sont U.T. car ces f.c. sont équicontinues à l'origine (pour des voisinages de la forme εU^S, avec $U^S = \{y\colon \|Ay\| \leqq 1\}$), vu le théorème de Badrikian.

Il est ici évident que F bornée hors des εK l'est a fortiori hors de tout $\mathfrak{C}$-voisinage de 0 et qu'il existe, X étant métrisable, une suite de F_n et de ξ_n avec $e(F) = \lim e(F_n) * \xi_n$ au sens de la C.V. des lois dans $(X, \mathfrak{C}, \mathfrak{B})$. Dans tous les cas ($X$ métrisable ou non) on peut prendre pour F_n les restrictions de F aux $X - 1/n\, K$, et pour $y(\xi_n)$ les $-\int y(x) \, dF_n$.

b) Pour le η sus-dit, la relation (7) et le lemme 4 entrainent (9′) pour toute G (bornée) telle que $e(G)$ soit facteur de $\nu = e(F)$, donc en particulier toute G (bornée) $\leqq F$. Le lemme 5 appliqué à la loi $G/[G]$ donne alors:

(13′) $$\int_X \inf(1, \|x\|^2) \, dG \leqq 18 \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1} \varepsilon, \quad \text{pour} \quad \|x\| = \sqrt{2\eta} \, \|x\|_{K_\eta}.$$

la même inégalité vaut donc pour $F = \sup G$, et équivaut à (12).

A une translation près la loi $\nu = e(F)$ a donc (dans les deux cas a), b)) pour 2ème fonction caractéristique:

(14) $$\psi_\nu(y) = \int_K [e^{iy(x)} - 1 - iy(x)] \, dF + \int_{X-K} [e^{iy(x)} - 1] \, dF,$$

ou encore:

(14′) $$\psi_\nu(y) = \int_X \left(e^{iy(x)} - 1 - \frac{iy(x)}{1 + \|x\|^2}\right) dF, \quad \text{avec } \|x\| = \infty \text{ hors de } X_K.$$

On vérifie en effet facilement que les deux expressions cidessus ne diffèrent que par un terme (linéaire) continu pour $\|y\|$, il correspond bien à une translation (par $\xi \in X_K$). La représentation générale, sous l'hypothèse du théorème, de $\mu \in \mathfrak{J}(X)$, s'obtient en ajoutant à (14) $-\frac{1}{2} Q(y, y)$, la forme «quadratique» $Q(y, y)$ étant continue relativement à des voisinages de type du Hilbert-Schmidt (c.f. a) ci-dessus).

Remarque. Ceci contient la résultat de VARADHAN: si X est hilbertien, on prendra pour K la boule $\|x\| \leqq 1$, faiblement compacte, dont le polaire est la boule du dual (fort). On peut supposer K séparable car suivant un théorème connu (c.f. [1], [6]) toute loi μ dans $(X, \mathfrak{B})$ (nécessairement faiblement tendue) est tendue suivant des compacts (forts) séparables, donc $X_K = X$ est séparable (pour $\|x\|$). μ est en particulier portée par une partie séparable de X, on retombe sur le cas envisagé par VARADHAN.

Corollaire. *Le théorème qui suit dans le cas mètrisable, ou le cas gènèral suivant* HEINICH.

2. Théorème. *Soit $(X, \mathfrak{C})$ un E.V.T. (séparé) l.c., μ une loi indéfiniment divisible (définie sur la tribu borélienne $\mathfrak{B}$) tendue (régulière) suivant des compacts K_η $(\mu K_\eta \geqq 1 - \eta)$ a.c., hilbertiens, et tels que l'un d'eux, pour $3\eta + \sqrt{2\eta} \leqq \frac{1}{6}$, soit de type séparable. Alors sa f.c. $\varphi(y)$ s'écrit:*

$$\varphi(y) = i\,y(a) - \frac{1}{2} Q(y, y) + \int_X \left(e^{iy(x)} - 1 - \frac{iy(x)}{1 + \|x\|^2}\right) dF; \tag{15}$$

dans (15) $\|x\|$ *est la norme relative (par exemple) à* $K = K_\eta/\sqrt{2\eta}$, ($\|x\| = \infty$ *hors de* $X_K = \bigcup nK$), $Q(y, y)$ *est une forme quadratique*

$$(:\ Q(y + y', y + y') + Q(y - y', y - y') = 2[Q(y, y) + Q(y', y')]$$

continue, et $e^{-\frac{1}{2}Q}$ *est la 2ème f.c. de la composante normale centrée ϱ (tendue suivant les $2K_\eta$ pour les nombres 2η).*

Corollaire (FERNIQUE). *Si le dual* $(Y, \mathfrak{C}^c)$ *de* $(X, \mathfrak{C})$, *muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts a.c. de* X, *est nucléaire,* (15) *vaut pour toute μ t-régulière, de* $\mathfrak{J}(X)$.

Exemple. X est l'espace des distributions $\mathfrak{D}'(E^n)$, $(y, \mathfrak{C}^c)$ est $\mathfrak{D}(E^n)$, la topologie de X est la topologie faible dèfinie par la dualité $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$.

Démonstration. a) La relation (13′) vaut toujours, pour tout facteur (par définition les cofacteurs sont t-réguliers) $e(G)$ de μ (G t-régulière et bornée). A fortiori elle vaut pour les «facteurs propres» (au sens de [7]) $e(G)$ c'est à dire à co-facteurs indéfiniment divisibles.

On peut donc suivant le raisonnement de [5] (c.f. [7], le raisonnement du théorème II peut être refait, vu (13′) lorsque, comme ici, X_K seul est métrisable) extraire successivement les mesures (t-régulières) bornées de variations maximales $G_0, G_1, \ldots, G_n \ldots$ portées par les

$$V_n - V_{n+1} = \{x\colon\ 2^{-(n+1)} \leqq \|x\| < 2^{-n}\};$$

il existe des constantes a_n' telles que, avec $F_n = \sum_0^n G_i$:

$$\mu = \nu_n' \varrho_n', \quad \nu_n' = e(F_n) * a_n', \quad \varrho_n' \in \mathfrak{J}(X) \quad \text{et} \quad \{\nu_n'\}\ \text{U.T.}$$

Si ν' est une des lois limites pour cette suite U.T. (translatées les unes des autres puisqu'il s'agit de la convolution dénombrable des $e(G_n) * a_n' - a_{n-1}'$), on a donc $\mu = \varrho'\nu'$, où $\varrho' \in \mathfrak{J}(X)$.

Mais ϱ' est tendue suivant les $2K_{\eta_i}$ (et $\eta_i + \eta_i'$ avec $\sum \eta_i/\eta_i' < \infty$) qui sont hilbertiens, et de $\mathfrak{J}(X)$, donc $\varrho' = \lim e(\varrho^{1/n})$, car (c.f. [7] lemme 13) ces $e(\varrho^{1/n})$

ont des 2ème f.c. uniformément petites dans les mêmes voisinages que ϱ' donc sont U.T. (BADRIKIAN).

Alors ϱ' n'ayant aucun facteur propre $e(G)$ (le théorème II de [5] sus-dit), ϱ' est normale ([7], lemme 11, on le carollaire II–3 ci-dessus).

b) Considérons maintenent les $a_n \in X_K$ définis par:

$$y(a_n) = -\int_{2^{-n} \leqq \|x\| < 1} y(x)\, dF, \qquad F = \lim \uparrow F_n .$$

Les $e(F_n - G_0) * a_n$ ont pour 2ème f.c. les $\int_{2^{-n} \leqq \|x\| < 1} [e^{iy(x)} - 1 - iy(x)]\, dF$, sont U.T. suivant le raisonnement fait ci-dessus à propos de (13), donc $\nu_n = e(F_n) * a_n \to \nu$ définie par (14), translatée de $\nu \in (14')$; on a ([7], corollaire 1 du lemme 2) $\nu' = a'\nu$, donc $\mu = \varrho' a' \nu$: $\varrho = \varrho' a'$ est la loi normale unique telle que $\psi_\mu(y) = \psi_\varrho(y) + \psi_\nu(y)$. On a $\varrho = a\varrho^c$, ϱ^c centrée de 2ème f.c. $-\frac{1}{2}Q(y, y)$ (tendue suivant les $2K_\eta$, 2η), d'où (15) correspondant à (14'). $\lrcorner$

Remarque. On ne peut utiliser, concernant les $e(F_n - G_0)$ portées par X_K les propriétés de CV. dans cet espace (métrique) car nous désirons des CV. en loi dans X, c'est à dire suivant toutes les fonctions $f(x)$ réelles continues bornées dans X (: $f \in \mathfrak{C}(X)$). Il faudrait se placer dans la fermeture $\bar{X}_K$ de X_K dans X, non métrisable si X ne l'est pas, ce qui n'assure d'ailleurs pas le prolongement des $g \in \mathfrak{C}(\bar{X}_K)$ à tout X, si X n'est pas normal.

Références

1. BADRIKIAN, A.: Les éléments aléatoires vectoriels et la théorie de la fonction caractéristique. Thèse à paraître aux annales de l'Institut Henri-Poincaré (1968).
2. DELPORTE, J.: Fonctions aléatoires presque sûrement continues sur un intervalle fermé. Ann. Inst. Henri-Poincaré **1–2**, 111–215 (1964).
3. FERNIQUE, X.: Lois indéfiniment divisibles sur l'espace des distributions. Inventiones math. **3**, 282–292 (1967).
4. LEE, P. M.: Infinitely divisible stochastic processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **7**, 147–160 (1967).
5. PARTHASARATHY, RANGA RAO, and VARADHAN: Probability distributions on locally compact abelian groups. Illinois J. Math. **7**, 337–369 (1963).
6. SCHWARTZ, L.: Mesures de Radon sur des espaces topologiques arbitraires. Cours Inst. Henri-Poincaré (1964/65).
7. TORTRAT, A.: Structure des lois indéfiniment divisibles dans un espace vectoriel topologique, in "Symposium on probability methods in analysis". Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
8. VARADHAN, S. R. S.: Limit theorems for sums of independant random variables with values in a Hilbert space. Sankhya **24**, 213–238 (1962).

Prof. A. TORTRAT
85, rue de Paris
F-92 Meudon