Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
61, 483–499 (1982)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete
© Springer-Verlag 1982

Une projection de processus ponctuels

P.C.T. van der Hoeven*

Universiteit Leiden, Subfaculteit Wiskunde, Wassenaarseweg 80, 2333 AL Leiden, Nederland

Summary. In this paper we characterize the, what we call, visible projection of a point process on an arbitrary space as a Radon-Nikodym-derivative in the same manner the dual previsible projection of a process on $\mathbb{R}_+$ is defined by Dellacherie and Meyer [1]; this visible projection turns out to coïncide with the conditional intensity as defined by Papangelou [3]; a neat behaviour is imposed to the point process by only one intuïtively clear condition, which is proved to be equivalent to the classical smoothness-conditions (Σ) and (Σ^*).

§ 1. Introduction et notations

Papangelou [3] et Kallenberg [2] ont introduit l'intensité conditionnelle d'un processus ponctuel simple. Papangelou insista déjà sur l'analogie entre celle-ci et la projection prévisible d'un processus sur $\mathbb{R}_+$. Cette analogie est utilisée ici pour caractériser l'intensité conditionnelle comme l'unique mesure «visible» qui satisfait à une équation intégrale. Cela nous permet en même temps de définir la projection visible d'une mesure aléatoire sous des conditions moins restrictives.

On indiquera de temps en temps l'analogie avec la théorie des processus sur $\mathbb{R}_+$ en renvoyant à Dellacherie et Meyer [1], qui d'ailleurs est la référence constante et où l'on trouve toutes les notions non éclaircies dans le texte.

Nous considérons un espace localement compact à base dénombrable U, dont nous notons $\mathscr{B}$ la tribu borélienne. On sait qu'un tel espace est polonais. Il existe une suite de partitions $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \dots$ telle que chaque $V \in \mathscr{U}_i$ est la réunion d'un nombre borné d'élements de $\mathscr{U}_{i+1}$ et que $\mathscr{U}_1$ ne contient qu'un nombre au plus dénombrable d'ensembles qui sont tous bornés (cela implique que $\mathscr{U} =$

---

* Ces recherches ont été subventionées par l'Organisation Néerlandaise pour le Développement de la Recherche Scientifique (Z.W.O.; n° de bourse 62-138) et partiellement par le Centre National de la Recherche Scientifique

0044-3719/82/0061/0483/$03.40

$\bigcup_i \mathscr{U}_i$ ne contient qu'un nombre au plus dénombrable d'ensembles qui sont tous bornés). De plus on suppose que si $u \in G$, G ouvert, il existe un $V \in \mathscr{U}$ tel que $u \in V \subset G$; alors $\mathscr{B} = \mathscr{T}(\mathscr{U})$, i.e. la tribu engendrée par $\mathscr{U}$. On note $\mathscr{U}_{i,V} = \{W \in \mathscr{U}_i | W \subset V\}$.

L'espace polonais $\mathscr{M}$ consiste en toutes les mesures de Radon sur $(U, \mathscr{B})$. $\mathscr{M}' \subset \mathscr{M}$ est l'espace des mesures positives ponctuelles composées (i.e. $\rho \in \mathscr{M}'$ implique que le support de ρ n'a pas de points de condensation). Soient: $\rho \in \mathscr{M}$ et $B \in \mathscr{B}$; alors la mesure $B\rho$ est définie par $(B\rho)(\cdot) = \rho(\cdot \cap B)$.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet. On note $\mathscr{N}$ la classe d'ensembles $\mathbb{P}$-négligeables (dans la suite $\mathbb{P}$ est fixe; on l'omettra dans la notation). L'application $\mu: \Omega \to \mathscr{M}'$ est telle que pour tout $B \in \mathscr{B}$ et $\alpha \geqq 0$ on a: $\{\mu(B) \leqq \alpha\} \in \mathscr{A}$. Cette application, fondamentale dans ce qui suit, est appelée un processus ponctuel (composé). Définissons pour tout $V \in \mathscr{B}$ la tribu $\mathscr{F}^0(V)$ engendrée par les ensembles $\{\mu(B) \leqq \alpha\}$, $B \in \mathscr{B}$, $B \cap V = \emptyset$, $\alpha \geqq 0$. La tribu extérieure de V, $\mathscr{F}(V)$, est définie par $\mathscr{F}(V) = \mathscr{T}(\mathscr{F}^0(V), \mathscr{N})$; $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\emptyset)$.

On appelle la tribu visible et on note $\mathscr{X}$ la tribu sur $\Omega \times U$ engendrée par les ensembles $F \times B$, $F \in \mathscr{F}(B)$, $B \in \mathscr{B}$. Pour une bonne compréhension du texte il est essentiel de remarquer que la notion de visibilité est définie à l'aide des $\mathscr{F}(V)$, donc par rapport au processus ponctuel composé de base μ. (Visible veut dire: «visible de l'extérieure». La notion de visiblité est à comparer à la prévisibilité pour les processus sur $\mathbb{R}_+$ ([1]-IV-67).)

Un point aléatoire (p.a.) est une application $R: (\Omega, \mathscr{F}) \to (U \cup \{\Delta\}, \mathscr{B} \vee \{\Delta\})$ où Δ est un point hors de U (R est une v.a. $\mathscr{F}$-mesurable à valeurs dans $U \cup \{\Delta\}$). $[\![R]\!] = \{(\omega, u) | u = R(\omega),\ \omega \in R^{-1}(U)\}$ s'appelle le graphe de R. Un point aléatoire R est appelé visible (p.v.) si $[\![R]\!] \in \mathscr{X}$. Un point aléatoire (visible) est appelé une section (visible) de l'ensemble $A \in \mathscr{F} \times \mathscr{B}$ si $[\![R]\!] \subset A$.

Soit $A \in \mathscr{F} \times \mathscr{B}$; alors on introduit la projection π de A sur Ω:

$$\pi(A) = \{\omega \in \Omega | \exists\, u \in U \text{ tel que } (\omega, u) \in A\}.$$

A est appelé évanescent si $\mathbb{P}(\pi(A)) = 0$.

Un processus (stochastique) est une application $\mathscr{F} \times \mathscr{B}$-mesurable $X: \Omega \times U \to \overline{\mathbb{R}}$ ($X: (\omega, u) \to X_u(\omega)$). On dit qu'un processus est visible, s'il est $\mathscr{X}$-mesurable. On prolonge un processus X en une application sur $\Omega \times (U \cup \{\Delta\})$ en posant $X_\Delta(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. Si X est un processus et R un point aléatoire, la v.a. X_R est définie par $X_R(\omega) = X_{R(\omega)}(\omega)$. (N.B. donc $X_R = 0$ sur $\{R = \Delta\}$.)

Une application $\rho: \Omega \to \mathscr{M}$ telle que $\{\rho(B) \leqq \alpha\} \in \mathscr{F}$ pour tout $B \in \mathscr{B}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, est appelée une mesure aléatoire (m.a.). On pose $\rho(\{\Delta\}) = 0$ pour tout ω. Si ρ est une mesure aléatoire et R un point aléatoire la v.a. $\rho(R)$ est définie par $\rho(R)(\omega) = \rho_\omega(\{R(\omega)\})$. L'application fondamentale μ est un exemple d'une mesure aléatoire.

Nous ne distinguerons pas deux processus X et X' tels que $\mathbb{P}(X_u = X'_u\ \forall u \in U) = 1$ ni deux mesures aléatoires ρ et ρ' telles que $\mathbb{P}(\rho(B) = \rho'(B)\ \forall B \in \mathscr{B}) = 1$.

On aura remarqué le rôle insignifiant de la tribu $\mathscr{A}$ dans les définitions cidessus et d'autre part le rôle dominant de la mesure aléatoire μ: tout, ce qui est fonction de ω, peut être considéré comme fonction de μ (cf. [1]-I-18 et II-32). Par abus de notation nous écrirons par exemple $F=\{\omega \mid \mu \in F\}$ où $F \in \mathscr{F}$ ou $\mathscr{F}(V)$. (On peut éviter cet abus de notation en prenant $\Omega=\mathscr{M}'$.) Cependant, si l'on ne suppose que $\mathscr{A}$-mesurabilité partout, la situation ne devient pas essentiellement plus compliquée.

§ 2. Un théorème de section visible

Introduisons d' abord une famille importante d'ensembles visibles en définissant pour tout $V \in \mathscr{U}$:

$$\begin{aligned} H(V) &= \{(\omega, u) \mid u \in V,\ \mu(V-\{u\})=0\} \\ &= \lim_{i \to \infty} \bigcup_{W \in \mathscr{U}_{i,V}} \{\omega \mid \mu(V-W)=0\} \times W \in \mathscr{Z}, \end{aligned}$$

puisque $\{\omega \mid \mu(V-W)=0\} \in \mathscr{F}(W)$ (même $\in \mathscr{F}^0(W)$). Pour presque tout ω il existe pour tout $u \in U$ un $V \in \mathscr{U}$ tel que $\mu(V-\{u\})=0$, donc:

$$\text{(1)} \qquad \ldots \mathbb{P}(\pi(\bigcup_{V \in U} H(V))^c)=0;$$

N.B. $\mathscr{U}$ est une famille dénombrable.

Lemme 1. *La tribu visible est engendrée par la classe $\mathscr{D}$ d'ensembles de la forme $F \times V$ où $F \in \mathscr{F}(V)$, $V \in \mathscr{U}$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{C}$ l'algèbre engendrée par $\mathscr{U}$, et $\mathscr{E}$ la classe d'ensembles $B \in \mathscr{B}$ tels qu'on a $F \times B \in \mathscr{T}(\mathscr{D})$ pour tout $F \in \mathscr{F}(B)$.

$\mathscr{E}$ est stable pour la réunion dénombrable, puisque si $B=\bigcup_i B_i$, $B_i \in \mathscr{E}$, et $F \in \mathscr{F}(B)$, alors $F \in \mathscr{F}(B_i)$ pour tout i, donc $F \times B=\bigcup_i F \times B_i \in \mathscr{T}(\mathscr{D})$. Il en résulte d'abord que $\mathscr{E} \supset \mathscr{C}$.

De plus, $\mathscr{E}$ est stable pour l'intersection monotone; en effet, supposons $\mathscr{E} \ni B_i \downarrow B$. $\mathscr{F}(B)$ est engendrée par $\mathscr{N}(\subset \mathscr{F}(B_i)\ \forall i)$ et par les ensembles

$$\{\omega \mid \mu(A) \leqq \alpha\}, \qquad \alpha \geqq 0,\ A \in \mathscr{B},\ A \cap B=\emptyset$$

et on a

$$\{\mu(A \cap B_i^c) \leqq \alpha\} \times B_i \downarrow \{\mu(A) \leqq \alpha\} \times B,$$

parce que

$$\{\mu(A \cap B_i^c) \leqq \alpha\} \downarrow \{\mu(A) \leqq \alpha\},$$

tandis que

$$\{\mu(A \cap B_i^c) \leqq \alpha\} \in \mathscr{F}(B_i).$$

Par conséquent la classe $\mathscr{E}$ satisfait aux conditions du théorème des classes monotones ([1]-I-19), donc $\mathscr{E}=\mathscr{T}(\mathscr{C})=\mathscr{B}$. □

Lemme 2. *Soient $\varepsilon>0$ et $A \in \mathscr{Z}$; alors il existe un ensemble $\tilde{A} \subset A$ de la forme $\tilde{A}=\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{V \in \mathscr{U}^c{}_i} F(V) \times V$, où $F(V) \in \mathscr{F}(V)$ et $W \subset V (W, V \in \mathscr{U})$ implique $F(W) \subset F(V)$,* *tel qu'on a:*

$$\mathbb{P}(\pi(\tilde{A})) > \mathbb{P}(\pi(A)) - \varepsilon.$$

Démonstration. Grace à [1]-III-44+45 nous pouvons choisir une section R de A, telle que $\mathbb{P}(\pi[\![R]\!]) = \mathbb{P}(\pi(A))$ et nous définissons une mesure M sur $\mathscr{F} \times \mathscr{B}$ en posant:

$$M(G) = \int_{\pi[\![R]\!]} 1_G(\omega, R(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega) (= \mathbb{P}(\pi([\![R]\!] \cap G))), \qquad G \in \mathscr{F} \times \mathscr{B}.$$

La classe $\mathscr{D}_s$ contient les réunions finies d'éléments de $\mathscr{D}$. Cette classe étant stable pour l'intersection finie on sait qu'il existe un ensemble $\tilde{A}$, intersection dénombrable d'éléments de $\mathscr{D}_s$, tel que $M(\tilde{A}) > M(A) - \varepsilon$, donc que $\mathbb{P}(\pi(\tilde{A})) > \mathbb{P}(\pi(A)) - \varepsilon$ (cf. e.g. [1]-III-28). Pour $\tilde{A}$ on a l'écriture

$$\tilde{A} = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{où} \quad A_k = \bigcup_{j=1}^{m_k} F_{kj} \times V_{kj}, \qquad F_{kj} \in \mathscr{F}(V_{kj}),\ V_{kj} \in \mathscr{U}.$$

Ecrivons $i_k = \max\{i \mid \exists j\colon V_{kj} \in \mathscr{U}_i\}$. On peut partager les V_{kj} de sorte que l'on ait: $A_k = \bigcup_{V \in \mathscr{U}_{i_k}} F_k(V) \times V$ où $F_k(V) \in \mathscr{F}(V)$ (certains $F_k(V)$ seront vides). Si $V \in \mathscr{U}_i$, posons $F(V) = \bigcap_{\{k \mid i_k = i\}} F_k(V) (\in \mathscr{F}(V))$; alors

$$\tilde{A} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{V \in \mathscr{U}_i} F(V) \times V.$$

On voit aisément, que ce n'est pas une restriction de supposer que les $F(V)$ soient croissants $(W \subset V \Rightarrow F(W) \subset F(V))$. □

Remarque. En écrivant

$$F(u) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{W \in \mathscr{U}_i \\ W \ni u}} F(W) (\in \mathscr{F}(\{u\}))$$

on obtient:

$$\tilde{A} = \bigcup_{u \in U} F(u) \times \{u\}.$$

Théorème 3 (théorème de section). *Si $A \in \mathscr{Z}$ n'est pas évanescent, A a une section visible dont le graphe n'est pas évanescent.*

Exemple. Avant de prouver ce théorème, montrons par un exemple, que dans un sens cet énoncé est le plus fort, auquel on peut s'attendre (bien qu'il soit beaucoup plus faible que celui dans le cas prévisible ([1]-IV-85)).

Soit $0 \leqq c < 1$ et prenons $U = [0, 1-c)$ et comme espace de probabilité l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue; μ est définie par:

$$\begin{array}{ll} \mu(U) = \mu(\{\omega\}) = 1 & \text{si } 0 \leqq \omega < 1 - c, \\ \mu(U) = 0 & \text{sinon.} \end{array}$$

On sait que

$$H(U) = \{(\omega, \omega) \mid 0 \leqq \omega < 1 - c\} \cup (\{\omega \mid 1 - c \leqq \omega \leqq 1\} \times U)$$

est visible; $\mathbb{P}[\pi(H(U))]=1$. Mais si $c>0$ une section visible optimale de $H(U)$ est de la forme:

$$Z(\omega)=\begin{cases} u_0 & \text{si } \mu(U-\{u_0\})=0, \\ \Delta & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour certain $u_0 \in U$; et $\mathbb{P}(\pi[\![Z]\!])=c$. Si $c=0$, tout va bien grace à l'augmentation des $\mathscr{F}(V)$, car alors $H(U)$ est lui-même graphe d'un point aléatoire.

La distinction entre les cas $c=0$ et $c>0$ correspond à celle entre les cas i) et ii) dans la démonstration suivante.

Démonstration de Théorème 3. Grace à lemme 2 et (1) il suffit de «sectionner» ensembles visibles de la forme:

$$A=\lim_i \bigcup_{W\in\mathscr{U}_{i,V}} [\{\omega\,|\,\mu(V-W)=0\}\cap F(W)]\times W,$$

où $F(W)\in\mathscr{F}(W)$ et les $F(W)$ croissants.

On distingue deux cas:

i) $\mathbb{P}(\pi(A)\cap\{\mu(V)=0\})=0$.

Alors $A\cap[\{\pi(A)\cap\{\mu(V)=0\}\}^c\times V]\in\mathscr{Z}$ et

$$\mathbb{P}[\pi\{A\cap[\{\pi(A)\cap\{\mu(V)=0\}\}^c\times V]\}]=\mathbb{P}(\pi(A))>0,$$

mais d'autre part:

$$\begin{aligned} &A\cap[\{\pi(A)\cap\{\mu(V)=0\}\}^c\times V]= \\ &\qquad [\lim_i \bigcup_{W\in\mathscr{U}_{i,V}} (F(W)\cap\{\mu(V-W)=0\})\times W]\cap[\{\pi(A)^c\cup\{\mu(V)=0\}^c\}\times V] \\ &\quad =\lim_i \bigcup_{W\in\mathscr{U}_{i,V}} [F(W)\cap\{\mu(V-W)=0\}\cap\{\mu(V)=0\}^c]\times W \\ &\quad =\bigcup_{u\in V} [F(u)\cap\{\mu(V-\{u\})=0\}\cap\{\mu(V)\neq 0\}]\times\{u\} \\ &\quad =\bigcup_{u\in V} [F(u)\cap\{\mu(V-\{u\})=0\}\cap\{\mu(\{u\})\neq 0\}]\times\{u\}=[\![Z]\!], \end{aligned}$$

où Z est le point aléatoire défini par:

$$Z(\omega)=\begin{cases} u & \text{si } \mu(\{u\})\neq 0,\ \mu(V-\{u\})=0,\ \omega\in F(u), \\ \Delta & \text{sinon.} \end{cases}$$

ii) $c=\mathbb{P}(\pi(A)\cap\{\mu(V)=0\})>0$.

Selon [1]-III-44+45 il existe une section $\tilde{R}$ de $A\cap[\{\mu(V)=0\}\times V]$ telle que $\mathbb{P}(\pi[\![\tilde{R}]\!])=c$. Définissons un point visible R en posant: $R(\mu)=\tilde{R}(V^c\mu)$ et une section visible Z de A par $[\![Z]\!]=[\![R]\!]\cap A$; alors $[\![Z]\!]\supset[\![\tilde{R}]\!]$ donc $\mathbb{P}(\pi[\![Z]\!])\geqq c>0$. $\square$

§ 3. La projection visible

On définit la tribu extérieure d'un point aléatoire R par:

$$\mathscr{F}(R)=\mathscr{T}\{F\cap\{R\in V\},\ F\in\mathscr{F}(V),\ V\in\mathscr{B}\}.$$

Remarques. 1) Si $R=u$ p.s., on a $\mathscr{F}(R)=\mathscr{F}(\{u\})$.

2) $\mathscr{F}(R)$ est à comparer à $\mathscr{F}_{T-}$ dans le cas des processus sur $\mathbb{R}_+$.

3) Soit la fonction $f_R\colon \Omega\to\Omega\times(U\cup\{\Delta\})$ définie par $f_R(\omega)=(\omega, R(\omega))$; alors $\mathscr{F}(R)=f_R^{-1}(\mathscr{Z})$; de plus $f_R^{-1}(A)=\pi(A\cap[\![R]\!])$.

Se basant sur cette dernière remarque on prouve aisément les lemmes suivants:

Lemme 4. *Soient Z un point visible et $F\in\mathscr{F}(Z)$. Alors $(F\times U)\cap[\![Z]\!]\in\mathscr{Z}$, donc $(F\times U)\cap[\![Z]\!]$ est le graphe d'un point visible.*

Démonstration. $F\in\mathscr{F}(Z)$ si seulement s'il existe un ensemble $A\in\mathscr{Z}$ tel que $F=f_Z^{-1}(A)=\pi(A\cap[\![Z]\!])$ de sorte que $\omega\in F$ implique $(\omega,Z(\omega))\in A$, donc $(F\times U)\cap[\![Z]\!]=A\cap[\![Z]\!]\in\mathscr{Z}$. □

Lemme 5. *Soient R un point aléatoire et Z un point visible, alors $\mathscr{F}(Z)\cap\{Z=R\in U\}\subset\mathscr{F}(R)$, donc en particulier $\{Z=R\in U\}\in\mathscr{F}(R)$.*

Démonstration. La dernière partie de l'énoncé est une conséquence de remarque 3: $\{Z=R\in U\}=\pi([\![Z]\!]\cap[\![R]\!])=f_R^{-1}([\![Z]\!])\in\mathscr{F}(R)$. Ensuite on note que la tribu $\mathscr{F}(Z)\cap\{Z=R\in U\}$ est engendrée par les ensembles:

$$\{Z=R\in U\}\cap F\cap\{Z\in V\}=\{Z=R\in U\}\cap F\cap\{R\in V\}\in\mathscr{F}(R)$$

où $F\in\mathscr{F}(V)$ et $V\in\mathscr{B}$. □

Lemme 6. *A toute mesure aléatoire positive ρ on peut faire correspondre un ensemble $\sigma(\rho)\in\mathscr{Z}$, dont le complément est la réunion des graphes disjoints d'un nombre au plus dénombrable de points visibles, tel que pour tous les points visibles Z avec $[\![Z]\!]\subset\sigma(\rho)$ on a $\mathbb{P}(\rho(Z)\neq 0)=0$ et que pour tous les points visibles Z avec $[\![Z]\!]\subset\sigma(\rho)^c$ et $\mathbb{P}(\pi[\![Z]\!])>0$ on a $\mathbb{P}(\rho(Z)>0)>0$.*

Démonstration. Supposons d'abord que U soit borné et écrivons $\mathscr{V}$ pour la collection des points visibles.

On choisit Z_1^1 de l'ensemble $\{Z\in\mathscr{V}\mid\mathbb{P}(\rho(Z)>\frac{1}{2})>\frac{1}{2}\}$; Z_2^1 de

$$\{Z\in\mathscr{V}\mid[\![Z]\!]\cap[\![Z_1^1]\!]=\emptyset,\ \mathbb{P}(\rho(Z)>\tfrac{1}{2})>\tfrac{1}{2}\},$$

etc. Parce que $\mathbb{P}(\rho(U)<\infty)=1$ (U étant borné) il existe un nombre fini n_1 tel que

$$\left\{Z\in\mathscr{V}\mid[\![Z]\!]\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n_1}[\![Z_i^1]\!]\right]=\emptyset,\ \mathbb{P}(\rho(Z)>\tfrac{1}{2})>\tfrac{1}{2}\right\}=\emptyset.$$

Ensuite on applique le même procédé à:

$$\left\{Z\in\mathscr{V}\mid[\![Z]\!]\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n_1}[\![Z_i^1]\!]\right]=\emptyset,\ \mathbb{P}(\rho(Z)>(\tfrac{1}{2})^2)>(\tfrac{1}{2})^2\right\},$$

de sorte qu'on trouve $Z_1^2\ldots Z_{n_2}^2$; etc.

Si Z est un point visible il existe un point visible unique $\tilde{Z}$, tel que $[\![\tilde{Z}]\!]\subset[\![Z]\!]$ et $\mathbb{P}(\rho(\tilde{Z})>0)=\mathbb{P}(\rho(Z)>0)$, qui possède la propriété suivante: si Z'

est un point visible tel que $[\![Z']\!] \subset [\![\tilde{Z}]\!]$ et $\mathbb{P}(\pi[\![Z']\!] > 0$, on a: $\mathbb{P}(\rho(Z') > 0) > 0$. En effet: $\tilde{Z}$ est déterminé par $[\![\tilde{Z}]\!] = [\![Z]\!] \cap \{(\omega, u) | \mathbb{P}(\rho(Z) > 0 | \mathscr{F}(Z)) > 0\}$.

L'ensemble $(\bigcup_i \bigcup_j [\![\tilde{Z}_i^j]\!])^c$ satisfait aux conditions imposées à $\sigma(\rho)$. Le cas général se déduit directement du cas où U est borné, puisqu'alors U est la réunion dénombrable d'ensembles bornés. □

Nous écrirons: $\sigma(\mu) = \sigma$.

Théorème 7. *Soit X un processus positif fini ou borné; alors il existe un processus visible ${}^zX$ tel que l'on a:*

$$\mathbb{E} X_Z = \mathbb{E}\, {}^zX_Z \quad \textit{pour tous les points visibles } Z.$$

${}^zX$ est unique (à un ensemble évanescent près); on l'appelle la projection visible de X (cf. [1]-VI-43).

Démonstration. Comme dans la démonstration de [1]-VI-43 le théorème de section entraine l'unicité et nous permet de raisonner par classes monotones ([1]-I-21). Pour établir l'existence des projections visibles pour tous les processus bornés il suffit donc de la montrer pour les processus de la forme:

$$X_u(\omega) = 1_F(\omega)\, 1_B(u) \qquad F \in \mathscr{F},\ B \in \mathscr{B}.$$

Choisissons une famille de points visibles $\{Z_\alpha\}$ telle que $\sigma^c = \bigcup_\alpha [\![Z_\alpha]\!]$ (cf. lemme 6) et définissons pour tout α sur $[\![Z_\alpha]\!]$:

$${}^zX_u(\omega) = \mathbb{P}[F | \mathscr{F}(Z_\alpha)](\omega)\, 1_{[\![Z_\alpha]\!]}(\omega, u)\, 1_B(u),$$

(dont la visibilité résulte de lemme 4) et sur σ:

$${}^zX_u(\omega) = 1_F(\{u\}^c \mu)\, 1_B(u)$$

(donc sur σ: ${}^zX_u(\omega) = \lim_i \sum_{V \in \mathscr{U}_i} 1_F(V^c \mu) 1_{V \cap B}(u) \in \mathscr{Z}$; l'existence de cette limite découle de (1)).

Maintenant le processus visible ${}^zX$ est défini partout. Soit Z un point visible; $\{Z = Z_\alpha \in B\} \in \mathscr{F}(Z_\alpha)$ (lemme 5) donc:

$$\int_{\{Z = Z_\alpha \in B\}} {}^zX_Z\, d\mathbb{P} = \int_{\{Z = Z_\alpha \in B\}} \mathbb{P}[F | \mathscr{F}(Z_\alpha)]\, d\mathbb{P} = \int_{\{Z = Z_\alpha \in B\}} 1_F\, d\mathbb{P} = \int_{\{Z = Z_\alpha \in B\}} X_Z\, d\mathbb{P}$$

pour tout α, et $\mathbb{P}(\pi([\![Z]\!] \cap \sigma) \cap \{\mu(Z) > 0\}) = 0$, donc:

$$\int_{\pi([\![Z]\!] \cap \sigma)} {}^zX_Z\, d\mathbb{P} = \int_{\pi([\![Z]\!] \cap \sigma)} 1_F(\{Z\}^c \mu)\, 1_B(Z)\, d\mathbb{P} = \int_{\pi([\![Z]\!] \cap \sigma)} 1_F(\mu)\, 1_B(Z)\, d\mathbb{P}$$
$$= \int_{\pi([\![Z]\!] \cap \sigma)} X_Z\, d\mathbb{P}.$$

(N.B. $\pi([\![Z]\!] \cap \sigma) = \{\omega | (\omega, Z(\omega)) \in \sigma\}$). Il en résulte que $\mathbb{E}\, {}^zX_Z = \mathbb{E} X_Z$.

Le théorème est démontré pour des processus bornés. Pour passer aux processus positifs finis X, on applique le résultat précédent à $X \wedge n$ et l'on fait tendre n vers l'infini. □

Remarques. 4) Soient R un point aléatoire et Y un processus visible. Alors on voit, grace à remarque 3, que Y_R est $\mathscr{F}(R)$-mesurable.

5) Soit Z un point visible; alors:

$$^z X_Z = \mathbb{E}[X_Z | \mathscr{F}(Z)] \quad \text{p.s.}$$

En effet, les deux membres sont $\mathscr{F}(Z)$-mesurables, donc il résulte de lemme 4, que s'ils différaient sur un ensemble non négligeable, il existerait un point visible Z' tel que $[\![Z']\!] \subset [\![Z]\!]$ et que $\mathbb{E}\, {}^z X_{Z'} \neq \mathbb{E} X_{Z'}$.

6) Si Y est un processus visible, ${}^z(XY) = {}^zX \cdot Y$.

7) Sur σ on a: ${}^z X_u(\omega) = X_u(\{u\}^c \mu)$.

8) Si $F \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$ on peut définir la projection visible de l'application $1_F 1_B$: $(\omega, u) \to 1_F(\omega)\, 1_B(u)$ par:

$$^z(1_F 1_B) = {}^z(\mathbb{P}[F | \mathscr{F}]\, 1_B).$$

Le processus intermédiaire $\mathbb{P}[F|\mathscr{F}]\, 1_B$ est à comparer à la projection optionnelle dans le cas des processus sur $\mathbb{R}_+$.

§ 4. Mesures aléatoires visibles et la projection visible (duale) de mesures aléatoires

Définition. On dit qu'une mesure aléatoire ζ est visible si:

(2) pour tout point visible Z, $\zeta(Z)$ est $\mathscr{F}(Z)$-mesurable,

et

(3) pour tout point aléatoire R tel que $[\![R]\!] \subset \sigma(\zeta)$ on a $\zeta(R) = 0$ p.s.

(cf. [1]-(1980), compléments au chapitre IV).

Avant d'étudier des mesures visibles, nous donnerons une démonstration simple d'un résultat bien connu, fondée sur le théorème de section ordinaire.

Lemme 8. *L'ensemble $A = \{(\omega, u) | \mu(\{u\}) \neq 0\}$ est la réunion d'un nombre au plus dénombrable de graphes de points aléatoires.*

Démonstration. Supposons d'abord que U soit borné. $A \in \mathscr{F} \times \mathscr{B}$. Soit R_1 une section $\mathscr{F}$-mesurable de A avec $\mathbb{P}(\pi[\![R_1]\!]) = \mathbb{P}(\pi(A))$ (cf. [1]-III-44+45). Ensuite on sectionne $A - [\![R_1]\!]$ pour trouver R_2; etc. On vérifie aisément qu'un nombre au plus dénombrable de R_i suffit pour que $\mathbb{P}(\pi(A - \bigcup_i [\![R_i]\!])) = 0$.

Dans le cas général U est la réunion dénombrable d'ensembles bornés. □

Théorème 9. *Une mesure aléatoire positive ζ est visible si et seulement si:*

$$\mathbb{E} \int X \, d\zeta = \mathbb{E} \int {}^z X \, d\zeta \tag{4}$$

pour tout processus positif X; dans ce cas on sait de plus que $\zeta(R)$ est $\mathscr{F}(R)$-mesurable pour tout point aléatoire R.

Démonstration. La dernière remarque est une conséquence immédiate de lemme 5 et de (2) et (3).

Démonstration «(2)$\Leftarrow$»: Soit Z un point visible. Il suffit de montrer que $\mathbb{E}\zeta(Z)\cdot H=0$ pour toute v.a. H telle que $\mathbb{E}[H|\mathscr{F}(Z)]=0$ p.s. (En effet: la $\mathscr{F}(Z)$-mesurabilité de $\zeta(Z)$ résulte de $\mathbb{E}[1_F\zeta(Z)]=\mathbb{E}[\mathbb{P}[F|\mathscr{F}(Z)]\zeta(Z)]$ pour tout $F\in\mathscr{F}$.) Supposons que H est une v.a. telle que $\mathbb{E}[H|\mathscr{F}(Z)]=0$ p.s., et soit H^* le processus défini par $H^*_u(\omega)=H(\omega)$ pour tout $u\in U$, $\omega\in\Omega$; alors ${}^zH^*_Z=$ $=\mathbb{E}[H^*_Z|\mathscr{F}(Z)]=0$ p.s., donc, parce que $[\![Z]\!]\in\mathscr{Z}$:

$$\mathbb{E}\zeta(Z)\cdot H=\mathbb{E}\int 1_{[\![Z]\!]}(\omega,u)\,H^*_u(\omega)\,\zeta_\omega(du)=\mathbb{E}\int 1_{[\![Z]\!]}(\omega,u)\,{}^zH^*_u(\omega)\,\zeta_\omega(du)=0.$$

Démonstration «(3)$\Leftarrow$»: Soit R un point aléatoire tel que $[\![R]\!]\subset\sigma(\zeta)$; $\sigma^c\cap\sigma(\zeta)$ est la réunion d'un nombre au plus dénombrable de points visibles dans $\sigma(\zeta)$ donc $\mathbb{E}\int 1_{\sigma^c\cap\sigma(\zeta)}\,d\zeta=0$, de sorte qu'on a $\mathbb{P}(\zeta(R)\neq 0)=0$ si $[\![R]\!]\subset\sigma^c\cap\sigma(\zeta)$.

Supposons dans ce qui suit $[\![R]\!]\subset\sigma\cap\sigma(\zeta)$. Grace à (1) il suffit de considérer des points aléatoires R pour lesquels il existe un $V\in\mathscr{U}$ tel que $[\![R]\!]\subset H(V)$. Alors il existe un point visible R' tel que:

$$\begin{aligned}[\![R']\!]&=\{(\omega,u)\,|\,u=R(V^c\mu),\ \mu(V-\{u\})=0\}\\&=\{(\omega,u)\,|\,u=R(\{u\}^c\mu),\ \mu(V-\{u\})=0\},\end{aligned}$$

donc on a:

$$\mathbb{E}\zeta(R)=\mathbb{E}\int 1_{\sigma(\zeta)}\,1_{[\![R]\!]}\,d\zeta=\mathbb{E}\int 1_{\sigma(\zeta)}\,{}^z1_{[\![R]\!]}\,d\zeta=\mathbb{E}\int 1_{\sigma(\zeta)}\,1_{[\![R']\!]}\,d\zeta=0.$$

Démonstration «$\Rightarrow$(4)»: Soient Z un point visible et X un processus positif. Alors il résulte de (2) et de § 3 remarque 5 que

$$\mathbb{E}\int {}^zX\,1_{[\![Z]\!]}\,d\zeta=\mathbb{E}\,{}^zX_Z\,\zeta(Z)=\mathbb{E}X_Z\,\zeta(Z)=\mathbb{E}\int X\,1_{[\![Z]\!]}\,d\zeta$$

et grace à lemme 8 et (3) on a:

$$\mathbb{P}[\pi(\{(\omega,u)\,|\,\zeta(\{u\})\neq 0,\ \mu(\{u\})\neq 0\}\cap\sigma(\zeta))]=0.$$

On démontre (4) en combinant les résultats ci-dessus:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int {}^zX\,d\zeta&=\mathbb{E}\int {}^zX\,1_{\sigma^c\cup\sigma(\zeta)^c}\,d\zeta+\mathbb{E}\int {}^zX\,1_{\sigma\cap\sigma(\zeta)}\,d\zeta\\&=\mathbb{E}\int X\,1_{\sigma^c\cup\sigma(\zeta)^c}\,d\zeta+\mathbb{E}\int X_u(\{u\}^c\mu)\,1_{\sigma\cap\sigma(\zeta)}(\omega,u)\,d\zeta(u)\\&=\mathbb{E}\int X\,1_{\sigma^c\cup\sigma(\zeta)^c}\,d\zeta+\mathbb{E}\int X_u(\mu)\,1_{\sigma\cap\sigma(\zeta)}(\omega,u)\,d\zeta(u)\\&=\mathbb{E}\int X\,d\zeta.\quad\square\end{aligned}$$

Dans la suite nous supposerons qu'il existe une partition de $\Omega\times U$ en un nombre dénombrable d'ensembles visibles A_i telle que $\mathbb{E}\int 1_{A_i}\,d\mu<\infty$ pour tout i. C'est par exemple le cas si le processus μ est intégrable ou simple (Si le processus est simple (c'est à dire: $\mu(\{u\})=0$ ou 1 pour tout u p.s.) la partition exigée est trouvée aisément à partir des $H(V)$.)

Théorème 10. *Il existe une mesure aléatoire visible μ^z, unique, telle que l'on a pour tout processus visible X non négatif:*

(5) $$\mathbb{E}\int X\,d\mu=\mathbb{E}\int X\,d\mu^z.$$

On appelle μ^z la projection visible (duale) de μ (cf. [1]-VI-73).

Démonstration. Soit M_i^z la mesure sur $(\Omega \times U, \mathscr{F} \times \mathscr{B})$ définie par: $M_i^z(X) = \mathbb{E}\int 1_{A_i}{}^z X\, d\mu$ pour tous les processus positifs X. Si $A \in \mathscr{F} \times \mathscr{B}$ est évanescent, ${}^z 1_A = 1_A$ donc $M_i^z(\cdot \times V) \ll \mathbb{P}$ pour tout i et $V \in \mathscr{B}$. Analoguement à l'existence de distributions conditionnelles sur des espaces polonais, on montre qu'il existe pour tout i une mesure aléatoire finie unique μ_i^z sur $(U, \mathscr{U})$ telle que:

$$\mu_i^z(V) = \frac{d M_i^z(\cdot \times V)}{d\mathbb{P}}.$$

Le prolongement unique de μ_i^z sur $\mathscr{B}$ est encore noté μ_i^z. Soit $\mu^z = \sum_i \mu_i^z$; alors on a $\mathbb{E}\int {}^z(1_{F\times V})\, d\mu = \mathbb{E}\int 1_{F\times V}\, d\mu^z$ pour tout $F \in \mathscr{F}$, $V \in \mathscr{U}$ donc $\mathbb{E}\int {}^z X\, d\mu = \mathbb{E}\int X\, d\mu^z$ pour tous les processus positifs. Le fait que μ^z est une mesure aléatoire visible se déduit de théorème 9. □

Théorème 11. i) $\mu^z(Z) = \mathbb{E}[\mu(Z) | \mathscr{F}(Z)]$ *p.s. pour tout point visible* Z.

ii) $\sigma(\mu^z) = \sigma$.

iii) $\mathbb{E}[\mu^z(V) | \mathscr{F}(V)] = \mathbb{E}[\mu(V) | \mathscr{F}(V)]$ *p.s. pour tout* $V \in \mathscr{B}$. *Si* μ *est intégrable cette propriété détermine* μ^z *parmi les mesures aléatoires visibles; il suffit même de la vérifier pour tout* $V \in \mathscr{U}$.

Démonstration. i) Les deux membres sont $\mathscr{F}(Z)$-mesurables. Soit $F \in \mathscr{F}(Z)$; alors $A = (F \times U) \cap [\![Z]\!] \in \mathscr{Z}$ donc:

$$\mathbb{E}\mu^z(Z)\, 1_F = \mathbb{E}\int 1_A(\omega, u)\, d\mu^z = \mathbb{E}\int 1_A(\omega, u)\, d\mu = \mathbb{E}\mu(Z)\, 1_F.$$

ii) est une conséquence triviale de i).

iii) est aussi trivial, puisque si $V \in \mathscr{B}$ et $F \in \mathscr{F}(V)$, $F \times V \in \mathscr{Z}$ et d'autre part $\mathscr{Z}$ est engendrée par $\{F \times V \mid V \in \mathscr{U}, F \in \mathscr{F}(V)\}$ (lemme 1). □

Remarques. 1) Une mesure aléatoire ζ est visible si et seulement si le processus $\hat{\zeta}$: $(\omega, u) \to \zeta(\{u\})$ est visible. On montre la condition nécessaire en utilisant le théorème de section ordinaire ([1]-III-44+45) et lemme 4; la condition suffisante est une conséquence du théorème de section visible et de § 3 remarque 3.

2) La construction de μ^z comme désintégration est analogue à celle de la projection prévisible duale, mais aussi à celle du noyau de Papangelou sous la condition (Σ) mentionnée ci-dessous (cf. η en [2]-Th. 3.1.).

3) On voit aisément que la théorie de projection visible duale s'applique à toute mesure aléatoire ($\mathscr{A}$-mesurable). Il reste pourtant essentiel que la filtration $(\mathscr{F}(V))$ soit engendrée par «notre» μ.

§ 5. Les Conditions (σ), (Σ) et (Σ^*)

La mesure aléatoire ponctuelle simple ξ est définie par $\xi(\{u\}) = 1 \Leftrightarrow \mu(\{u\}) \neq 0$.

Nous définissons les distributions conditionnelles $\mathbb{P}[\cdot | \mathscr{F}(V)]$, $V \in \mathscr{U}$ sur $\mathscr{F}$ à un seul ensemble négligeable près.

Introduisons 3 conditions de régularité pour $\mathbb{P}$:

$$(\sigma) \qquad \mathbb{P}(\pi(\sigma^c))=0,$$

i.e.: $\mathbb{P}(\mu(Z)\neq 0)=0$ pour tout point visible Z.

(Σ) $\quad \mathbb{P}[\xi(V)=0 \mid \mathscr{F}(V)]>0$ p.p. sur $\{\xi(V)=1\}$ pour tout $V\in\mathscr{U}$.

(Σ^*) Pour tout $V\in\mathscr{U}$ on a p.s.: $\mathbb{P}[\mu(\{u\})\neq 0 \mid \mathscr{F}(V)]=0$ pour tout $u\in V$.

Les conditions (Σ) et (Σ^*) sont introduites par Papangelou [3]. Si la condition (σ) est satisfaite on voit que μ^z est une mesure aléatoire diffuse. La condition (Σ) répare une conséquence désagréable de la complétion:

Lemme 12. *Si (Σ) est satisfaite on a pour tous $V\in\mathscr{U}$, $F\in\mathscr{F}(V)$:*

$$\mathbb{P}(F\,\triangle\,\{\omega \mid V^c\mu\in F\})=0.$$

Démonstration. Il résulte de (Σ) que pour tous $V\in\mathscr{U}$ et $G\in\mathscr{F}(V)$ tel que $\mathbb{P}(G)>0$, on a: $\mathbb{P}(G\cap\{\xi(V)=0\})>0$. (Il n'est pas difficile de montrer ce résultat, qui d'ailleurs est implicit dans la démonstration de [2]-Th. 3.1). On a $F\in\mathscr{F}(V)$, donc $G=F\,\triangle\,\{\omega \mid V^c\mu\in F\}\in\mathscr{F}(V)$ et $G\subset\{\xi(V)\neq 0\}$ de sorte que $\mathbb{P}(G\cap\{\xi(V)=0\})=0$, ce qui entraine $\mathbb{P}(G)=0$. □

Théorème 13. *(σ) est satisfaite si et seulement si (Σ) et (Σ^*) sont satisfaites.* (*cf.* *théorème* 11 *ii)* *et* [2]-*théorème* 2.2.)

Démonstration. «$(\sigma)\Leftarrow$»: Supposons que (Σ) et (Σ^*) sont satisfaites. Nous devons montrer que $\mathbb{P}(\mu(Z)\neq 0)=0$ pour tout point visible Z.
Grace à (1) et lemme 2 il suffit de vérifier cette égalité pour points visibles Z tels qu'on a:

$$[\![Z]\!]=\lim_i \bigcup_{W\in\mathscr{U}_{i,V}} [F(W)\cap\{\mu(V-W)=0\}]\times W,$$

où $F(W)\in\mathscr{F}(W)$. Alors il résulte de lemme 12 que:

$$[\![Z]\!]=\{\lim_i \bigcup_{W\in\mathscr{U}_{i,V}} [\tilde{F}(W)\cap\{\mu(V-W)=0\}]\times W\}\,\triangle\, Y,$$

où $\tilde{F}(W)=\{\omega \mid V^c\mu\in F(W)\}\in\mathscr{F}(V)$ et Y est un ensemble évanescent. Le graphe du point visible R: $(\Omega,\mathscr{F}(V))\to V\cup\{\Delta\}$ défini par $R(\mu)=Z(V^c\mu)$ est:

$$[\![R]\!]=\lim_i \bigcup_{W\in\mathscr{U}_{i,V}} \tilde{F}(W)\times W$$

donc $[\![Z]\!]\subset[\![R]\!]\cup Y$ et l'on obtient (σ), car:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mu(R)\neq 0)&=\mathbb{P}(\lim_i \bigcup_{W\in\mathscr{U}_i} \{\mu(W)\neq 0\}\cap R^{-1}(W))\\ &=\mathbb{E}\lim_i \sum_{W\in\mathscr{U}_i} 1_{R^{-1}(W)}\mathbb{P}[\mu(W)\neq 0 \mid \mathscr{F}(V)]=0.\end{aligned}$$

Démonstration «$\Rightarrow(\Sigma)$»: Supposons que (Σ) ne soit pas satisfaite; alors il existent $V \in \mathscr{U}$ et $F \in \mathscr{F}(V)$ tels que $\mathbb{P}(F \cap \{\xi(V)=1\})>0$ mais $\mathbb{P}(F \cap \{\xi(V)=0\})=0$; donc l'application

$$Z\colon \omega \to \begin{cases} u \in V & \text{si } \mu(\{u\}) \neq 0,\ \mu(V-\{u\})=0,\ \omega \in F \\ \Delta & \text{sinon} \end{cases}$$

est un point visible (cf. la démonstration de théorème 3) et $\mathbb{P}(\mu(Z) \neq 0) = \mathbb{P}(\pi[\![Z]\!])>0$, dont on conclut que (σ) n'est pas satisfaite.

Démonstration. «$\Rightarrow(\Sigma^*)$»: Définissons pour tout $V \in \mathscr{U}$:

$$K(V)=\{(\omega,u) \mid u \in V, \mathbb{P}[\mu(\{u\}) \neq 0 \mid \mathscr{F}(V)](\omega)>0\};$$

alors

$$K(V)=\bigcup_{k=1}^{\infty} K_k(V)$$

où

$$K_k(V)=\lim_i \bigcup_{W \in \mathscr{U}_{i,V}} \left\{(\omega,u) \mid u \in W, \mathbb{P}[\mu(W) \neq 0 \mid \mathscr{F}(V)](\omega)>\frac{1}{k}\right\},$$

donc certainement: $K_k(V) \in \mathscr{F}(V) \times \mathscr{B}$.

Si (Σ^*) n'est pas satisfaite, il doit y avoir un $V \in \mathscr{U}$ tel que $\mathbb{P}[\pi\{K(V)\}]>0$; alors il existe un k tel que $\mathbb{P}[\pi\{K_k(V)\}]>0$. Grace à [1]-III-44+45 nous pouvons trouver une application $Z\colon (\Omega, \mathscr{F}(V)) \to V$ telle que $[\![Z]\!] \subset K_k(V)$ et $\mathbb{P}(\pi[\![Z]\!])=\mathbb{P}[\pi\{K_k(V)\}]$. Z est un point visible et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mu(Z)>0) &= \mathbb{P}[\lim_i \bigcup_{W \in \mathscr{U}_i} (\{\mu(W)>0\} \cap Z^{-1}(W))] \\ &= \mathbb{E}[\lim_i \sum_{W \in \mathscr{U}_i} 1_{Z^{-1}(W)} \mathbb{P}[\mu(W)>0 \mid \mathscr{F}(V)]] \geqq \frac{1}{k} \mathbb{P}(\pi[\![Z]\!])>0. \quad \square\end{aligned}$$

§6. L'intensité conditionnelle d'un processus ponctuel

Dans ce paragraphe nous supposerons que $\mathbb{P}$ satisfait à:

i) $\mathbb{E}\mu(V)<\infty$ pour tout $V \in \mathscr{U}$.

ii) $\mathbb{E}\xi(V)<\infty$ pour tout $V \in \mathscr{U}$.

Nous utiliserons abondamment les résultats et les raisonnements de Papangelou [3]. On remarque que $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{F}^0(V)]$ est une version de $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{F}(V)]$.

Lemme 14. *Soit Z un point visible qui possède la propriété suivante:*

$$(6)\quad \begin{cases} \textit{On peut écrire } [\![Z]\!]=\lim_i \bigcup_{V \in \mathscr{U}_i} F(V) \times V,\ F(V) \in \mathscr{F}(V); \\ F(W) \subset F(V) \textit{ si } W \subset V;\ F(V) \cap F(V')=\emptyset \textit{ si } V \cap V'=\emptyset; \\ \textit{et } \lim_i \bigcup_{V \in \mathscr{U}_i} F(V)=\pi[\![Z]\!]; \end{cases}$$

alors il existe une v.a. $\mathscr{F}(Z)$-mesurable $\zeta(Z)$ telle qu'on a p.s.:

$$\sum_{V\in\mathscr{U}_i} \mathbb{E}[\mu(V)|\mathscr{F}(V)]\,1_{\{Z\in V\}}\to\zeta(Z) \qquad (i\to\infty).$$

Démonstration. $(\sum_{V\in\mathscr{U}_i} \mathbb{E}[\mu(V)|\mathscr{F}(V)]\,1_{F(V)}, \mathscr{T}(F(V)\cap F; F\in\mathscr{F}(V), V\in\mathscr{U}_i))_i$ est une surmartingale. En effet, il est clair que le processus est adapté et soient $F\in\mathscr{F}(V)$, $V\in\mathscr{U}_i$; alors:

$$\begin{aligned}\int_{F\cap F(V)} \sum_{W\in\mathscr{U}_{i+1}} \mathbb{E}[\mu(W)|\mathscr{F}(W)]\,1_{F(W)}\,d\mathbb{P} &= \int_F \sum_{W\in\mathscr{U}_{i+1,V}} \mu(W)\,1_{F(W)}\,d\mathbb{P} \leqq\\ \leqq \int_F \sum_{W\in\mathscr{U}_{i+1,V}} \mu(V)\,1_{F(W)}\,d\mathbb{P} &\leqq \int_F \mu(V)\,1_{F(V)}\,d\mathbb{P} = \int_{F\cap F(V)} \mathbb{E}[\mu(V)|\mathscr{F}(V)]\,d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Donc $\lim_i \sum_{V\in\mathscr{U}_i} \mathbb{E}[\mu(V)|\mathscr{F}(V)]\,1_{F(V)}=\zeta(Z)$ existe p.s. et puisque

$$\sum_{V\in\mathscr{U}_i} (1_{F(V)}-1_{\{Z\in V\}})\to 0 \qquad (i\to\infty)$$

on a

$$\zeta(Z)=\lim_i \sum_{V\in\mathscr{U}_i} \mathbb{E}[\mu(V)|\mathscr{F}(V)]\,1_{\{Z\in V\}} \quad \text{p.s.}$$

Il est clair que $\zeta(Z)$ est $\mathscr{F}(Z)$-mesurable. □

Lemme 15. *Pour tout $V\in\mathscr{U}$ il existe un ensemble $\Sigma^*(V)\in\mathscr{F}(V)\times\mathscr{B}$, $\Sigma^*(V)\subset\Omega\times V$, tel que $\Sigma^*(V)^c\cap(\Omega\times V)$ est la réunion d'un nombre au plus dénombrable de graphes de points visibles, qui possèdent la propriété* (6) *et que $(\omega,u)\in\Sigma^*(V)$ implique $\mathbb{P}[\mu(\{u\})\neq 0|\mathscr{F}(V)]=0$ (à un ensemble évanescent près).*

Démonstration. Définissons $K_k(V)$ comme dans la dernière partie de la démonstration de théorème 13; Z_1^k en est une section $\mathscr{F}(V)$-mesurable telle que $\mathbb{P}(\pi[\![Z_1^k]\!])=\mathbb{P}[\pi\{K_k(V)\}]$; en particulier Z_1^k est un point visible qui possède la propriété (6); ensuite on trouve Z_2^k, section $\mathscr{F}(V)$-mesurable de $K_k(V)-[\![Z_1^k]\!]$; etc. Comme dans la démonstration de théorème 13 on a: $\mathbb{P}(\mu(Z_i^k)>0)\geqq\frac{1}{k}\mathbb{P}(\pi[\![Z_i^k]\!])$. Il s'en suit qu'après avoir trouvé un nombre au plus dénombrable de Z_i^k on obtient: $\mathbb{P}[\pi(K_k(V)-(\bigcup_i[\![Z_i^k]\!]))]=0$, puisque dans l'autre cas il devrait y avoir un ensemble non-négligeable, où $\xi(V)=\infty$.

L'ensemble $\Sigma^*(V)=(\bigcup_k\bigcup_i[\![Z_i^k]\!])^c\cap(\Omega\times V)$ satisfait à l'énoncé. □

Corollaire.

Soit $\Sigma^*=\bigcap_{V\in\mathscr{U}}[\Sigma^*(V)\cup(\Omega\times V^c)]$; alors l'ensemble $\Sigma^{*c}(=\bigcup_{V\in\mathscr{U}}[\Sigma^*(V)^c\cap(\Omega\times V)])$ est la réunion d'un nombre au plus dénombrable de graphes de points visibles qui possèdent la propriété (6), *et $(\omega,u)\in\Sigma^*$ et $u\in V\in\mathscr{U}$ impliquent $(\omega,u)\in\Sigma^*(V)$.*

Lemme 16. *Soient* $\Sigma(V)=\{\omega|\mathbb{P}[\mu(V)=0|\mathscr{F}(V)]\neq 0\}$ *et* $\Sigma=\bigcup_i\bigcap_{j\geq i}\bigcup_{V\in\mathscr{U}_j}\Sigma(V)\times V$; *alors* Σ^c *est la réunion d'un nombre au plus dénombrable de graphes de points visibles qui possèdent la propriété* (6).

Démonstration. $\Sigma^c=\bigcap_i\bigcup_{j\geq i}\bigcup_{V\in\mathscr{U}_j}\Sigma(V)^c\times V$. Ce n'est pas une restriction de supposer que $\Sigma(V)^c\subset\{\mu(V)\}\neq 0\}$ pour tout $V\in\mathscr{U}$ et que pour tous V, $W\in\mathscr{U}$, $W\subset V$ on a: $\Sigma(V)^c\cap\{\mu(V-W)=0\}=\Sigma(W)^c\cap\{\mu(V-W)=0\}$ (cf. [3]-prop. 1). Maintenant, si $(\omega,u)\in\Sigma^c$, on a: $\mu(\{u\})\neq 0$. Pour tout $V\in\mathscr{U}$, $H(V)\cap\Sigma^c$ est le graphe d'un point visible Z qui possède la propriété (6):

$$Z\colon\ \omega\to\begin{cases}u\in V & \text{si } \mu(V-\{u\})=0,\ (\omega,u)\in\Sigma^c;\\ \Delta & \text{sinon.}\end{cases}$$

En effet:

$$[\![Z]\!]=\lim_i\bigcup_{W\in\mathscr{U}_{i,V}}(\Sigma(V)^c\cap\{\mu(V-W)=0\})\times W$$

et

$$\omega\in\lim_i\bigcup_{W\in\mathscr{U}_{i,V}}\Sigma(V)^c\cap\{\mu(V-W)=0\}$$

implique qu'il existe une suite décroissante W_i ($W_i\in\mathscr{U}_i$), telle que $\mu(W_i)>0$ pour tout i, donc $\mu(\bigcap_i W_i)\neq 0$, ce qui entraine que $\bigcap_i W_i=\{u\}$ et $u=Z(\omega)$, donc $\omega\in\pi[\![Z]\!]$. □

Lemme 17. *A l'exception d'un ensemble évanescent* $(\omega,u)\in\Sigma\cap\Sigma^*$ *implique* $\lim_i\mathbb{E}[\mu(W_i)|\mathscr{F}(W_i)]=0$ *où* $W_i\downarrow\{u\}$, $W_i\in\mathscr{U}_i$.

Démonstration. Si l'on exclut un ensemble évanescent, $(\omega,u)\in\Sigma$ implique qu'il existe un ensemble V_1, $u\in V_1\in\mathscr{U}$ tel que $\omega\in\Sigma(W)$ pour tout $W\in\mathscr{U}$, $W\subset V_1$, $W\ni u$; d'autre part il existe un $V_2\in\mathscr{U}$ tel que $(\omega,u)\in H(V_2)$; donc $(\omega,u)\in H(V)\cap(\Sigma(V)\times V)$ où $V=V_1\cap V_2$.

En excluant de nouveau un ensemble évanescent on a grace à [3]-cor. 2:

$$\mathbb{E}[\mu(W_i)|\mathscr{F}(W_i)]=\frac{\mathbb{E}[\mu(W_i)1_{\{\xi(V-W_i)=0\}}|\mathscr{F}(V)]}{\mathbb{P}[\xi(V-W_i)=0|\mathscr{F}(V)]}\leq\frac{\mathbb{E}[\mu(W_i)|\mathscr{F}(V)]}{\mathbb{P}[\xi(V)=0|\mathscr{F}(V)]}.$$

$\mathbb{P}[\mu(\{u\})\neq 0|\mathscr{F}(V)](\omega)=0$ puisque $(\omega,u)\in\Sigma^*(V)$, donc $\mu(W_i)\to 0$ $(i\to\infty)$ $\mathbb{P}[\cdot|\mathscr{F}(V)](\omega)$-p.p. et convergence dominée nous donne $\mathbb{E}[\mu(W_i)|\mathscr{F}(V)](\omega)\to 0$. □

Lemme 18. *Pour tout* $V\in\mathscr{U}$ *on a p.s. sur* $\{\mu(V)=0\}$:

$$\sum_{W\in\mathscr{U}_{i,E}}\mathbb{E}[\mu(W)1_{\{\xi(W)\leq 1\}}|\mathscr{F}(W)]\uparrow\zeta(E)\qquad(i\to\infty),$$

où $\zeta(E)$ *est une mesure aléatoire sur la semi-algèbre* $\{E\in\mathscr{U}|E\subset V\}$ (cf. [3]-lemme 3).

Démonstration. Tout se passe sur $\{\mu(V)=0\}$, dont nous excluons un seul ensemble négligeable. Si $E\in\mathscr{U}$, $E\subset V$ et

$$A_i = \sum_{W \in \mathscr{U}_{i,E}} \mathbb{E}[\mu(W) 1_{\{\xi(W) \leq 1\}} | \mathscr{F}(W)]$$

on montre analoguement à [3]-lemme 3 que $A_i \leqq A_{i+1}$, donc $A_i \uparrow \zeta(E)$. On vérifie aisément que ζ est une mesure. □

Lemme 19. *Soit $V \in \mathscr{U}$; alors*

$$\sum_{W \in \mathscr{U}_{i,V}} \mathbb{E}[\mu(W) 1_{\{\xi(W) > 1\}} | \mathscr{F}(W)] \, 1_{\{\xi(W) = 0\}} \to 0 \quad p.s.$$

si i tend vers l'infini (cf. [3]-lemme 4 et [2]-formule (4.4)).

Démonstration. Le raisonnement suivant est emprunté à la démonstration de formule (4.4) dans [2]: On remarque d'abord qu'il suffit de considérer le cas où $U = \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$; pour presque tout ω on peut numéroter les atomes de μ par $\tau_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{Z}$, tels que: $\tau_0^{(n)} \leqq n < \tau_1^{(n)}$ (On simplifie la notation en supposant que $+\infty$ et $-\infty$ soient points de condensation d'atomes de presque toute μ).

Choisissons $W \subset (a,b) \subset [n,m]$ où $W \in \mathscr{U}$; a, $b \in \mathbb{R}$ et n, $m \in \mathbb{Z}$, et écrivons pour un instant:

$$A = \{\xi((a,b) - W) = 0, \xi(n,a] = l, \xi[b,m] = r\}$$

et

$$T = (\ldots, (\tau_0^{(n)}, \mu(\tau_0^{(n)})), \ldots, (\tau_l^{(n)}, \mu(\tau_l^{(n)})), (\tau_{1-r}^{(m)}, \mu(\tau_{1-r}^{(m)})), \ldots, (\tau_1^{(m)}, \mu(\tau_1^{(m)})), \ldots).$$

alors on montre que sur A on a:

$$\mathbb{E}[X | \mathscr{F}(W)] = \frac{\mathbb{E}[X 1_A | T]}{\mathbb{P}[A | T]},$$

analoguement à [3]-cor. 2.

Puisque V ne contient qu'un nombre fini d'atomes de μ le lemme est ensuite démontré en raisonnant pour un ω fixe non exceptionnel entre deux atomes de μ placés à a et b comme on le fait dans la démonstration de [3]-lemme 4. □

Maintenant nous sommes prêts à prouver le résultat principal de ce paragraphe. (cf. [3]-Th. 1 et Cor. 20, et [2]-Th. 4.1 et 4.2).

Théorème 20. *Soit $E \in \mathscr{U}$; alors:*

$$\mu^z(E) = \lim_i \sum_{W \in \mathscr{U}_{i,E}} \mathbb{E}[\mu(W) | \mathscr{F}(W)] \quad p.s.$$

Démonstration. Choisissons un système $\{Z_\alpha\}$ de p.v. qui possèdent la propriété (6) tel que $\bigcup_\alpha [\![Z_\alpha]\!] = \Sigma^c \cup \Sigma^{*c}$ (cf. lemme 15 et 16). A un ensemble négligeable près les $\zeta(Z_\alpha)$ existent.

Pour presque tout ω_0 on peut raisonner comme il suit: $\mu(\{u\}) > 0$ pour un nombre fini de $u \in E$. Il existe un nombre plus petit fini de α_k tel que

$$\{u \in E \,|\, (\omega_0, u) \in \Sigma^c \cup \Sigma^{*c}, \mu(\{u\}) > 0\} = \bigcup_k \{Z_{\alpha_k}(\omega_0)\}.$$

Maintenant il est clair, que

$$\begin{aligned}
&\lim_i \sum_{W\in\mathscr{U}_{i,E}} \mathbb{E}[\mu(W)|\mathscr{F}(W)](\omega_0)= \\
&\quad \lim_i \sum_{W\in\mathscr{U}_i} \sum_k \mathbb{E}[\mu(W)|\mathscr{F}(W)](\omega_0)\, 1_{\{Z_{\alpha_k}\in W\}}(\omega_0)+ \\
&\quad \lim_i \sum_{W\in\mathscr{U}_{i,E}} \mathbb{E}[\mu(W)|\mathscr{F}(W)](\omega_0)\, 1_{\bigcap_k\{Z_{\alpha_k}\notin W\}\cap\{\xi(W)\neq 0\}}(\omega_0)+ \\
&\quad \lim_i \sum_{W\in\mathscr{U}_{i,E}} \mathbb{E}[\mu(W)\,1_{\{\xi(W)\leqq 1\}}|\mathscr{F}(W)](\omega_0)\, 1_{\{\xi(W)=0\}}(\omega_0)+ \\
&\quad \lim_i \sum_{W\in\mathscr{U}_{i,E}} \mathbb{E}[\mu(W)\,1_{\{\xi(W)>1\}}|\mathscr{F}(W)](\omega_0)\, 1_{\{\xi(W)=0\}}(\omega_0) \\
&= \lim A_i(\omega_0)+\lim B_i(\omega_0)+\lim C_i(\omega_0)+\lim D_i(\omega_0)=\zeta_{\omega_0}(E)
\end{aligned}$$

(disons), puisque les limites existent grace à respectivement lemme 14, lemme 17, lemme 18 et lemme 19.

Il résulte de lemme 18 et 19 que ζ_{ω_0} est une mesure, puisque si $E_i\downarrow\emptyset$, il existe un nombre $i_0(\omega_0)$ tel que $\mu(E_{i_0(\omega_0)})=0$. Par conséquent ζ est une mesure aléatoire. Ni l'expression $\zeta(Z)$ pour points visibles avec propriété (6) (cf. lemme 14) ni $\zeta(E)$ sur $\{\mu(E)=0\}$, $E\in\mathscr{U}$ (cf. lemme 18) est ambiguë.

Soit Z un point visible quelconque; alors on déduit de lemme 5, lemme 14 et lemme 17 que $\zeta(Z)$ est $\mathscr{F}(Z)$-mesurable. Donc ζ satisfait à (2). L'ensemble $(\Sigma^c\cup\Sigma^{*c})\cap\{(\omega,u)|\zeta(\{u\})=0\}$ est visible. Ce fait combiné avec lemme 17 nous le rend possible de construire $\sigma(\zeta)$ et de constater que ζ satisfait à (3) aussi. Donc ζ est une mesure aléatoire visible.

Le théorème est démontré dès qu'on a:

$$\mathbb{E}\int X\,d\mu=\mathbb{E}\int X\,d\zeta$$

pour tout processus visible X; pour cela il suffit de vérifier que

$$\mathbb{E}\mu(V)\,1_F=\mathbb{E}\zeta(V)\,1_F$$

pour tous $V\in\mathscr{U}$, $F\in\mathscr{F}(V)$ (cf. lemme 1), ce qui est fait de la même façon que [3]-cor. 20. Un seul point mérite notre attention spéciale. Ecrivons:

$$G_i=\sum_{W\in\mathscr{U}_{i,V}} \mathbb{E}[\mu(W)\,1_{\{\xi(W)=1\}}|\mathscr{F}(W)]\,1_{\{\xi(W)\neq 0\}}.$$

Il faut prouver que $\mathbb{E}\lim G_i=\lim\mathbb{E}G_i$. Pour démontrer cette égalité nous utiliserons une idée suggérée par M. Wakker dans une discussion: Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon>0$ il existe un $\delta>0$ tel que $F\in\mathscr{F}$, $\mathbb{P}(F)\leqq\delta$ implique: $\mathbb{E}G_i 1_F<\varepsilon$ pour tout i. Soit $\varepsilon>0$; choisissons $a>0$ tel que $\mathbb{E}\mu(V)\,1_{\{\mu(V)>a\}}<\varepsilon/2$ et δ tel que $\mathbb{P}(F)<\delta$ implique: $\mathbb{E}\xi(V)\,1_F<\varepsilon/2a$. Soit $\mathbb{P}(F)<\delta$; alors:

$$\mathbb{E}\,1_F G_i = \mathbb{E}\,1_F \sum_{W\in\mathcal{U}_{i,V}} \mathbb{E}[\mu(W)\,1_{\{\xi(W)=1\}}\,1_{\{\mu(V)\leqq a\}}|\mathscr{F}(W)]\,1_{\{\xi(W)\neq 0\}} +$$

$$\mathbb{E}\,1_F \sum_{W\in\mathcal{U}_{i,V}} \mathbb{E}[\mu(W)\,1_{\{\xi(W)=1\}}\,1_{\{\mu(V)>a\}}|\mathscr{F}(W)]\,1_{\{\xi(W)\neq 0\}} \leqq$$

$$\mathbb{E}\,1_F\, a\,\xi(V) + \mathbb{E} \sum_{W\in\mathcal{U}_{i,V}} \mathbb{E}[\mu(W)\,1_{\{\mu(V)>a\}}|\mathscr{F}(W)] <$$

$$\varepsilon/2 + \mathbb{E}\,\mu(V)\,1_{\{\mu(V)>a\}} < \varepsilon. \quad \square$$

Grace à ce théorème on peut identifier l'intensité conditionnelle et la projection visible d'un processus ponctuel. M. Kallenberg a été si aimable de me faire remarquer, que l'existence de l'intensité conditionnelle étant montrée dans le cas de processus ponctuels simples, cette identification est une consequence assez simple de §4 remarque 1.

Remerciements. Je tiens à remercier M. Krickeberg, qui m'a suggéré le problème traité ici et M. Fabius, qui a contribué beaucoup à cet article en faisant maintes remarques.

Bibliographie

1. Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilités et potentiel. Chapitres I à IV (1975) et Chapitres V à VIII. (1980). Paris: Hermann
2. Kallenberg, O.: On conditional intensities of point processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete **41**, 205–220 (1978)
3. Papangelou, F.: The conditional intensity of general point processes and an application to line processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete **28**, 207–226 (1974)

Received January 4, 1982; in revised form July 16, 1982