

## Loi de l'indice du lacet Brownien, et distribution de Hartman-Watson

Marc Yor

Laboratoire de Calcul des Probabilités, Université Pierre et Marie Curie, 4, Place Jussieu,  
F-75230 Paris Cedex 05

### 1. Introduction

Dans tout cet article,  $\tau$  désigne un nombre positif fixé,  $z_0$  est un nombre complexe, non nul, et  $a := |z_0|$ .

Soit  $\mathbb{P}_{z_0}$  la loi du mouvement brownien complexe  $(Z_t = X_t + iY_t)_{t \geq 0}$  issu de  $z_0$ , définie sur l'espace  $\Omega_{\mathbb{C}} = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ , muni de sa tribu borélienne  $\mathfrak{Z}$  (pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}_+$ ). On note encore, pour tout  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{P}_{z_0}^z$  la loi du «pont brownien complexe», entre 0 et  $\tau$ , issu de  $z_0$  en  $t=0$ , et aboutissant en  $z$ , au temps  $t=\tau$ . Rappelons que:

$$(1.1) \quad \mathbb{P}_{z_0} | \mathfrak{Z}_\tau = \iint \frac{dx dy}{(2\pi\tau)} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\tau}} \mathbb{P}_{z_0}^z,$$

où  $\mathfrak{Z}_\tau = \sigma\{Z_s, 0 \leq s \leq \tau\}$ , égalité que l'on peut réécrire en:

$$(1.1') \quad \text{pour tout } A \in \mathfrak{Z}_\tau, \quad \mathbb{P}_{z_0}(A | Z_\tau = z) = \mathbb{P}_{z_0}^z(A)$$

(tous les rappels nécessaires, concernant le pont brownien- réel ou complexe- sont faits au paragraphe 2).

Paul Lévy a montré que le point 0 n'est pas visité par le processus  $(Z_t)_{t \geq 0}$ ,  $\mathbb{P}_{z_0}$  p.s. On déduit donc de (1.1), ou (1.1'), que:

$$(1.2) \quad dx dy \text{ p.s.,} \quad \mathbb{P}_{z_0}^z(\exists t \in [0, \tau], Z_t = 0) = 0,$$

et, en fait, on montre au paragraphe 2, plus précisément, que:

$$(1.2') \quad \text{pour tout } z \neq 0, \quad \mathbb{P}_{z_0}^z(\exists t \in [0, \tau], Z_t = 0) = 0.$$

On peut donc définir, par continuité, pour tout  $t \in [0, \tau]$ , l'accroissement de l'argument entre 0 et  $t$ , soit:  $\theta_t(\omega) - \theta_0(\omega)$ , de la courbe  $(Z_u(\omega), u \in [0, t])$ , et ceci peut être fait, d'après ce qui précède  $\mathbb{P}_{z_0}^z$  p.s., pour tout  $z \neq 0$  (et donc  $\mathbb{P}_{z_0}$  p.s.!).

L'un des buts de cet article est de calculer la loi de  $(\theta_\tau - \theta_0)$ , pour  $\mathbb{P}_{z_0}^z$ , pour tout  $z \neq 0$ , et en particulier pour  $z = z_0$ , auquel cas, sous  $\mathbb{P}_{z_0}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_{z_0}^{z_0}$ , le processus

$(Z_t)_{0 \leq t \leq \tau}$  décrit une boucle, que l'on appelle lacet brownien, et l'on a:  $(\theta_\tau - \theta_0) \in 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{P}_{z_0}^*$  p.s.

Par ailleurs, on rappelle, au paragraphe 3, que  $(\theta_t - \theta_0)$  est une  $\mathbb{P}_{z_0}$  martingale locale continue, dont le processus croissant est égal à  $\int_0^t \frac{ds}{|Z_s|^2}$ , et les calculs menés ci-dessous permettent en fait d'obtenir, de façon explicite, la loi conjointe de  $(\theta_\tau - \theta_0; \int_0^\tau \frac{ds}{|Z_s|^2})$  sous  $\mathbb{P}_{z_0}^x (z \neq 0)$  (voir le paragraphe 6).

Une étape importante du travail est constituée par l'obtention de la loi, sous  $\mathbb{P}_{z_0}$ , de  $(\theta_\tau - \theta_0)$ , conditionnellement à  $|Z_\tau|$ , loi qui est, précisément, donnée par la formule suivante, valable pour tout  $v \in \mathbb{R}$ :

$$(1.3) \quad \mathbb{E}_{z_0}(e^{iv(\theta_\tau - \theta_0)} \mid |Z_\tau| = \rho) = \frac{I_{|v|}\left(\frac{\rho a}{\tau}\right)}{I_0\left(\frac{\rho a}{\tau}\right)},$$

où  $I_\nu$  désigne la fonction de Bessel modifiée, du premier ordre, et d'indice  $\nu$ .

Ce résultat donne une interprétation probabiliste des distributions  $\mu_r$  et  $\eta_r$ , définies pour tout  $r > 0$ , respectivement par leur transformée de Fourier (resp. Laplace):

$$v \rightarrow \frac{I_{|v|}(r)}{I_0(r)} \quad \text{et} \quad \lambda \rightarrow \frac{I_{\sqrt{2\lambda}}(r)}{I_0(r)}.$$

$\mu_r$  (resp:  $\eta_r$ ) est désignée, dans la littérature, comme la distribution développée de von Mises - en anglais: «unwrapped von Mises distribution» -, resp.: distribution de Hartman-Watson (cf. [4]; 1974).

Les mesures  $\mu_r$  et  $\eta_r$  sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue (respectivement sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}_+$ ); leurs densités sont étudiées au paragraphe 5.

La méthode qui nous a conduit à la formule (1.3) permet également - c'est là le second aspect de ce travail - de redémontrer (cf., paragraphe 4) des résultats plus récents de Hartman ([3]; 1976), à savoir:

(1.4) pour tout couple  $(r, R)$  vérifiant:  $0 < r < R < \infty$ , les fonctions suivantes, en  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ :

$$\frac{I_{\sqrt{2\lambda}}(r)}{I_0(r)} \times \frac{I_0(R)}{I_{\sqrt{2\lambda}}(R)} \quad \text{et} \quad \frac{K_{\sqrt{2\lambda}}(R)}{K_0(R)} \times \frac{K_0(r)}{K_{\sqrt{2\lambda}}(r)}$$

sont les transformées de Laplace de probabilités sur  $\mathbb{R}_+$ .

Le paragraphe 6 est consacré à expliciter la loi de l'indice du lacet brownien défini plus haut, tandis qu'au paragraphe 7, on développe, en dimension supérieure à 2, certains des résultats obtenus précédemment en dimension 2.

## 2. Quelques précisions sur les ponts browniens réel et complexe

Dans le seul but de simplifier les expressions qui interviennent dans ce paragraphe, on suppose le temps  $\tau$  égal à 1; les arguments utilisés sont également valables lorsque  $\tau$  est un réel strictement positif.

Soit, sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ , un mouvement brownien réel  $(B_t)_{t \geq 0}$ , issu de  $x_0$ . On note  $(\mathfrak{B}_t)_{t \geq 0}$  sa filtration naturelle, et

$$\tilde{\mathfrak{B}}_t = \bigcap_{(\varepsilon > 0)} (\mathfrak{B}_{(t+\varepsilon)} \vee \sigma\{B_1\})$$

K. Ito ([5]; voir aussi [7]) a remarqué que le processus  $(B_t)_{t \leq 1}$  est une  $(\tilde{\mathfrak{B}}_t)$  quasi-martingale, dont la décomposition canonique s'écrit:

$$(2.1) \quad B_t = \tilde{B}_t + \int_0^t \frac{(B_1 - B_s)}{1-s} ds \quad (t \leq 1).$$

Soulignons que, d'une part:

(2.2)  $(\tilde{B}_t)_{t \leq 1}$  est un  $(\tilde{\mathfrak{B}}_t)$  mouvement brownien, issu de  $x_0$ , et, en conséquence:

(2.3)  $(\tilde{B}_t)_{t \leq 1}$  est indépendant de  $(B_1)$ ;

d'autre part:

$$(2.4) \quad E \int_0^1 \frac{|B_1 - B_s|}{(1-s)} ds < \infty.$$

Par ailleurs, si  $x \in \mathbb{R}$ , on considère l'équation en  $U$ :

$$e(x_0, x): \quad U_t = \tilde{B}_t + \int_0^t \frac{x - U_s}{(1-s)} ds \quad (t < 1),$$

dont l'unique solution s'explique aisément:

$$(2.5) \quad U_t = xt + \tilde{B}_t - (1-t) \int_0^t \frac{\tilde{B}_u du}{(1-u)^2} \quad (t < 1).$$

De plus, on a le:

(2.6) **Lemme.** La solution  $(U_t)$  de  $e(x_0, x)$  vérifie:  $\lim_{t \uparrow 1} U_t = x$ , P p.s.

*Démonstration.* D'après (2.5), il s'agit de montrer que:

$$\tilde{B}_t - (1-t) \int_0^t \frac{\tilde{B}_u du}{(1-u)^2} \xrightarrow{t \uparrow 1} 0,$$

ou encore que:

$$H_t \equiv \tilde{B}_1 t - (1-t) \int_0^t \frac{\tilde{B}_u du}{(1-u)^2} \xrightarrow{t \uparrow 1} 0.$$

Or,

$$H_t = (1-t) \int_0^t \frac{(\tilde{B}_1 - \tilde{B}_u) du}{(1-u)^2}.$$

Rappelons le résultat élémentaire suivant ([7], Lemme 9): si  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction continue décroissante, telle que  $g(1) = 0$ , alors, pour toute fonction

$f \geq 0$  vérifiant  $\int_0^1 f(u)g(u) du < \infty$ , on a

$$\lim_{t \uparrow 1} g(t) \int_0^t f(u) du = 0.$$

D'après (2.4), ceci s'applique,  $P(d\omega)$  p.s., à  $g(t)=(1-t)$ , et

$$f(t) = \frac{|\tilde{B}_1 - \tilde{B}_t|(\omega)}{(1-t)^2}. \quad \square$$

Sur l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}} = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , on considère le processus des projections  $X_t(\omega) = \omega(t)$  ( $t \geq 0$ ), la famille de tribus  $\mathfrak{G}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$  ( $t \geq 0$ ), et  $\mathfrak{G} = \bigvee_t \mathfrak{G}_t$ .

$P_{x_0}$  désigne la loi, sur  $(\Omega_{\mathbb{R}}, \mathfrak{G})$ , du mouvement brownien réel, issu de  $x_0$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , notons  $P_x^x$  la distribution, sur  $(\Omega_{\mathbb{R}}, \mathfrak{G}_1)$ , de la solution  $(U_t)_{t < 1}$  de  $e(x_0, x)$ , prolongée par continuité en  $t=1$  (donc  $U_1 = x$ , d'après le lemme (2.6)).

D'après (2.1) et (2.3), on a :

(2.7) *l'application:  $x \rightarrow P_x^x$  est une désintégration régulière de  $P_{x_0}$ , par rapport à la tribu engendrée par  $X_1$ .*

Pour tout couple  $(x_0, x)$ , on note  $PB(x_0, x)$  le triplet  $(\Omega_{\mathbb{R}}, (X_t)_{t \leq 1}, P_{x_0}^x)$ : on a ainsi défini, d'après (2.6) et (2.7), le pont brownien issu de  $x_0$ , et aboutissant en  $x$  au temps  $t=1$ .

*Remarque.* La présentation de  $PB(x_0, x)$  adoptée ici est semblable à celle de Mackevicius ([12]), mais les démonstrations sont différentes.  $\square$

Pour tout couple  $((x_0, x); (y_0, y))$  de points de  $\mathbb{R}^2$ , on note  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $z = x + iy$ , et on définit, sur  $(\Omega_{\mathbb{C}}, \mathfrak{Z}_1)$ ,  $\mathbb{I}_{z_0}^z = P_{x_0}^x \otimes P_{y_0}^y$  (modulo les identifications canoniques!): c'est, par définition, la distribution du pont brownien complexe  $PB(z_0, z)$  issu de  $z_0$ , et aboutissant en  $z$ , au temps  $t=1$ ; d'après (2.6) et (2.7), l'égalité (1.1) est réalisée, ainsi que:  $\mathbb{I}_{z_0}^z(Z_1 = z) = 1$ , pour tout  $z$ .

De plus, on a le:

(2.8) **Lemme.** *Pour tout couple  $(z_0, z) \in \mathbb{C}^2$ ,  $\mathbb{I}_{z_0}^z(\exists t \in ]0, 1[ , Z_t = 0) = 0$ .*

**Démonstration.** 1)  $(X_t)$  et  $(Y_t)$  désignent respectivement les parties réelle et imaginaire de  $(Z_t)$ .

Définissons les  $(\mathfrak{Z}_t)$  temps d'arrêt:

$$T_n(\omega) \equiv \inf \left\{ t / A_t^z \equiv \int_0^t \frac{(x - X_s)^2 + (y - Y_s)^2}{(1-s)^2} ds \geq n \right\}.$$

Admettons provisoirement que:

(2.9)  $\mathbb{I}_{z_0}^z$  p.s,  $T_n \uparrow \uparrow 1$ .

Définissons, en calquant les notations sur celles du début de ce paragraphe, les processus:

$$\tilde{X}_t \equiv X_t - \int_0^t \frac{(x - X_s)}{(1-s)} ds \quad (t < 1),$$

$$\tilde{X}_1 \equiv \lim_{t \uparrow 1} \tilde{X}_t \text{ (qui existe } \mathbb{I}_{z_0}^z \text{ p.s., par définition de } PB(x_0, x)),$$

et  $(\tilde{Y}_t)_{t \leq 1}$  de façon analogue.

Par définition de  $\mathbb{I}_{z_0}^z$ ,  $\tilde{Z} \equiv ((\tilde{X}_t + i\tilde{Y}_t)_{t \leq 1})$  est un  $(\mathbb{I}_{z_0}^z, (\mathfrak{Z}_t)_{t \leq 1})$  mouvement brownien complexe issu de  $z_0$ .

D'après le théorème de Girsanov, pour tout  $n \geq 1$ , le processus  $(Z_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$  est, sous la probabilité:

$$Q^{(n)} \equiv \exp \left\{ - \int_0^{T_n} \frac{[(x - X_s) d\tilde{X}_s + (y - Y_s) d\tilde{Y}_s]}{(1-s)} - \frac{1}{2} A_{T_n}^z \right\} \cdot \mathbb{P}_{z_0}^z$$

un mouvement brownien complexe, issu de  $z_0$  en  $t=0$ , et arrêté en  $T_n$ .

Les probabilités  $Q^{(n)}$  et  $\mathbb{P}_{z_0}^z$  étant équivalentes, on a, d'après le théorème de P. Lévy déjà mentionné: pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{P}_{z_0}^z(\exists t \in ]0, T_n], Z_t = 0) = 0$ , d'où le résultat cherché, d'après (2.9).

2) Il reste à montrer (2.9), qui sera une conséquence immédiate de l'assertion:

$$(2.10) \quad \text{pour tout } (x_0, x) \in \mathbb{R}^2, \int_0^1 \frac{(x - X_s)^2}{(1-s)^2} ds = \infty, \quad P_{x_0}^x \text{ p.s.}$$

Or, d'après (2.5), on a, pour tout  $s < 1$ :

$$\frac{x - X_s}{(1-s)} = (x - \tilde{X}_s) + \int_0^s \frac{(\tilde{X}_u - \tilde{X}_s)}{(1-u)^2} du.$$

Ainsi, puisque  $(\tilde{X}_u)_{u \leq 1}$  est, sous  $P_{x_0}^x$ , un mouvement brownien réel issu de  $x_0$ , (2.10) équivaut à:

$$(2.11) \quad \int_0^1 \left\{ \int_0^s \frac{(X_u - X_s) du}{(1-u)^2} \right\}^2 ds = \infty \quad P_{x_0}^x \text{ p.s.}$$

Montrons maintenant (2.10). D'après [7] (corollaire 3.2), on a:

$$\int_0^1 \frac{(X_1 - X_s)^2}{(1-s)^2} ds = \infty, \quad P_{x_0}^x \text{ p.s., et donc:}$$

$$dx \text{ p.s., } \int_0^1 \frac{(x - X_s)^2 ds}{(1-s)^2} = \infty, \quad P_{x_0}^x \text{ p.s.}$$

(2.10) est donc réalisée au moins pour un  $x \in \mathbb{R}$ , et donc, d'après l'équivalence de (2.10) et (2.11) (qui ne dépend pas de  $x$ !), pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Ainsi, si  $z_0 z \neq 0$ , on peut donc définir, comme il a été dit dans l'introduction, par continuité, pour  $t \in ]0, 1]$ , l'accroissement de l'argument entre 0 et  $t$ , soit:  $\theta_t(\omega) - \theta_0(\omega)$ , de la courbe  $(Z_u(\omega), u \in [0, t])$ ,  $\mathbb{P}_{z_0}^z$  p.s.

Le lemme suivant nous sera utile au paragraphe 6.

(2.12) **Lemme. 1)** Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ , et  $F: \Omega_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée, continue pour la topologie de la convergence compacte, et  $\mathfrak{Z}_1$ -mesurable. Alors, l'application:  $z \rightarrow \mathbb{E}_{z_0}^z(F)$  est continue.

2) Soit  $z_0 \neq 0$ , et  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, bornée. Alors, l'application:  $z \rightarrow \mathbb{E}_{z_0}^z[f(\theta_1 - \theta_0)]$  est définie, et continue, sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

*Démonstration.* 1) Rappelons, avec les notations du lemme (2.8), que:

$$Z_t = zt + \tilde{Z}_t - (1-t) \int_0^t \frac{\tilde{Z}_u du}{(1-u)^2}, \quad (t < 1)$$

et que  $(\tilde{Z}_t)_{t \leq 1}$  est, sous  $\mathbb{IP}_{z_0}^z$ , un mouvement brownien complexe issu de  $z_0$ . Ainsi, si l'on définit la famille d'applications  $(\gamma_z(\omega))$ , de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{C}$ , par:

$$[\gamma_z(\omega)](t) = \begin{cases} zt + Z_t(\omega) - (1-t) \int_0^t \frac{Z_u(\omega) du}{(1-u)^2} & (t < 1) \\ z & (t \geq 1), \end{cases}$$

alors, on a:  $\mathbb{IE}_{z_0}^z[F(\omega)] = \mathbb{IE}_{z_0}[F(\gamma_z(\omega))]$ , et la première partie du lemme découle de ce que, pour tout  $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}$ , l'application:  $\mathbb{C} \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}}$  est continue,  $\Omega_{\mathbb{C}}$  étant

$$z \rightarrow \gamma_z(\omega)$$

muni de la topologie de la convergence compacte.

2) Supposons  $z_0 \neq 0$ . Alors, pour tout  $z \neq 0$ , l'application

$$\text{Arg: } \omega \rightarrow \theta_1(\omega) - \theta_0(\omega) \equiv \text{Im} \left\{ \int_{\omega(0,1)} \frac{du}{u} \right\}$$

est définie sur l'ouvert  $\mathbf{0} = \{\omega / \forall t \in [0, 1], \omega(t) \neq 0\}$  de  $\Omega_{\mathbb{C}}$ , qui est, d'après le lemme (2.8), de mesure pleine pour  $\mathbb{IP}_{z_0}^z$ ; de plus, Arg est continue sur  $\mathbf{0}$ . La seconde partie du lemme découle donc de la première.

### 3. Parties radiale et angulaire du mouvement brownien complexe, sous $\mathbb{IP}_{z_0}$

Dorénavant,  $z_0$  est un nombre complexe non nul. Ce paragraphe est une suite de rappels succincts, extraits de [16] (voir aussi Gettoor-Sharpe [1]). Une application simple de la formule d'Ito montre que, sous  $\mathbb{IP}_{z_0}$ :

$$(3.1) \quad Z_t = Z_0 \exp \left( \int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s} \right)^1,$$

ce qui équivaut à:

$$(3.2) \quad \log_{\omega}(Z_t(\omega)) - \log_{\omega}(Z_0(\omega)) = \int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s},$$

où  $\log_{\omega}$  désigne une détermination continue du logarithme le long de la trajectoire  $Z_{\cdot}(\omega)$ .

Identifions respectivement les parties réelle et imaginaire des deux membres de (3.2). Il vient, en notant  $\rho_t = |Z_t|$ :

$$(3.3) \quad \log \rho_t - \log \rho_0 = \int_0^t \frac{d\beta_s}{\rho_s};$$

$$(3.4) \quad \theta_t - \theta_0 = \int_0^t \frac{d\gamma_s}{\rho_s},$$

<sup>1</sup> Contrairement à ce qui peut sembler au premier abord, cette formule n'est pas vraie pour toute martingale complexe, continue  $(Z_t)$ , qui ne visite pas  $\{0\}$ ; en fait, une telle martingale complexe  $(Z_t)$  vérifie (3.1) si, et seulement si, elle est conforme (c'est à dire:  $Z^2$  est également une martingale locale)

où

$$\beta_t = \int_0^t \frac{(X_s dX_s + Y_s dY_s)}{\rho_s}, \quad \text{et} \quad \gamma_t = \int_0^t \frac{(X_s dY_s - Y_s dX_s)}{\rho_s}$$

sont, d'après la caractérisation de Paul Lévy, deux mouvements browniens réels indépendants, puisque:  $\langle \beta, \beta \rangle_t = \langle \gamma, \gamma \rangle_t = t$ , et  $\langle \beta, \gamma \rangle_t = 0$ .

D'autre part, une nouvelle application de la formule d'Ito à  $\rho_t \equiv (X_t^2 + Y_t^2)^{1/2}$  montre que:

$$(3.5) \quad \rho_t = \rho_0 + \beta_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{ds}{\rho_s}.$$

La fonction:  $x \rightarrow 1/x$  étant différentiable sur  $]0, \infty[$ , et  $(\rho_t)$  ne s'annulant pas, on déduit aisément de (3.5) que:

(3.6) *les processus  $(\rho_t)$  et  $(\beta_t)$  ont même filtration.*

Ainsi, d'après (3.4), et l'indépendance de  $(\beta_t)$  et  $(\gamma_t)$ , on a:

(3.7) *sous  $\mathbb{P}_{z_0}$ , conditionnellement à  $\rho = (\rho_t, t \geq 0)$ , le processus  $(\theta_t - \theta_0)$  est une martingale gaussienne, centrée, de processus croissant  $\int_0^t \frac{ds}{\rho_s^2}$ .*

*Nota bene:* Le résultat précédent peut aussi être obtenu en exprimant  $\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$  en coordonnées polaires (cf., Ito-McKean [6], p. 270), mais la présentation ci-dessus est cohérente avec l'esprit de l'article, et sera encore utile par la suite.

#### 4. Fonctions, et processus, de Bessel

Ce paragraphe est consacré à la démonstration des résultats (1.4) de Hartman, ainsi qu'à l'obtention de la formule (1.3).

Introduisons tout d'abord quelques notations relatives aux processus de Bessel: on appelle processus de Bessel d'indice  $\nu (\in \mathbb{R})$ , et on note  $\text{BES}(\nu)$ , la diffusion à valeurs dans  $[0, \infty)$ , de générateur infinitésimal:

$$(4.1) \quad A_\nu = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu + 1}{2x} \frac{d}{dx}$$

(pour une définition plus complète, voir J. Kent [10]).

On désigne quelquefois  $d_\nu \equiv 2(\nu + 1)$  comme la «dimension» de  $\text{BES}(\nu)$ : en effet, la partie radiale du mouvement brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  est le processus  $\text{BES} \left( \frac{d}{2} - 1 \right)$ . Dans la suite, l'indice  $\nu = 0$ , c'est à dire  $d_\nu = 2$ , joue un rôle fondamental.

Sur l'espace  $\Omega_{\mathbb{R}_+} = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ , on note  $\rho_t(\omega) = \omega(t)$ ,  $\mathfrak{F}_t = \sigma\{\rho_s, s \leq t\}$  ( $t \geq 0$ ), et  $\mathfrak{F} = \sigma\{\rho_s, s \geq 0\}$ . Pour tout  $a \in [0, \infty)$ ,  $P_a^v$  désigne la distribution, sur  $(\Omega_{\mathbb{R}_+}, \mathfrak{F})$ , de BES( $v$ ), qui vérifie  $P_a^v[\rho_0 = a] = 1$ .

Remarquons que, d'après (4.1), pour tout  $a > 0$ , et tout  $v \geq 0$ :

$$(4.2) \quad \beta_t \equiv \rho_t - \rho_0 - \frac{2v+1}{2} \int_0^t \frac{ds}{\rho_s}$$

est un  $(P_a^v, \mathfrak{F}_t)$  mouvement brownien réel; ce résultat généralise la formule (3.5), qui correspond au cas  $v=0$ .

Les résultats suivants, dûs à J. Kent [10], jouent un rôle important dans le reste du paragraphe:

– pour tout  $v > -1$ ,  $x > 0$ ,  $t > 0$ , la fonction de transition  $P_t^v(x, dy)$  de BES( $v$ ) admet une densité  $p_t^v(x, y)$  qui vérifie:

$$(4.3) \quad \left(\frac{y}{x}\right)^{-v} p_t^v(x, y) = \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}} I_v\left(\frac{xy}{t}\right) y \quad (y > 0)$$

(lorsque  $v = \frac{d}{2} - 1$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ , cette égalité figure dans Ito-Mc Kean [6], paragraphe (2.7)).

– pour tout  $b > 0$ , notons  $\tau_b = \inf\{t \geq 0 / \rho_t = b\}$ . Alors, pour tout  $\lambda > 0$ :

$$(4.4) \quad E_a^v[e^{-\lambda \tau_b}] = \left(\frac{b}{a}\right)^v \frac{\mathfrak{Q}_v(a\sqrt{2\lambda})}{\mathfrak{Q}_v(b\sqrt{2\lambda})},$$

où  $\mathfrak{Q} = K$ , si  $v \in \mathbb{R}$ ,  $0 < b < a < \infty$ , et  $\mathfrak{Q} = I$  si  $v > -1$ ,  $0 < a < b < \infty$ . (Voir aussi Gettoor-Sharpe [2], proposition (5.7).)

La clé des théorèmes qui figurent dans ce paragraphe est le

(4.5) **Lemme.** Soient  $a$  un réel strictement positif fixé, et  $T$  un  $(\mathfrak{F}_{s+})$  temps d'arrêt borné. Alors, pour tout couple  $(\mu, v)$  d'indices positifs ou nuls, on a, pour toute variable positive  $Y$ ,  $\mathfrak{F}_{T+}$ -mesurable:

$$(4.6) \quad E_a^\mu \left[ Y \exp \left\{ -\frac{v^2}{2} \int_0^T \frac{ds}{\rho_s^2} \right\} \left( \frac{\rho_T}{a} \right)^{-\mu} \right] = E_a^v \left[ Y \exp \left( -\frac{\mu^2}{2} \int_0^T \frac{ds}{\rho_s^2} \right) \left( \frac{\rho_T}{a} \right)^{-v} \right].$$

*Démonstration.* 1) Démontrons tout d'abord (4.6) pour  $\mu=0$ , et  $v>0$ . (4.6) équivaut alors, à l'évidence, à l'identité:

$$(*) \quad E_a^0 \left[ Y \left( \frac{\rho_T}{a} \right)^v \exp \left( -\frac{v^2}{2} \int_0^T \frac{ds}{\rho_s^2} \right) \right] = E_a^v(Y),$$

pour toute variable positive  $Y$ ,  $(\mathfrak{F}_{T+})$  mesurable.

2) Considérons la  $(P_a^0, \mathfrak{F}_t)$  martingale locale:

$$\begin{aligned} L_t &\equiv \exp \left\{ v \int_0^t \frac{d\beta_s}{\rho_s} - \frac{v^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{\rho_s^2} \right\} \\ &= \left( \frac{\rho_t}{a} \right)^v \exp \left\{ -\frac{v^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{\rho_s^2} \right\}, \end{aligned} \quad \text{d'après (3.3).}$$



L'inégalité évidente:  $L_t^v \leq \left(\frac{\rho_t}{a}\right)^v$ , et l'inégalité de Doob dans  $L^p(1 < p < \infty)$  entraînent que, pour tout  $p \in ]1, \infty[$ , et  $t > 0$ :

$$E \left[ \sup_{s \leq t} (L_s^v)^p \right] < \infty.$$

En particulier, pour tout  $v > 0$ ,  $(L_t^v)_{t \geq 0}$  est une  $(P_a^0, \mathfrak{F}_t)$  martingale.

3) Soit  $\sigma$  une constante positive telle que:  $T \leq \sigma$ . D'après 2),  $Q_\sigma^v \equiv L_\sigma^v \cdot (P_a^0 | \mathfrak{F}_\sigma)$  est une probabilité sur  $(\Omega_{\mathbb{R}^+}, \mathfrak{F}_\sigma)$ . D'après le théorème de Girsanov,  $\tilde{\beta}_t \equiv \beta_t - v \int_0^t \frac{ds}{\rho_s}$  ( $t \leq \sigma$ ) est un  $(Q_\sigma^v, (\mathfrak{F}_t)_{t \leq \sigma})$  mouvement brownien réel.

On réécrit maintenant l'égalité (3.5) en:

$$(3.5) \quad \rho_t = a + \tilde{\beta}_t + \frac{2v+1}{2} \int_0^t \frac{ds}{\rho_s},$$

ce qui, d'après (4.2), montre que, sous  $Q_\sigma^v$ , le processus  $(\rho_t)_{t \leq \sigma}$  est un processus de Bessel d'indice  $v$ .

On a donc, pour toute variable positive  $Y$ ,  $(\mathfrak{F}_{T^+})$  mesurable:

$$\begin{aligned} E_a^0 \left[ Y \left( \frac{\rho_T}{a} \right)^v \exp \left\{ -\frac{v^2}{2} \int_0^T \frac{ds}{\rho_s^2} \right\} \right] &= E_a^0 [Y L_T^v] \\ &\stackrel{(i)}{=} E_a^0 [Y L_\sigma^v] \\ &= E_{Q_\sigma^v}(Y) = E_a^v(Y). \end{aligned}$$

(l'égalité (i) découle de ce que  $(L_t^v)_{t \geq 0}$  est une  $(P_a^0, \mathfrak{F}_t)$  martingale). (\*) est donc démontrée.

4) Enfin, (4.6) est une conséquence de (\*), appliquée d'abord avec l'indice  $\mu \geq 0$ , puis avec l'indice  $v \geq 0$ .  $\square$

*Remarque importante.* Dans son article [8] (voir aussi, Kazamaki et Sekiguchi [9]), Kazamaki donne un exemple montrant que son critère:

$\exp \left\{ \frac{1}{2} M_t \right\}$  sous-martingale pour que  $\exp \left\{ M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t \right\}$  soit une martingale est meilleur que le critère, antérieur, de Novikov [13], à savoir:

$$\text{pour tout } t, E(\exp \frac{1}{2} \langle M \rangle_t) < \infty.$$

Remarquons que le critère de Novikov ne s'applique pas non plus à la martingale (locale)  $L_t = \exp \left\{ M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t \right\}$  qui figure dans la démonstration précédente, car:

$$\langle M \rangle_t = v^2 \int_0^t \frac{ds}{\rho_s^2}, \quad \text{et} \quad E_a^0 \left( \frac{1}{\rho_s^2} \right) \equiv \infty \quad (s > 0).$$

Par contre, le critère de Kazamaki s'applique à l'évidence car:  $\exp \left\{ \frac{M_t}{2} \right\} = \left( \frac{\rho_t}{a} \right)^{v/2}$ . Autrement dit, voici un autre exemple illustrant la puissance

du test de Kazamaki (qui, soulignons le, est loin d'avoir été utilisé dans toute sa force.  $\square$

Les deux théorèmes suivants constituent, à l'évidence, lorsque l'on prend  $\mu=0$ , une redémonstration probabiliste *directe*, respectivement du résultat de Hartman et Watson (voir l'introduction), et des résultats (1.4) de Hartman.

(4.7) **Théorème.** *Pour tout couple  $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , et  $\tau > 0$ , on a :*

$$(4.8) \quad E_a^\mu \left[ \exp \left\{ -\frac{\nu^2}{2} \int_0^\tau \frac{ds}{\rho_s^2} \right\} / \rho_\tau = \rho \right] = \frac{I_{(\mu^2 + \nu^2)^{1/2}} \left( \frac{\rho a}{\tau} \right)}{I_\mu \left( \frac{\rho a}{\tau} \right)}$$

*Démonstration.* Appliquons (4.6), avec le couple d'indices  $(\mu, \lambda)$ , où  $\lambda = (\mu^2 + \nu^2)^{1/2}$ , au temps  $T = \tau$ , et avec la variable :

$$Y = f(\rho_\tau) \exp \left\{ \frac{\mu^2}{2} \int_0^\tau \frac{ds}{\rho_s^2} \right\},$$

$f$  désignant ici une fonction borélienne positive. Il vient :

$$\begin{aligned} & E_a^\mu \left[ f(\rho_\tau) \exp \left( -\frac{\nu^2}{2} \int_0^\tau \frac{ds}{\rho_s^2} \right) \left( \frac{\rho_\tau}{a} \right)^{-\mu} \right] \\ &= E_a^\lambda \left[ f(\rho_\tau) \left( \frac{\rho_\tau}{a} \right)^{-\lambda} \right] \\ &= \int_0^\infty dy f(y) \frac{1}{\tau} \exp \left( -\frac{a^2 + y^2}{2\tau} \right) I_\lambda \left( \frac{ay}{\tau} \right) y \quad (\text{d'après (4.3)}). \end{aligned}$$

Désignons par  $G$  une version borélienne de  $E_a^\mu \left[ \exp \left\{ -\frac{\nu^2}{2} \int_0^\tau \frac{ds}{\rho_s^2} \right\} / \rho_\tau = \cdot \right]$ . Il vient alors, en appliquant à nouveau (4.3) :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dy f(y) G(y) \frac{1}{\tau} \exp \left( -\frac{a^2 + y^2}{2\tau} \right) I_\mu \left( \frac{ay}{\tau} \right) y \\ &= \int_0^\infty dy f(y) \frac{1}{\tau} \exp \left( -\frac{a^2 + y^2}{2\tau} \right) I_\lambda \left( \frac{ay}{\tau} \right) y, \quad \text{d'où (4.8). } \square \end{aligned}$$

*Remarque.* A l'aide de la propriété de Markov, on peut écrire la version symétrisée suivante de (4.8) : pour tout couple  $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , et  $0 < \sigma < \tau < \infty$  :

$$E_a^\mu \left[ \exp \left( -\frac{\nu^2}{2} \int_\sigma^\tau \frac{ds}{\rho_s^2} \right) / (\rho_\sigma, \rho_\tau) \right] = \frac{I_{(\mu^2 + \nu^2)^{1/2}} \left( \frac{\rho_\sigma \rho_\tau}{\tau - \sigma} \right)}{I_\mu \left( \frac{\rho_\sigma \rho_\tau}{\tau - \sigma} \right)}$$

Le corollaire suivant découle immédiatement de (3.7).

(4.7.1) **Corollaire.** Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a :

$$(4.9) \quad \mathbb{E}_{z_0}(e^{i\alpha(\theta_\tau - \theta_0)}/\rho_\tau = \rho) = E_a^0 \left( \exp -\frac{\alpha^2}{2} \int_0^\tau \frac{ds}{\rho_s^2} \middle/ \rho_\tau = \rho \right) = \frac{I_{|\alpha|} \left( \frac{\rho a}{\tau} \right)}{I_0 \left( \frac{\rho a}{\tau} \right)}.$$

*Remarque.* Au début de ce travail, la formule «intégrée» :

$$\mathbb{E}_{z_0}(e^{i\alpha(\theta_\tau - \theta_0)}) = \int \mathbb{P}_{z_0}(\rho_\tau \in d\rho) \frac{I_{|\alpha|} \left( \frac{\rho a}{\tau} \right)}{I_0 \left( \frac{\rho a}{\tau} \right)},$$

obtenue par Ito-McKean ([6], p. 271), nous a suggéré la formule (4.9).

Rappelons que, à l'aide de cette formule «intégrée», Ito et McKean déduisent très rapidement le résultat de Spitzer [17]: sous  $\mathbb{P}_{z_0}$ ,  $\frac{2(\theta_t - \theta_0)}{\log t}$  converge en loi vers la distribution de Cauchy de paramètre 1, lorsque  $(t \rightarrow \infty)$ .

Le corollaire suivant permet, en particulier, d'établir la jonction entre le théorème (4.7) et l'étude menée par J. Pitman en [15].

(4.7.2) **Corollaire.** Soit  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d \geq 2$ , et  $\mu_d = \frac{d}{2} - 1$ .  $m$  désigne un point fixé, non nul, de  $\mathbb{R}^d$ .

$(B_u)_{u \geq 0}$  est un mouvement brownien, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , issu de 0. Alors, pour tout  $t > 0$ , et  $v \in \mathbb{R}$ , on a :

$$(*) \quad E \left[ \exp -\frac{v^2}{2} \int_t^\infty \frac{du}{\|um + B_u\|^2} \middle/ \|tm + B_t\| = r \right] = \frac{I_{(\mu_d^2 + v^2)^{1/2}}(r \|m\|)}{I_{\mu_d}(r \|m\|)}$$

*Démonstration.* On fait, dans l'intégrale entre  $t$  et  $\infty$ , le changement de variable  $\mu = 1/v$ ; puis, utilisant le fait que le processus  $(vB_{1/v})_{v > 0}$  est encore un mouvement brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , tendant vers 0, lorsque  $v \rightarrow 0$ , on applique la formule (4.8) avec  $\mu = \mu_d$ ,  $\tau = 1/t$ ,  $\rho = \frac{r}{t}$ ,  $a = \|m\|$ .

(4.7.3) *Remarque.* Si l'on fait, dans l'intégrale figurant en (\*), le changement de variable  $u = t + v$ , et que l'on utilise le fait que  $(B_{t+v} - B_t, v \geq 0)$  est un mouvement brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , issu de 0, on peut énoncer, après introduction d'une variable gaussienne  $G_{(mt, t)}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , de moyenne  $(mt)$  et de matrice de covariance  $t \text{Id}_{\mathbb{R}^d}$ , indépendante du mouvement brownien  $d$ -dimensionnel  $(B_t)_{t \geq 0}$  issu de 0, la version abstraite suivante de (\*):

$$\begin{aligned} & E \left[ \exp \left( -\frac{v^2}{2} \int_0^\infty \frac{du}{\|G_{(mt, t)} + um + B_u\|^2} \right) \middle/ \|G_{(mt, t)}\| = \rho \right] \\ &= E \left[ \exp \left( -\frac{v^2}{2} \int_0^\infty \frac{du}{\|uG_{(mt, t)} + m + B_u\|^2} \right) \middle/ \|G_{(mt, t)}\| = \rho \right] \\ &= \frac{I_{(\mu_d^2 + v^2)^{1/2}}(\rho \|m\|)}{I_{\mu_d}(\rho \|m\|)}. \end{aligned}$$

(4.10) **Théorème.** Pour tout  $b > 0$ , on note  $\tau_b = \inf \{t \geq 0 / \rho_t = b\}$ . Pour tout triplet  $(\mu, \nu, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$(4.11) \quad E_a^\mu \left[ \exp \left\{ -\frac{\nu^2}{2} \int_0^{\tau_b} \frac{ds}{\rho_s^2} - \beta \tau_b \right\} \right] = \left( \frac{b}{a} \right)^\mu \frac{\mathfrak{Q}_{(\mu^2 + \nu^2)^{1/2}}(a\sqrt{2\beta})}{\mathfrak{Q}_{(\mu^2 + \nu^2)^{1/2}}(b\sqrt{2\beta})},$$

où  $\mathfrak{Q} = K$ , si  $b < a$ ;  $\mathfrak{Q} = I$ , si  $a < b$ .

*Démonstration.* Appliquons (4.6) pour le couple d'indices  $(\mu, \lambda)$ , où  $\lambda = (\mu^2 + \nu^2)^{1/2}$ , au temps  $T = \tau_b \wedge t$  ( $t \geq 0$ ), et avec la variable  $Y = \exp \left\{ \frac{\mu^2 \tau_b \wedge t}{2} \int_0^{\tau_b \wedge t} \frac{ds}{\rho_s^2} - \beta(\tau_b \wedge t) \right\} g(\rho_{\tau_b \wedge t})$ ,  $g$  désignant une fonction borélienne positive. Il vient :

$$(4.12) \quad \begin{aligned} E_a^\mu \left[ \exp \left\{ -\frac{\nu^2}{2} \int_0^{\tau_b \wedge t} \frac{ds}{\rho_s^2} - \beta(\tau_b \wedge t) \right\} g(\rho_{\tau_b \wedge t}) \left( \frac{\rho_{\tau_b \wedge t}}{a} \right)^{-\mu} \right] \\ = E_a^\lambda \left[ \exp(-\beta(\tau_b \wedge t)) g(\rho_{\tau_b \wedge t}) \left( \frac{\rho_{\tau_b \wedge t}}{a} \right)^{-\lambda} \right] \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant discuter selon les positions respectives de  $a$  et  $b$ .

1) Supposons  $b < a$ . Alors,  $\rho_{\tau_b \wedge t} \geq b$ , et donc :  $\left( \frac{\rho_{\tau_b \wedge t}}{a} \right)^{-1} \leq \frac{a}{b}$ . On peut donc faire tendre  $t$  vers  $+\infty$  dans l'égalité (4.12)<sup>2</sup>, ce qui donne, avec  $g \equiv 1$  :

$$\begin{aligned} \left( \frac{b}{a} \right)^{-\mu} E_a^\mu \left[ \exp - \left\{ \frac{\nu^2}{2} \int_0^{\tau_b} \frac{ds}{\rho_s^2} + \beta \tau_b \right\} \right] \\ = \left( \frac{b}{a} \right)^{-\lambda} E_a^\lambda \left[ \exp(-\beta \tau_b) \right] = \frac{K_\lambda(a\sqrt{2\beta})}{K_\lambda(b\sqrt{2\beta})}, \quad \text{d'après (4.4),} \end{aligned}$$

d'où le résultat cherché.

2) Supposons  $a < b$ . Alors,  $\rho_{\tau_b \wedge t} \leq b$ .

De même que précédemment, on peut faire tendre  $t$  vers  $+\infty$  dans l'égalité (4.12), où l'on prend  $g(\rho) = \rho^\lambda$ . On obtient finalement (4.11).  $\square$

Le corollaire suivant découle de (3.7).

(4.10.1). **Corollaire.** Avec les mêmes notations que dans le théorème, on a :

$$(4.13) \quad \mathbb{E}_{z_0} \left[ \exp \{i\nu(\theta_{\tau_b} - \theta_0) - \beta \tau_b\} \right] = \frac{\mathfrak{Q}_{|\nu|}(a\sqrt{2\beta})}{\mathfrak{Q}_{|\nu|}(b\sqrt{2\beta})}.$$

En faisant décroître  $\beta$  vers  $0_+$  dans l'égalité (4.11), on obtient le

(4.10.2) **Corollaire.** Pour tout couple  $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , et  $0 < b < a < \infty$ , on a :

$$E_a^\mu \left[ \exp \left\{ -\frac{\nu^2}{2} \int_0^{\tau_b} \frac{ds}{\rho_s^2} \right\}; \tau_b < \infty \right] = \left( \frac{b}{a} \right)^{\mu + (\mu^2 + \nu^2)^{1/2}}.$$

<sup>2</sup> Il faut toutefois prendre garde au fait que, pour tout  $\mu > 0$ , et  $0 < b < a$ , on a :  $P_a^\mu(\tau_b = \infty) > 0$ . Voir, à ce sujet, le corollaire (4.10.2). Par contre, si  $b \geq a > 0$ , on a, pour tout  $\mu \geq 0$ ,  $P_a^\mu(\tau_b = \infty) = 0$

En particulier,  $P_a^\mu(\tau_b < \infty) = \left(\frac{b}{a}\right)^{2\mu}$ .

En conclusion de ce paragraphe, remarquons que, d'après l'égalité (4.11), considérée en  $\mu=0$ , l'application:  $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \frac{\mathfrak{Q}_{\sqrt{2\lambda}}(a\sqrt{2\beta})}{\mathfrak{Q}_{\sqrt{2\lambda}}(b\sqrt{2\beta})}$  est la transformée de Laplace d'une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ , ce qui étend à la fois les résultats (1.4) de P. Hartman, et (4.4) de J. Kent.

Enfin, l'énoncé suivant permet d'introduire les principales notations du paragraphe 5. C'est un corollaire du théorème (4.7) (appliqué avec  $\mu=0$ ), modulo un argument de continuité, et de (3.7).

(4.14) **Proposition.** *Pour tout  $r > 0$ , il existe deux mesures de probabilité  $\mu_r$  et  $\eta_r$ , appelées respectivement distribution développée de von Mises (sur  $\mathbb{R}$ ) et distribution de Hartman-Watson (sur  $\mathbb{R}_+$ ) telles que:*

(4.15) pour tout  $v \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{I_{|v|}(r)}{I_0(r)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx} d\mu_r(x)$ ,

(4.16) pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\frac{I_{(\sqrt{2\lambda})}(r)}{I_0(r)} = \int_0^\infty e^{-\lambda u} d\eta_r(u)$ .

De plus, on a:

(4.17)  $d\mu_r(x) = \left( \int_0^\infty d\eta_r(u) e^{-x^2/2u} \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \right) dx$ ,

et, sous  $\mathbb{P}_{z_0}$ , la loi conditionnelle (sur  $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u^+$ ) du couple  $\left( \theta_\tau - \theta_0; \int_0^\tau \frac{ds}{\rho_s^2} \right)$  quand  $\rho_\tau = \rho$  est égale à:

(4.18)  $\frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-x^2/2u} d\eta_r(u) dx$ , où  $r = \frac{\rho a}{\tau}$ .

### 5. Etude des densités respectives de $\mu_r$ et $\eta_r$

Soit  $r > 0$ , fixé dans tout ce paragraphe, dont l'objet est d'obtenir une expression aussi explicite que possible de  $\mu_r$  et  $\eta_r$ .

On se sert de façon intensive de la représentation intégrale suivante (cf. Petiau [14], p. 123) de  $I_\lambda(r)$  ( $r > 0; \lambda \in \mathbb{R}$ ):

(5.1)  $I_\lambda(r) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_u} e^{(rch\omega - \lambda\omega)} d\omega$ ,

où  $C_u$  ( $u \in \mathbb{R}$ ) désigne le chemin indiqué par la

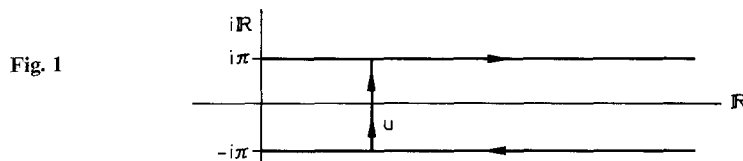


Fig. 1

(La fonction:  $\omega \rightarrow e^{rch\omega - \lambda\omega}$  étant entière, l'intégrale qui figure en (5.1) ne dépend évidemment pas de  $u$ ).

En intégrant le long des deux horizontales, et de la verticale qui constituent  $C_0$ , on obtient:

$$(5.2) \quad I_\lambda(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{r \cos \theta} \cos(\lambda \theta) d\theta - \frac{\sin(\lambda \pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-rcht - \lambda t} dt.$$

Il nous faut encore introduire, afin d'expliciter  $\mu_r$ , la fonction  $\Phi_r: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par:

$$(5.3) \quad \Phi_r(x) = \frac{x}{\pi} \int_0^\infty e^{-rcht} \frac{dt}{t^2 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

$$(5.3)_+ \quad = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-rch(xw)} \frac{dw}{1+w^2} \quad (x > 0).$$

On déduit immédiatement de (5.3)<sub>+</sub> que  $\Phi_r(0_+) = \frac{e^{-r}}{2}$ , ce qui permet de prolonger  $\Phi_r$  en une fonction continue à droite sur tout  $\mathbb{R}$ , en posant  $\Phi_r(0) = \frac{e^{-r}}{2}$ .

Introduisons encore les mesures:

$m(d\theta) = \frac{1}{2\pi} 1_{[-\pi, \pi]}(\theta) d\theta$ ;  $\pi_r(dt) = e^{-rcht} r \, sh t \, dt$  ( $\pi_r$  est une mesure positive, définie sur  $\mathbb{R}_+$ , de masse totale  $e^{-r}$ ), et enfin  $c_t(dx) = \frac{t \, dx}{\pi(t^2 + x^2)}$  ( $t > 0$ ) la mesure de Cauchy de paramètre  $t$ .

On peut maintenant énoncer le:

(5.4) **Théorème.** Soit  $r > 0$ .

(i)  $\mu_r$  se décompose en la somme  $p_r + q_r$ , où:

(5.5)  $p_r(d\theta) = \frac{1}{2\pi I_0(r)} e^{r \cos \theta} 1_{[-\pi, \pi]}(\theta) d\theta$  est la distribution de Von Mises de paramètre  $r$ .

$$(5.6) \quad q_r(d\theta) = \frac{1}{I_0(r)} \left\{ -e^{-r} m + m * \int_0^\infty \pi_r(dt) c_t \right\},$$

$$(5.6') \quad = \frac{1}{2\pi I_0(r)} \{ \Phi_r(\theta - \pi) - \Phi_r(\theta + \pi) \} d\theta$$

est une mesure bornée, de masse totale nulle.

De plus, si l'on note  $f_r$  la densité de  $\mu_r$ , définie par:

$$(5.7) \quad f_r(\theta) = \frac{1}{2\pi I_0(r)} e^{r \cos \theta} 1_{[-\pi, \pi]}(\theta) + \frac{1}{2\pi I_0(r)} \{ \Phi_r(\theta - \pi) - \Phi_r(\theta + \pi) \},$$

la fonction  $f: (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est continue.

$$(r, \theta) \rightarrow f_r(\theta)$$

$$(ii) \eta_r(du) = \frac{1}{\pi^{3/2}(2u)^{1/2}} e^{\pi^2/2u} \frac{r}{I_0(r)} \psi_r(u) du, \text{ avec}$$

$$(5.8) \quad \psi_r(u) = \int_0^\infty dx e^{-x^2/2u} e^{-rchx} (shx) \sin\left(\frac{\pi x}{u}\right)$$

La fonction  $\psi$  ainsi définie sur  $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})^2$  est continue.

Démonstration. (i) Remplaçons, en (5.2),  $\lambda$  par  $|v|$  ( $v \in \mathbb{R}$ ). On a :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{r \cos \theta} \cos(v\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{r \cos \theta} < \frac{\varepsilon_\theta + \varepsilon_{-\theta}}{2}; e^{iv^*} > d\theta.$$

L'application:  $v \rightarrow \frac{1}{\pi I_0(r)} \int_0^\pi e^{r \cos \theta} \cos(v\theta) d\theta$  apparaît donc comme la transformée de Fourier de la probabilité  $p_r$  donnée par (5.5).

D'autre part, écrivons, pour  $v \neq 0$ :

$$-\frac{\sin(|v|\pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-rcht} e^{-|v|t} dt = \left[ \frac{\sin(v\pi)}{v\pi} \right] (-1) \int_0^\infty e^{-rcht} \{e^{-|v|t} |v|\} dt$$

expression qui se transforme, par intégration par parties, en :

$$\frac{\sin(v\pi)}{v\pi} \left[ -e^{-r} + \int_0^\infty \pi_r(dt) e^{-|v|t} \right].$$

La fonction:  $v \rightarrow \frac{\sin(v\pi)}{v\pi}$  (prolongée par 1 en  $v=0$ ), resp:  $v \rightarrow e^{-|v|t}$  ( $t > 0$ ) est la transformée de Fourier de  $m$ , resp:  $c_t$ .

L'expression obtenue précédemment est donc, comme fonction de  $v$ , la transformée de Fourier de

$$\lambda \equiv -e^{-r} m + m * \int_0^\infty \pi_r(dt) c_t,$$

d'où la formule (5.6).

La mesure  $\lambda$  a pour densité:

$$-\frac{e^{-r}}{2\pi} 1_{[-\pi, +\pi]}(\theta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dx \int_0^\infty \pi_r(dt) \frac{t}{\pi[t^2 + (\theta-x)^2]}.$$

Lorsque l'on fait le changement de variable  $t = |\theta - x|y$  (en  $t$ ) dans l'intégrale double, celle-ci se transforme en :

$$L(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\pi}^{+\pi} dx \int_0^\infty dy e^{-rch[|\theta-x|y]} rsh[|\theta-x|y] \frac{y}{\pi(1+y^2)}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dy}{\pi(1+y^2)} \int_{-\pi}^{+\pi} dx \operatorname{sgn}(\theta-x) e^{-rch[(\theta-x)y]} rsh[(\theta-x)y] y.$$

Discutons maintenant les cas:  $|\theta| > \pi$ , et  $|\theta| < \pi$ ;

a)  $\theta > \pi$  :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \int_0^{\infty} \frac{dy}{\pi(1+y^2)} \{e^{-rch[(\theta-\pi)y]} - e^{-rch[(\theta+\pi)y]}\} \\ &= \Phi_r(\theta-\pi) - \Phi_r(\theta+\pi), \quad \text{d'après la formule (5.3)}_+. \end{aligned}$$

b)  $\theta < -\pi$  : Pour tout  $x \in ]-\pi, +\pi[$ ,  $\text{sgn}(\theta-x) = -1$ .

La formule (5.3)<sub>+</sub> assure encore que  $L(\theta) = \Phi_r(\theta-\pi) - \Phi_r(\theta+\pi)$ .

c)  $|\theta| < \pi$  :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \int_0^{\infty} \frac{dy}{\pi(1+y^2)} \left[ \int_{-\pi}^{\theta} dx e^{-rch[(\theta-x)y]} rsh[(\theta-x)y] y \right. \\ &\quad \left. - \int_{\theta}^{\pi} dx e^{-rch[(\theta-x)y]} rsh[(\theta-x)y] y \right] \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dy}{\pi(1+y^2)} [e^{-r} - e^{-rch[(\theta+\pi)y]} - e^{-rch[(\theta-\pi)y]} + e^{-r}] \\ &= e^{-r} + \Phi_r(\theta-\pi) - \Phi_r(\theta+\pi), \end{aligned}$$

d'où la formule (5.6') en toute généralité.

La continuité de  $f$ , définie par (5.7), se vérifie aisément (les seuls points de  $\mathbb{R}$  où la continuité en  $\theta$  n'est pas évidente a priori sont  $-\pi$  et  $+\pi$ , mais le choix que nous avons fait pour  $\Phi_r(0)$  entraîne le résultat cherché).

(ii) Rappelons la formule: pour tout  $x > 0$ , et  $\lambda \geq 0$ ,

$$(5.10) \quad e^{-(\sqrt{2\lambda})x} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \frac{1}{(2\pi u^3)^{1/2}} x e^{-x^2/2u} du.$$

Cette formule est classique: elle exprime la transformée de Laplace du temps d'arrêt  $T_x = \inf \{t/\beta_t > x\}$ , où  $(\beta_t)_{t \geq 0}$  désigne le mouvement brownien réel issu de 0.

D'autre part, pour tout  $\varepsilon > 0$ , sur l'ouvert  $\mathbf{0}_\varepsilon = \{z = x + iy/x^2 - y^2 > \varepsilon^2, x > \varepsilon\}$ , l'application:  $z \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \frac{1}{(2\pi u^3)^{1/2}} z e^{-z^2/2u} du$  est holomorphe, et l'égalité (5.10) est donc encore vraie lorsque l'on remplace  $x$  par  $z \in \mathbf{0}_\varepsilon$ . On peut donc écrire, d'après (5.1):

$$\begin{aligned} I_{(\sqrt{2\lambda})}(r) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{\pi+\varepsilon}} d\omega e^{rch\omega} \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \frac{1}{(2\pi u^3)^{1/2}} \omega e^{-\omega^2/2u} du \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \frac{du}{(2\pi u^3)^{1/2}} \left[ \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{\pi+\varepsilon}} e^{rch\omega} \omega e^{-\omega^2/2u} d\omega \right], \end{aligned}$$

l'application du théorème de Fubini étant licite.



La mesure  $\eta_r(du)$  est donc absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et admet pour densité:  $\frac{1}{I_0(r)} \frac{1}{(2\pi u^3)^{1/2}} H(u)$ , où

$$H(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{\pi+\varepsilon}} d\omega e^{rch\omega} \omega e^{-\omega^2/2u} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} d\omega e^{rch\omega} \omega e^{-\omega^2/2u},$$

la fonction intégrée étant entière.

En intégrant sur les deux horizontales et la verticale qui constituent  $C_0$ , il vient:

$$\begin{aligned} H(u) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^\infty dx e^{-rchx} [(x+i\pi) e^{-\frac{(x+i\pi)^2}{2u}} - (x-i\pi) e^{-\frac{(x-i\pi)^2}{2u}}] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dx e^{-rchx} e^{-\frac{1}{2u}(x^2-\pi^2)} \left[ -2x \sin\left(\frac{\pi x}{u}\right) + 2\pi \cos\left(\frac{\pi x}{u}\right) \right] \\ &= \frac{ru}{\pi} e^{\pi^2/2u} \int_0^\infty dx e^{-x^2/2u} e^{-rchx} (shx) \sin\left(\frac{\pi x}{u}\right), \end{aligned}$$

par intégration par parties. On a finalement obtenu la partie (ii) du théorème, la continuité de  $\psi$  sur  $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})^2$  étant évidente.  $\square$

*Remarque importante.* On peut également démontrer la partie (i) du théorème en remarquant, à l'aide de la formule (5.1), écrite en  $u > 0$ , que  $I_{|\cdot|}(r) \in L^1(d\nu)$ . On en déduit, par inversion de la transformation de Fourier, que:

$$\begin{aligned} f_r(\theta) &= \frac{1}{2i\pi I_0(r)} \int_{C_u} d\omega e^{rch\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\theta} e^{-|\nu|\omega} d\nu \\ (5.11) \quad &= \frac{1}{2i\pi I_0(r)} \int_{C_u} d\omega e^{rch\omega} \frac{\omega}{\pi(\theta^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

(Il découle de cette formule que  $f$  est indéfiniment différentiable sur  $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ ).

Si  $|\theta| > \pi$ , on peut prendre  $u = 0$ , puis constater, après quelques calculs, que l'on a obtenu la formule (5.7).

Si  $|\theta| < \pi$ , on remplace  $C_u$  par le domaine d'intégration indiqué par la

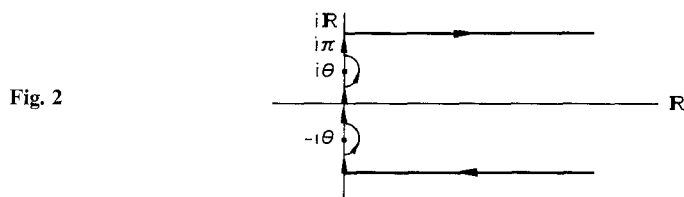


Fig. 2

ce qui, à nouveau, permet de retrouver (5.7).

Nous préférons à cette méthode la première démonstration que nous avons donnée de (5.7), car elle fait apparaître diverses probabilités (cf.: la formule (5.6)) qui ont peut-être une interprétation dans l'étude du lacet brownien. (Voir déjà le corollaire suivant).

Notons encore une formule analogue à (5.11) pour la densité  $g_r(t)$  de  $d\eta_r(t)$  par rapport à  $dt$  (sur  $\mathbb{R}_+$ ), formule qui a été dégagée au cours de la démonstration précédente:

$$(5.11) \quad g_r(t) = \frac{1}{2i\pi I_0(r)} \int_{C_u} d\omega e^{rch\omega} \left[ \frac{\omega e^{-\omega^2/2t}}{(2\pi t^3)^{1/2}} \right]$$

Ajoutons enfin quelques remarques complémentaires sur la fonction:  $x > 0 \rightarrow \Phi_r(x)$

a) il est immédiat, à partir de (5.3)<sub>+</sub>, que:

$$(5.12) \quad \Phi_r(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-rch(xtgy)} dy \quad (x > 0).$$

b) Il est plus important de remarquer que la transformée de Fourier de:  $t \rightarrow \frac{1}{2} e^{-rcht}$  est:  $\xi \rightarrow K_{(i\xi)}(r)$ , et celle de:  $t \rightarrow \frac{x}{\pi(t^2 + x^2)}$  ( $x > 0$ ) est:  $\xi \rightarrow e^{-|\xi|x}$ .

On obtient donc, en conséquence du théorème de Plancherel<sup>3</sup>, et de (5.3):

$$(5.13) \quad \Phi_r(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K_{(i\xi)}(r) e^{-\xi x} d\xi.^4$$

c) La formule (5.13) permet d'obtenir, grâce à la méthode de Laplace, l'équivalence suivante, lorsque  $x \uparrow +\infty$ :

si  $u < v$ ,  $\Phi_r(x+u) - \Phi_r(x+v) \simeq \frac{1}{\pi} K_0(r) (v-u) x^{-2}$ ; en particulier, si  $v = -u = \pi$ , on a:

$$(5.14) \quad \Phi_r(x-\pi) - \Phi_r(x+\pi) \underset{|x| \rightarrow \infty}{\simeq} 2K_0(r) x^{-2}.$$

Remarquons, pour être complet, que l'on a immédiatement, à partir de (5.13):

$$\Phi_r(x) \simeq \frac{1}{\pi} K_0(r) x^{-1} \quad (|x| \rightarrow \infty).$$

## 6. Loi de l'indice du lacet brownien

Le lemme (6.1) permettra de ramener le calcul de la loi conditionnelle de  $(\theta_\tau - \theta_0)$ , quand  $Z_\tau = z$ , sous  $\mathbb{IP}_{z_0}$ , à celle de  $(\theta_\tau - \theta_0)$ , quand  $\rho_\tau = \rho$  (cf., corollaire (4.7.1)).

On emploie indifféremment la notation complexe  $z = x + iy$ , ou bi-dimensionnelle  $(x, y)$ ; si  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\theta_z$  désigne la détermination de l'argument de  $z$  appartenant à  $[-\pi, +\pi[$ ; si  $z, z' \in \mathbb{C}$ , on note  $\langle z, z' \rangle = xx' + yy'$  le produit scalaire usuel de  $z$  et  $z'$ .

<sup>3</sup> Je remercie M. Barrucand qui m'a fait cette remarque

<sup>4</sup> On obtient une représentation du même type pour la fonction  $\psi_r$  (cf., formule (5.8)). Les calculs correspondants - inutiles ici - seront détaillés dans une Note séparée.

Soulignons que les hypothèses faites dans l'énoncé qui suit ne sont pas minimales, mais elles suffisent largement à nos besoins.

(6.1) **Lemme.** Soient  $\mathbf{R}$  et  $\theta$  deux v.a. définies sur le même espace de probabilité, respectivement à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , et  $\mathbb{R}$ .

Soient  $U: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , et  $V: \begin{matrix} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (\rho, u) \rightarrow V_\rho(u) \end{matrix}$  deux fonctions boréliennes telles que:

$$dP_{\mathbf{R}}(\rho) = d\rho \rho U(\rho) \quad \text{et} \quad dP_{\theta/\mathbf{R}=\rho}(\theta) = d\theta V_\rho(\theta).$$

Alors, si l'on note  $\mathbf{Z} = \mathbf{R} e^{i\theta}$ , on a:

$$(i) \quad dP_{\mathbf{Z}}(x, y) = dx dy p(z), \quad \text{où} \quad p(z) \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} U(|z|) V_{|z|}(\theta_z + 2n\pi) \quad (z \neq 0).$$

$$(ii) \quad dP_{\theta/\mathbf{Z}=z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{U(|z|) V_{|z|}(\theta_z + 2n\pi)}{p(z)} \varepsilon_{(\theta_z + 2n\pi)}.$$

(iii) Si, de plus, les applications  $U$ ,  $V$  et  $p$  (supposée identiquement finie, et strictement positive) sont continues, respectivement sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , et  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , alors, pour toute fonction continue, bornée et à support compact  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , l'application

$$\square_\phi: z \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{U(|z|) V_{|z|}(\theta_z + 2n\pi)}{p(z)} \phi(\theta_z + 2n\pi)$$

est continue sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

*Démonstration.* (i) et (ii) découlent simplement de la décomposition de l'intégrale (générique!) en  $d\theta$ , soit  $\int_{-\infty}^{+\infty} d\theta[\dots]$  en  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2n\pi - \pi}^{2n\pi + \pi} d\theta[\dots]$ , et du changement de variable  $\theta = 2n\pi + u$  dans l'intégrale correspondante.

Pour démontrer (iii), on commence par remarquer que l'on peut remplacer – à l'évidence – dans la définition des fonctions  $p$  et  $\square_\phi$  la détermination principale  $\theta_z$  de l'argument de  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  par n'importe quelle détermination.

L'assertion (iii) est alors une conséquence immédiate de l'existence, au voisinage de tout point  $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , d'une détermination continue de l'argument.

*Remarque.* Si  $U$  et  $V$  sont continues, respectivement sur  $\mathbb{R}_+$ , et  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , et si  $P_{\mathbf{Z}}(dx \times dy)$  admet une densité  $p_0$  continue (finie) par rapport à  $dx dy$ , alors la fonction  $p$  du lemme (6.1) est identiquement finie sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  (et égale  $dx dy$  p.s. à  $p_0$ ).

Rappelons maintenant que, selon les notations du paragraphe 2,  $\mathbb{IP}_{z_0}^z$  ( $zz_0 \neq 0$ ) désigne la loi du pont brownien complexe  $PB(z_0, z)$  (entre 0 et  $\tau > 0$ ); on avait pris, pour simplifier,  $\tau = 1$  dans le paragraphe 2.

(6.2) **Théorème.** Soit  $z_1 \neq 0$ . On note  $r = \frac{|z_1 z_0|}{\tau}$  et  $\theta_{(0,1)} = \theta_{z_1 z_0^{-1}}$ . Pour toute

fonction  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne, bornée, on a:

$$(6.3) \quad \mathbb{E}_{z_0}^{z_1} (h(\theta_\tau - \theta_0)) = e^{-\frac{\langle z_1, z_0 \rangle}{\tau}} \{2\pi I_0(r)\} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_r(\theta_{(0,1)} + 2n\pi) h(\theta_{(0,1)} + 2n\pi)^5$$

$$(6.4) \quad = h(\theta_{(0,1)}) + e^{-\frac{\langle z_1, z_0 \rangle}{\tau}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\Phi_r(\theta_{(0,1)} + (2n-1)\pi) - \Phi_r(\theta_{(0,1)} + (2n+1)\pi)] h(\theta_{(0,1)} + 2n\pi)$$

*Démonstration.* Posons  $u_0 = \frac{z_0}{|z_0|}$ ,  $z_1 = zu_0$ , et  $a = |z_0|$ . Avec ces nouvelles notations, l'égalité (6.3) se transforme en:

$$(6.3') \quad \mathbb{E}_{z_0}^{zu_0} (h(\theta_\tau - \theta_0)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\pi I_0(r) e^{-\frac{ax}{\tau}} f_r(\theta_z + 2n\pi) h(\theta_z + 2n\pi).$$

Il suffit, pour démontrer (6.3'), d'appliquer le lemme (6.1) avec  $\mathbf{Z} = Z_\tau u_0^{-1}$  et  $\theta = \theta_\tau - \theta_0$ . Remarquons que  $\mathbf{R} = \rho_\tau$ , et que, avec les notations du lemme

a)  $U(\rho) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{\rho^2 + a^2}{2\tau}} I_0\left(\frac{\rho a}{\tau}\right)$  (d'après (4.3), ou par un calcul direct).

b)  $V_\rho(\theta) = f_\rho(\theta)$ .

c)  $p(z) = \frac{1}{2\pi\tau} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{|z|^2 + a^2}{\tau}\right]} e^{\frac{ax}{\tau}}$

(Cette identité découle, de façon simple, du lemme (6.1), de la remarque qui le suit, et de la formule (5.7) explicitant  $f$ .)

Les hypothèses du lemme (6.1) (partie (iii)) sont bien vérifiées grâce au théorème (5.4). Ainsi, si  $h$  est une fonction continue, bornée, à support compact, les deux membres de (6.3') sont des fonctions continues de  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  (le membre de gauche l'est d'après le lemme (2.12)), qui sont égales  $dz$  p.s., et donc identiques. L'égalité (6.4) découle de (6.3), et de la formule (5.7).  $\square$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de (5.14).

(6.2.1) **Corollaire.** Avec les notations du théorème (6.2), on a:

$$\mathbb{P}_{z_0}^{z_1}(\theta_\tau - \theta_0 = \theta_{(0,1)} + 2n\pi) \underset{|n| \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{K_0(r)}{2\pi^2 n^2} e^{-\frac{\langle z_1, z_0 \rangle}{\tau}}.$$

Le théorème ci-dessous étend les résultats du théorème (6.2).

(6.5) **Théorème.** Avec les notations du théorème précédent, on a, pour tout  $z_1 \neq 0$ , et toute fonction  $H: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ , borélienne, bornée:

$$(6.6) \quad \mathbb{E}_{z_0}^{z_1} \left( H \left( \theta_\tau - \theta_0; \int_0^\tau \frac{dS}{\rho_s^2} \right) \right)^6 \\ = I_0(r) e^{-\frac{\langle z_1, z_0 \rangle}{\tau}} \int_0^\infty d\eta_r(u) \sqrt{\frac{2\pi}{u}} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(2n\pi + \theta_{(0,1)})^2}{2u}} H(\theta_{(0,1)} + 2n\pi; u) \right]$$

<sup>5</sup> cf., la formule (5.7) où est définie la fonction  $f$

<sup>6</sup> Rappelons que la mesure  $\eta_r$  a été définie au moyen de la formule (4.16), et explicitée dans le théorème (5.4), ii)

Plus particulièrement, pour toute fonction  $K: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ , borélienne, bornée, et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$(6.7) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E}_{z_0}^{z_1} \left( e^{i\lambda(\theta_\tau - \theta_0)} K \left( \int_0^\tau \frac{ds}{\rho_s^2} \right) \right) \\ &= I_0(r) e^{-\frac{\langle z_1, z_0 \rangle}{\tau}} \int_0^\infty d\eta_r(u) \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\left[ \frac{(n+\lambda)^2}{2} + ni\theta_{(0,1)} \right] u} \right] K(u), \end{aligned}$$

et enfin, on a, pour tous  $\lambda, v \in \mathbb{R}$  :

$$(6.8) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E}_{z_0}^{z_1} \left( e^{i\lambda(\theta_\tau - \theta_0)} e^{-v^2/2 \int_0^\tau ds/\rho_s^2} \right) \\ &= e^{-\frac{\langle z_1, z_0 \rangle}{\tau}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\theta_{(0,1)}} I_{[(n+\lambda)^2 + v^2]^{1/2}}(r) \end{aligned}$$

**Démonstration.** 1) La démonstration de la formule (6.6) est tout à fait semblable à celle de (6.3), la seule différence consistant à faire usage maintenant de la formule (4.18).

2) La formule (6.7) découle de (6.6), où l'on prend  $H(\theta, u) = e^{i\lambda\theta} K(u)$ , via l'égalité (on note simplement ici  $\theta$  pour  $\theta_{(0,1)}$ ):

$$\sqrt{\frac{2\pi}{u}} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(2n\pi + \theta)^2}{2u}} e^{i\lambda(\theta + 2n\pi)} \right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\left[ \frac{(n+\lambda)^2 u}{2} + ni\theta \right]},$$

elle même conséquence immédiate de la «formule de Poisson»: (cf, par exemple, [18], théorème 5, p. 153)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(n+z)^2 a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/a + 2in\pi z}$$

pour tout  $a > 0$ , et tout  $z \in \mathbb{C}$ .

3) Enfin, remarquons que:

$$\int_0^\infty d\eta_r(u) \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(n+\lambda)^2 u}{2}} \right] < \infty,$$

d'après la formule (6.7), prise en  $\theta_{(0,1)} = 0$ . On a donc, d'après la même formule:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{z_0}^{z_1} \left( e^{i\lambda(\theta_\tau - \theta_0)} e^{-v^2/2 \int_0^\tau ds/\rho_s^2} \right) \\ &= I_0(r) e^{-\frac{\langle z_1, z_0 \rangle}{\tau}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\theta_{(0,1)}} \left\{ \frac{I_{[(n+\lambda)^2 + v^2]^{1/2}}(r)}{I_0(r)} \right\} \end{aligned}$$

d'après la définition de  $\eta_r$  (formule (4.16)).  $\square$

Avant d'étudier le cas particulièrement intéressant où  $z_0 = z_1$ , donnons une autre version de certains des résultats du théorème (6.5): soit  $d \geq 2$ , et  $m, m'$  deux points non nuls de  $\mathbb{R}^d$ ; si  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , issu de 0, la distribution  $\lambda_{(m; m')}$  de  $\int_0^\infty \frac{du}{\|m + m'u + B_u\|^2}$  est symétrique en  $m$  et  $m'$ ,

c'est à dire:  $\lambda_{(m,m')} = \lambda_{(m',m)}$ , ce qui se démontre, comme pour le corollaire (4.7.2), en utilisant le fait que  $(vB_{1/v})_{v>0}$  est encore un mouvement brownien. Pour  $d = 2$ , la même propriété, appliquée au calcul de la loi conditionnelle de  $\int_1^\infty \frac{du}{\|mu + B_u\|^2}$  quand  $m + B_1 = m'$ , nous donne, d'après la formule (6.7): pour toute fonction  $K: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ , borélienne, bornée,

$$(6.9) \quad \int K(x) d\lambda_{(m,m')}(x) = I_0(r) e^{-\langle m,m' \rangle} \int_0^\infty d\eta_r(u) \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\left[\frac{n^2 u}{2} + i\theta_{(0,1)} n\right]} \right] K(u)$$

où  $r = \|m\| \|m'\|$ , et  $\theta_{(0,1)} = \theta_{m',m^{-1}}$ .

Les théorèmes (6.2) et (6.5) permettent en particulier de calculer la loi du couple  $\left(N_\tau; \int_0^\tau \frac{ds}{\rho_s^2}\right)$ , sous  $\mathbb{IP}_{z_0}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{IP}_{z_0}^{z_0}$ , où l'on note  $N_\tau = \frac{1}{2\pi}(\theta_\tau - \theta_0)$  l'indice de 0 par rapport au lacet brownien  $(Z_u(\omega), 0 \leq u \leq \tau)$ . On note dorénavant  $r = \frac{|z_0|^2}{\tau}$ .

(6.10) **Théorème.** 1) Sous  $\mathbb{IP}_{z_0}^*$ , la loi de l'indice  $(N_\tau)$  est:

$$(6.4^*) \quad \varepsilon_0(dm) + e^{-r} \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\Phi_r((2n-1)\pi) - \Phi_r((2n+1)\pi)] \varepsilon_n(dm)$$

2) Sous  $\mathbb{IP}_{z_0}^*$ , la loi du couple  $\left(N_\tau; \int_0^\tau \frac{ds}{\rho_s^2}\right)$

est:

$$(6.6^*) \quad I_0(r) e^{-r} d\eta_r(u) \left[ \sqrt{\frac{2\pi}{u}} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{2n^2 \pi^2}{u}} \varepsilon_n(dm) \right] \right]$$

Pour conclure, soulignons que la fonction caractéristique de  $N_\tau$ , sous  $\mathbb{IP}_{z_0}^*$  a la forme particulièrement simple suivante:

$$(6.8^*) \quad \mathbb{IE}_{z_0}^*(e^{2i\pi\lambda N_\tau}) = e^{-r} \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_{|n+\lambda|}(r)$$

### 7. Extension de certains résultats en dimension supérieure à 2

Dans tout ce paragraphe,  $d$  désigne un entier supérieur à 2, et pour tout  $m \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbb{IP}_m$  est la loi - définie, comme d'habitude, sur l'espace canonique  $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$  - du mouvement brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , issu de  $m$  en  $t=0$ .

$\tau > 0$  étant fixé, le but du paragraphe est de donner, de façon aussi explicite que possible, la loi de  $\int_0^\tau ds / \|B_s\|^2$ , sous  $\mathbb{IP}_m$ , conditionnellement à  $(B_\tau = m')$  ( $m, m' \neq 0$ ; on note encore  $\mathbb{IP}_m^{m'}$  la loi du pont brownien ainsi défini entre 0 et  $\tau$ ).

Rappelons, en préliminaire, les résultats classiques suivants:

(7.1) Le processus  $(B_t)$  peut se représenter comme «skew-product» de sa partie radiale  $\rho_t = \|B_t\|$ , et de sa partie «angulaire»  $\sigma_t \equiv \theta_t \left( \int_0^t \frac{ds}{\rho_s^2} \right)$ , à valeurs dans la sphère

unité  $S_{d-1}$ , le processus  $(\theta_t)_{t \geq 0}$  étant un mouvement brownien standard à valeurs dans  $S_{d-1}$ , indépendant de  $\rho$  (cf. Ito-Mc Kean [6], p. 270)

(7.2) La densité, au temps  $t$ , du processus  $(\theta_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $S_{d-1}$ , issu de  $\theta$  en  $t=0$ , par rapport à la mesure de surface  $d\sigma(\phi)$  sur  $S_{d-1}$  est donnée par :

$$p_t^{(d)}(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n(n+d-2)t}{2}} \frac{N(d; n)}{\omega_d} P_n(d; \langle \theta, \phi \rangle)$$

(cf. Ito-Mc Kean [6], p. 275, ou F. Perrin [19], formule (59), p. 25), où :

$N(d; n)$  est le nombre d'harmoniques sphériques linéairement indépendantes, de degré  $n$ , en dimension  $d$ .

$\omega_d$  est la surface de la sphère unité de  $\mathbb{R}^d$ .

$P_n(d; \cdot)$  est le polynôme de Legendre de degré  $n$ , en dimension  $d$ .

$\langle \theta, \phi \rangle$  est le produit scalaire des points  $\theta$  et  $\phi$  de  $S_{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ .

On voit aisément, en conséquence de l'égalité:  $P_n(d; 0) = 1$ , que la série définissant  $p^{(d)}$  est majorée, terme à terme, par :

$$e^{-\frac{n(n+d-2)t}{2}} \frac{N(d; n)}{\omega_d},$$

et est donc uniformément absolument convergente. On peut maintenant énoncer le :

(7.3) **Théorème.** Notons  $\mu_d = \frac{d}{2} - 1$ . Soient  $m, m' \in \mathbb{R}^d$ , non nuls;  $\theta = m/\|m\|$ ;

$\theta' = m'/\|m'\|$ . On note encore  $r = \frac{\|m\| \|m'\|}{\tau}$ . Alors, pour toute fonction borélienne  $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , on a

$$(7.4) \quad \mathbb{E}_m^{m'} \left[ \phi \left( \int_0^\tau \frac{ds}{\rho_s^2} \right) \right] = e^{-\frac{\langle m, m' \rangle}{\tau}} (2\pi)^{d/2} \frac{I_0(r)}{r^{\mu_d}} \int_0^\infty d\eta_r(v) e^{-\mu_d v/2} \phi(v) p_v^{(d)}(\theta; \theta')$$

et, en particulier, pour tout  $v \in \mathbb{R}$  :

$$(7.5) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E}_m^{m'} \left( e^{-v^2/2 \int_0^\tau ds/\rho_s^2} \right) \\ &= e^{-\frac{\langle m, m' \rangle}{\tau}} \frac{(2\pi)^{d/2}}{r^{\mu_d}} \left[ \sum_{(n \geq 0)} I_{[(n+\mu_d)^2 + v^2]^{1/2}}(r) \frac{N(d; n)}{\omega_d} P_n(d; \langle \theta, \theta' \rangle) \right] \end{aligned}$$

*Démonstration.* La formule (7.5) découle immédiatement de (7.4), où l'on prend  $\phi(v) = e^{-v^2/2}$ , de (7.2), et enfin de la définition de  $\eta_r$  par sa transformée de Laplace (formule (4.16)).

Afin de démontrer la formule (7.4), supposons  $\phi$  bornée, et introduisons  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , borélienne, bornée.

On a alors, d'après (7.1), en notant  $V_\tau = \int_0^\tau ds/\rho_s^2$  :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_m [f(B_\tau) \phi(V_\tau)] \\ &= \int \mathbb{P}_m(\rho_\tau \in d\rho; V_\tau \in dv) \phi(v) \int_{S_{d-1}} d\sigma(\phi) p_v^{(d)}(\theta; \phi) f(\rho \phi) \\ &= \int \mathbb{P}_m(\rho_\tau \in d\rho) \int \frac{d\eta_r^{(d)}(v)}{\tau} \phi(v) \int_{S_{d-1}} d\sigma(\phi) p_v^{(d)}(\theta; \phi) f(\rho \phi), \end{aligned}$$

où, d'après la formule (4.8),  $\eta_r^{(d)}(dv)$  désigne la probabilité sur  $\mathbb{R}_+$ , dont la transformée de Laplace, au point  $\left(\frac{v^2}{2}\right)$ , est égale à:  $\frac{I_{(\mu_a^2+v^2)^{1/2}}(r)}{I_{\mu_a}(r)}$ . On a, à l'évidence:  $d\eta_r^{(d)}(v) = \frac{I_0(r)}{I_{\mu_a}(r)} d\eta_r(v) e^{-\mu_a^2 v/2}$ .

On termine la démonstration en explicitant la densité de  $\mathbb{IP}_m(\rho_t \in d\rho)$  par rapport à  $d\rho$ , puis en reprenant les coordonnées cartésiennes à la place du couple  $(\rho, \phi)$ .  $\square$

Si l'on prend  $\phi \equiv 1$  dans la formule (7.4), on obtient le:

(7.3.1) **Corollaire** (Hartman-Watson, [4], p. 594, identité (1.5)). *Avec les mêmes notations que dans le théorème, on a:*

$$e^{\frac{\langle m, m' \rangle}{\tau} \frac{r^{\mu_a}}{(2\pi)^{d/2}}} = I_0(r) \int_0^\infty d\eta_r(v) e^{-\mu_a^2 v/2} p_v^{(d)}(\theta; \theta').$$

Soulignons ici que, d'après les arguments qui précèdent l'établissement de la formule (6.9), on a, pour  $m, m' \neq 0$ , et  $(B_t)$  mouvement brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , issu de 0:

$$E(e^{-v^2/2 \int_0^\infty \frac{du}{\|m+m'u+B_u\|^2}}) = \mathbb{IE}_m^{m'}(e^{-v^2/2 \int_0^1 ds/\rho_s^2})$$

d'où l'obtention de la mesure  $\lambda_{(m, m')}$  sur  $\mathbb{R}_+$ , pour toutes les dimensions  $d \geq 2$ .

(7.6) *Remarque.* La formule (7.4) est, bien entendu, également valable pour  $d=2$ , et l'on retrouve alors (partiellement) les formules (6.6) et (6.7), respectivement pour  $H$  ne dépendant pas de  $\theta$ , et  $\lambda=0$ . Le passage de (6.6) à (6.7) résulte d'ailleurs simplement de la représentation du mouvement brownien standard sur  $S_1$  comme l'image du mouvement brownien réel par la congruence modulo  $2\pi$ . Cette remarque a déjà été faite par F. Perrin ([19], p. 22). En dimension  $d > 2$ , le même auteur donne (formules (61), p. 26) une expression de  $p_t^{(d)}(\theta; \theta')$  différente de (7.2), mais qu'il semble difficile d'interpréter du point de vue probabiliste.

**8. Remarques finales**

a) J. Pitman étudie, en [15], certaines propriétés de la norme du mouvement brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , avec drift constant.

Après lecture d'une version préliminaire de notre travail, il a déduit la formule (\*) (corollaire (4.7.2)) pour  $d=2$ , du théorème (4.7).

La démonstration du corollaire (4.7.2) présentée ici est postérieure à celle de Pitman, mais nous semble plus immédiate.

b) Egalement après la lecture de ce papier, J. Henry nous a appris que la loi de l'indice du lacet Brownien avait déjà été calculée par S.F. Edwards [20] par une méthode tout à fait différente de la nôtre.

c) La densité de la distribution de von Mises développée (Théorème (5.4))  $\mu_r$ , a été obtenue initialement par D.G. Kendall, et figure (p. 212-219) dans la thèse de Ph.D. de J. Kent, intitulée: «Distributions, processes and statistics on spheres»



Toutefois, à la connaissance de Kent, ce résultat ne semble pas avoir été publié jusqu'à présent. Nous n'avons pas trouvé trace non plus, dans la littérature, du calcul de la densité de  $\eta$ , (théorème (5.4) également).

Je profite de ces remarques pour remercier vivement J. Pitman, J. Henry et J. Kent de l'intérêt qu'ils ont porté à la réalisation de ce travail.

## References

1. Gettoor, R.K., Sharpe, M.J.: Conformal martingales. *Invent. Math.* **16**, 271–308 (1972)
2. Gettoor, R.K., Sharpe, M.J.: Excursions of Brownian motion and Bessel processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **47**, 83–106 (1979)
3. Hartman, P.: Completely monotone families of solutions of  $n$  th order linear differential equations and infinitely divisible distributions. *Ann. S. Norm. Sup. Pisa. IV, Vol III*, 267–287 (1976)
4. Hartman, P., Watson, G.S.: “Normal” distribution functions on spheres and the modified Bessel functions. *Ann. Probab.* **2**, 593–607 (1974)
5. Ito, K.: Extension of Stochastic integrals. *Proc. of Intern. Sympos. SDE. Kyoto*, pp. 95–109 (1976)
6. Ito, K., McKean, H.P.: *Diffusion processes and their sample paths*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965
7. Jeulin, T., Yor, M.: Inégalité de Hardy, semi-martingales, et faux-amis. *Sém. Probabilités XIII. Lect. Notes in Maths* **721**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1979
8. Kazamaki, N.: On a problem of Girsanov. *Tohoku Math. J.* **29**, 597–600 (1977)
9. Kazamaki, N., Sekiguchi, T.: On the transformation of some classes of martingales by a change of law. *Tohoku Math. J.* **31**, 261–279 (1979)
10. Kent, J.: Some probabilistic properties of Bessel functions. *Ann. Probab.* **6**, 760–770 (1978)
11. Kent, J.: The infinite divisibility of the von Mises-Fisher distribution for all values of the parameter in all dimensions. *Proc. London Math. Soc.* **3**, **35**, 359–384 (1977)
12. Mackevicius, V.: Formula for conditional Wiener integrals. *Int. Symposium on Stoch. Diff Equations. August 28 – Sept. 2, 1978. Vilnius. Abstracts of Communications*.
13. Novikov, A.A.: On an identity for stochastic integrals. *Theory. Probab. Appl.* **17**, 717–720 (1972)
14. Petiau, G.: *La théorie des fonctions de Bessel*. Centre National de la Recherche Scientifique. Paris (1955).
15. Pitman, J.W.: The radial and angular parts of Drifting Brownian motion. A paraître.
16. Yor, M.: Formule de Cauchy relative à certains lacets Browniens. *Bulletin Soc. Math. France* **105**, 3–31 (1977)
17. Spitzer, F.: Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion. *Trans. Amer. Math. Soc.* **87**, 187–197 (1958)
18. Ellison, W.J., Mendes-France, M.: *Les nombres premiers*. Activités scientifiques et industrielles. Paris: Hermann (1975)
19. Perrin, F.: Etude mathématique du mouvement Brownien de rotation. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **45**, 1–51 (1928)
20. Edwards, S.F.: Statistical mechanics with topological constraints: I. *Proc. Phys. Soc.*, **91**, 513–519 (1967)

Reçu le 8 Décembre 1979; en forme finale le 25 Février 1980