Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
58, 183–198 (1981)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Représentation des fonctionnelles surmédianes

D. Feyel

Equipe d'Analyse, Université Paris VI, Tour 46-0-4ème étage, 4 Place Jussieu,
F-75230 Paris Cedex 05

Summary. Considérons la théorie du potentiel définie par un noyau de Hunt: si F est une fonction complètement additive de certaines mesures et croissante en ordre du balayage, il existe une (classe de) fonction borélienne représentant F; c'est le résultat principal de ce travail, et il se révèle extrêmement commode pour l'étude des fonctions fortement surmédianes.

On en déduit un théorème de convergence du type de Cartan-Brelot pour les familles monotones de fonctions fortement surmédianes, et un critère de compacité relative inspiré de celui de Dunford-Pettis. On précise les termes de la décomposition de Mertens à l'aide du cône C_δ des fonctions fortement surmédianes quasi-s.c.s. modérées.

Comme application, on introduit et on étudie la «quasi-topologie fine» et les ensembles réguliers.

Toute cette étude repose presque uniquement sur deux propriétés fondamentales, à savoir d'une part le caractère régularisant des opérateurs de réduction, et d'autre part la grande propriété des ensembles semi-polaires qui se trouve originellement chez R.M. Hervé [8] et dont nous donnons ici une version un peu plus forte.

Dans un deuxième chapitre, nous signalons les généralisations possibles, et nous obtenons sans affaiblissement les mêmes énoncés en théorie des résolvantes de Ray ou en théorie des surmartingales.

I.

Nous nous donnons dans tout ce chapitre un espace localement compact X à base dénombrable, V un noyau de Hunt, et $\theta \neq 0$ une mesure positive, bornée et d'ailleurs arbitraire. Dans tout ce travail, θ ne varie pas: c'est la mesure de référence.

Si φ est continue à support compact, on posera $\gamma(\varphi)=\int R(|\varphi|)\,d\theta$ où $R\varphi$ est la «réduite excessive» de φ, c'est à dire la plus petite fonction excessive majorant φ. Elle existe, est continue et tend vers o à l'infini. Cela permet de définir le complété fonctionnel $\mathscr{L}^1(\gamma)$ de $\mathscr{K}(X)$, et son séparé associé $\mathbb{L}^1(\gamma)$ (cf. [5]).

0044-3719/81/0058/0183/$03.20

$V(\mathscr{K}(X)) \subset \mathscr{L}^1(\gamma)$. Si φ est s.c.s. $\geqq 0$ à support compact, on écrit que $\varphi_0 - \varphi = \sum_{n \geqq 0} (\varphi_n - \varphi_{n+1})$ où les φ_n forment une suite décroissante de fonctions continues à support compact, on a donc

$$\gamma[V\varphi_k - V\varphi] \leqq \sum_{n \geqq k} \int V(\varphi_n - \varphi_{n+1})\, d\theta = \int (V\varphi_k - V\varphi)\, d\theta$$

d'où il suit que $V\varphi$ appartient à $\mathscr{L}^1(\gamma)$ et $\gamma(V\varphi) = \int V\varphi\, d\theta$. Si maintenant f est borélienne $\geqq 0$, on écrit $f = \sum_{n \geqq 0} \varphi_n$ θV-p.p. où les φ_n sont $\geqq 0$, bornées à support compact et s.c.s. d'après le théorème de Lusin (noter que θV est une mesure de Radon). On en déduit $\gamma\left(Vf - \sum_{n=0}^{k} V\varphi_n\right) \leqq \sum_{n>k} \int V\varphi_n\, d\theta$: Vf est dans $\mathscr{L}^1(\gamma)$ dès que Vf est θ-intégrable. Alors en général, toute fonction excessive est quasi-s.c.i., et $\gamma(u) = \theta(u)$. De la même manière, on voit que les noyaux résolvants λV_λ laissent $\mathscr{L}^1(\gamma)$ invariant et sont des contractions de $\mathbb{L}^1(\gamma)$. La continuité forte de la résolvante a lieu dans $\mathbb{L}^1(\gamma)$, car elle a lieu dans $\mathscr{C}_0(X)$ dont l'image dans $\mathbb{L}^1(\gamma)$ est un sous-espace partout dense avec une topologie plus fine.

Si μ et ν sont deux mesures positives, la relation du balayage est la relation «$\mu(u) \leqq \nu(u)$ pour toute excessive u». Le dual topologique $\mathscr{M}^\infty$ de $\mathbb{L}^1(\gamma)$ est représentable par l'ensemble des différences de mesures positives dont chacune est balayée d'un multiple de θ. (Cf. [5–7] pour les propriétés de $\mathscr{L}^1(\gamma)$ qui seront d'ailleurs rappelées an fur et à mesure des besoins.) Il résulte des travaux de Mokobodzki que $\mathscr{M}^\infty$ muni de ses deux relations d'ordre est un cône de potentiels (cf. [13]). A noter que si μ et ν sont positives en ordre naturel, leur borne inférieure en balayage est une mesure positive en ordre naturel.

Considérons maintenant le cône Z des formes linéaires sur $\mathscr{M}^\infty$ qui sont croissantes pour le balayage: $F \in Z$ si $F(\mu) \leqq F(\nu)$ pour $\mu \prec \nu$. F sera dite «surmédiane». Une telle F est aussi croissante en ordre naturel. On définit alors sur Z deux relations d'ordre: l'ordre naturel et l'ordre spécifique qui sont respectivement duals de l'ordre naturel et de l'ordre du balayage des mesures. Toujours d'après [13] Z est un cône de potentiels. A noter que cette fois le phénomène s'inverse: si F et G sont dans Z, leur borne inférieure naturelle appartient à Z, i.e. est positive en ordre spécifique.

Par ailleurs, une forme linéaire ϕ sur $\mathscr{M}^\infty$, positive en ordre naturel (mais non nécessairement dans $Z - Z$) sera dite une «fonctionnelle» si l'on a la relation:

$$\phi\Big(\sum_{n \geqq 0} \mu_n\Big) = \sum_{n \geqq 0} \phi(\mu_n)$$

pour toute série à termes positifs de somme $\sum_{n \geqq 0} \mu_n \in \mathscr{M}^\infty$. Le cône des fonctionnelles est, suivant la terminologie de Bourbaki [1] une «bande» dans le cône des formes linéaires $\geqq 0$ sur $\mathscr{M}^\infty$. (Notons provisoirement Y ce cône: cela signifie que Y est un sous-cône héréditaire dans le cône des formes linéaires positives, et qu'il est stable par passage croissant à la borne supérieure.)

Dans tout ce travail, le cône qui nous intéressera est l'intersection de ces deux cônes Y et Z: c'est le cône des «fonctionnelles surmédianes»; on le notera

S. On voit aussitôt qu'il hérite les deux structures de Y et Z. Comme l'ordre spécifique de Z est plus fort que son ordre naturel (qui coïncide avec celui de Y), on voit notamment que S est une «bande spécifique» dans Z. Résumons donc les propriétés dont nous aurons besoin:

– F est une fonctionnelle surmédiane si F est une forme linéaire sur $\mathcal{M}^\infty$, croissante pour le balayage et vérifiant de plus:

$$F(\sum_{n\geqq 0}\mu_n)=\sum_{n\geqq 0}F(\mu_n)$$

pour toute série à termes positifs de somme $\sum_{n\geqq 0}\mu_n\in\mathcal{M}^\infty$: c'est la définition, S est le cône de ces fonctionnelles surmédianes.

– si F et G sont deux fontionnelles surmédianes, leur borne inférieure naturelle est définie par:

$$\operatorname{Inf}(F,G)(\mu)=\operatorname{Inf}\left\{F(\xi)+G(\eta)\Big/\begin{matrix}0\leqq\xi\\ 0\leqq\eta\end{matrix},\ \mu=\xi+\eta\right\}\text{ pour }\mu\geqq 0,$$

et c'est une fonctionnelle surmédiane,

– S est complètement réticulé en ordre naturel et en ordre spécifique (noté $\prec$).

– S a les deux propriétés de décomposition de Riesz (cf. [1] et [13]).

– Si ϕ est une fonctionnelle (non nécessairement surmédiane) mais naturellement majorée par un élément de S, on définit la «réduite surmédiane» de ϕ par:

$$R\phi=\operatorname{Min}\{F\in S/F\geqq\phi\}$$

et l'on a d'après [13] (S est un cône de potentiels)

$$R\phi(\mu)=\operatorname{Sup}\{\phi(\nu)/0\leqq\nu\text{ et }\nu\prec\mu\}.$$

– S est un cône de potentiels, i.e. $R(\phi)\prec R(\phi+F)$ pour ϕ une fonctionnelle majorée par S, et F un élément de S.

On définit notamment, si B est borélien ou quasi-borélien $R_F^B=R(1_B\cdot F)$: c'est la «réduite de F sur B». Si $F\in S$ et si $\mu\in\mathcal{M}_+^\infty$ est concentrée sur B, on a $F(\mu)=R_F^B(\mu)$, et l'on dit que «F et R_F^B coïncident sur B». De plus, on a pour $\mu\in\mathcal{M}_+^\infty$:

$$R_F^B(\mu)=\operatorname{Sup}\{F(1_B\cdot\nu)/\nu\geqq 0,\ \nu\prec\mu\}.$$

Si l'on décompose alors ν en une somme de mesures portées par des compacts inclus dans B, on voit aussitôt que l'on a du fait que F est une fonctionnelle:

$$R_F^B(\mu)=\operatorname{Sup}\{F(1_K\cdot\nu)/0\leqq\nu,\ \nu\prec\mu\}$$

soit:

$$R_F^B=\operatorname{Sup}\{R_F^K/K\text{ compact inclus dans }B\}.$$

Nous verrons plus loin (théorème 9°) que l'on peut même trouver une suite croissante K_n incluse dans B et réalisant la borne supérieure.

Si u est une fonction excessive ou quasi-excessive, il est clair que $F(\mu)=\mu(u)$ est une fonctionnelle surmédiane dès que u est θ-intégrable. Nous disons alors que F est «représentable» par u: u est bien définie à un ensemble polaire près (théorème de capacitabilité de Choquet). Plus généralement, nous dirons que F est «représentable» s'il existe une fonction borélienne $f \geqq 0$ telle que

$$F(\mu)=\int f d\mu$$

pour toute $\mu \in \mathscr{M}_+^\infty$. La fonction f est dite γ-fortement surmédiane, ou encore θ-fortement surmédiane.

Nous dirons aussi que F est représentable sur un ensemble quasi-borélien B si la relation ci-dessus a lieu pour toute mesure concentrée sur B.

Nous pouvons maintenant énoncer notre théorème fondamental, sa démonstration exigera encore quelques constructions.

1°. Théorème. *Toute fonctionnelle surmédiane est représentable (par une fonction).*

Il faut remarquer que c'est une généralisation potentialiste du théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym (prendre le noyau de Hunt $Vf=f$, auquel cas les fonctionnelles surmédianes sont exactement les mesures bornées absolument continues par rapport à θ).

II. Régularisation excessive des fonctionnelles surmédianes

Si F est une fonctionnelle surmédiane, et si $\mu \in \mathscr{M}_+^\infty$, la mesure $\mu \circ t V_t$ est une balayée de μ, donc $F(\mu \circ t V_t) \leqq F(\mu)$, et la fonction $t \rightsquigarrow F(\mu \circ t V_t)$ est croissante. Posons donc:

$$\hat{F}(\mu)=\operatorname*{Sup}_t F(\mu \circ t V_t).$$

On vérifie immédiatement que $\hat{F}$ est une fonctionnelle surmédiane majorée par F.

2°. Proposition. *$\hat{F}$ est représentable par une fonction quasi-excessive.*

Démonstration. θV est une mesure excessive: les noyaux $t V_t$ laissent donc $\mathscr{L}^1(\theta V)$ invariant. Comme F est une fonctionnelle, il existe (théorème de Lebesgue-Nikodym) une fonction g borélienne $\geqq 0$ telle que $F(\xi)=\xi(g)$ pour toute ξ absolument continue par rapport à θV. Si $\mu \in \mathscr{M}_+^\infty$, $\mu \circ t V_t$ est absolument continue par rapport à θV, donc

$$F(\mu \circ t V_t)=\int g d(\mu \circ t V_t)=\int t V_t g d\mu$$

pour toute μ, et l'on en déduit que $t \rightsquigarrow t V_t g$ est croissante quasi-partout. Soit h la borne supérieure des $n V_n g$: ona $h=g$ θV-presque partout, donc aussi $h=\sup_n n V_n h$ quasi-partout: ainsi h est quasi-excessive. On a enfin $\hat{F}(\mu)=\int h d\mu$ pour toute $\mu \in \mathscr{M}_+^\infty$.

Désormais, la notation $\hat{F}$ désignera la fonction excessive correspondante, ou plutôt sa classe modulo l'égalité quasi-partout.

Rappelons (cf. [9]) qu'une mesure $\mu \in \mathscr{M}_+^\infty$ est dite «régulière» si la mesure $\mu \circ t V_t$ converge quand t tend vers $+\infty$ vers μ uniformément sur tout ensemble de fonctions quasi-excessives dominé par une fonction de la forme Vf ($f \geqq 0$, et Vf bornée). Nous avons alors:

3°. Proposition. *on a* $F(\mu) = \int \hat{F}\, d\mu$ *pour toute mesure* μ *régulière.*

Démonstration. considérons la réduite en balagage de la mesure $\mu - \mu \circ t V_t$ (cf. [13]) définie par $R(\mu - \mu \circ t V_t)(Vf) = \operatorname{Sup}\{\mu(Vg) - \mu \circ t V_t Vg / g \geqq 0,\ Vg \leqq Vf\}$. Notre hypothèse de régularité signifie que $R(\mu - \mu \circ t V_t)$ tend vers o en topologie $\sigma(\mathscr{M}^\infty, \mathbb{L}^1(\gamma))$. Donc si F est majorée par Vf:

$$F(\mu - \mu \circ t V_t) \leqq F(R(\mu - \mu \circ t V_t)) \leqq R(\mu - \mu \circ t V_t)(Vf).$$

En ce cas on a $F(\mu) \leqq \overline{\operatorname{Lim}}_{t \to \infty} F(\mu \circ t V_t) \leqq \int \hat{F}\, d\mu \leqq F(\mu)$. Si F n'est pas majorée par une Vf, on écrit $F_n = \operatorname{Inf}(F, nVf)$, d'où $F_n(\mu) = \int \hat{F}_n\, d\mu$ et $(n \nearrow +\infty)$: $F(\mu) = \int \hat{F}\, d\mu$. On a en effet $F(\mu) = \operatorname{Sup}_n F_n(\mu)$ pour toute μ car F est une fonctionnelle (donc représentable séparément dans chaque $\mathbb{L}^1(\mu)$).

III. Propriétés régularisantes des noyaux P_K

Soit C le cône des u quasi-excessives appartenant à $\mathscr{L}^1(\gamma)$. Si K est fermé (ou plus généralement quasi-fermé) dans X, on définit $P_K u = \operatorname{EssInf}\{v \in C / v \geqq u \text{ sur } K\}$, ce qui a un sens (cf. [5]) et l'on sait que P_K est prolongeable (de manière unique) en quasi-noyau[1]. Si ϕ est une fonctionnelle (non nécessairement surmédiane) on pose $P_K \phi(\mu) = \phi(\mu P_K)$: comme P_K est un quasi-noyau, on voit que $P_K \phi$ est une fonctionnelle. Si F est une fonctionnelle surmédiane, $P_K F$ l'est aussi car $\mu \prec \nu$ implique $\mu P_K \prec \nu P_K$.

4°. Lemme. *On a* $P_K F = R_F^K$ *pour toute* $F \in S$.

On *a* en effet $P_K F(\mu) = F(\mu)$ pour toute μ concentrée sur K puisqu'alors $\mu P_K = \mu$. Donc $P_K F \geqq R_F^K$. Or, si $G \in S$ et majore F sur K, on a $G(\mu) \geqq G(\mu P_K) \geqq F(\mu P_K)$ pour toute $\mu \in \mathscr{M}_+^\infty$, soit $G \geqq P_K F$.

5°. Proposition. *On a* $P_K F = \widehat{P_K F}$ *en dehors de* K. *De plus, si* F *est majorée par un* $p \in C$, *alors* $P_K F$ *est quasi-continue sur* $X \setminus K$.

Démonstration. considérons le quasi-noyau $Wf = Vf - P_K Vf$: il a les propriétés suivantes:
- il vérifie le principe complet du maximum,
- il est subordonné à V,
- si φ est quasi-borélienne $\geqq 0$, $P_K \varphi$ est W-surmédiane.

Supposons en effet qu'une fonction de la forme $a + Vf + Wg + P_K \varphi$ (a constante $\geqq 0$) majore Wh quasi-partout sur l'ensemble $(h > 0)$. On peut supposer que h est s.c.s. $\geqq 0$ et que $(h > 0)$ est un compact H. Cela s'écrit: $a + Vf + Vg + Vh + P_K \varphi \geqq P_K(Vg + Vh)$ q.p. sur H.

Or la même relation a lieu sur K car $\varphi \geqq 0$. On peut alors appliquer aux deux membres l'opérateur $P_{K \cup H}$, et l'on obtient en tenant compte du fait que $P_{K \cup H} P_K = P_K$: $a + Vf + Vg + Vh + P_K \varphi = P_K(Vg + Vh)$ q.p., ce qui démontre les trois propriétés annoncées.

[1] Comme V est ici un noyau de Hunt, il est classique que P_K est définissable en noyau

Soit alors (W_t) la famille résolvante associée à W: elle existe d'après [16]. On a pour tout t: $W_t \leqq V_t$: on veut en effet voir que pour $f \geqq 0$, $V_t f$ majore $W_t f$; cela s'écrit aussi $P_K V_t f \geqq t W(V_t f - W_t f)$ q.p. Or, il suffit de le vérifier sur l'ensemble $(V_t f > W_t f)$ puisque nous avons vu que $P_K V_t f$ était W-surmédiane: c'est justement l'hypothèse.

On en déduit que pour toute mesure $\mu \in \mathscr{M}_+^\infty$, $\mu \circ t W_t P_K$ est majorée en ordre naturel par μP_K. Si ϕ est une fonctionnelle on a donc $t W_t P_K \phi \leqq P_K \phi$.

Maintenant, soient p et q deux éléments de C tels que $q \leqq p$ et $K = (p = q)$ (cf. [5], p. 96). La fonction $p \wedge (q + Wf)$ pour $f \geqq 0$ est V-surmédiane: on le vérifie sans difficulté comme plus haut en tenant compte de ce que cette fonction vaut p q.p. sur K.

Si u est quasi-V-excessive, elle est quasi-W-surmédiane: soit $\tilde{u}$ sa régularisée quasi-W-excessive: $p \wedge (q + \tilde{u})$ est quasi-V-surmédiane. Mais $p \wedge (q + u)$ est quasi-V-excessive, de plus u et $\tilde{u}$ coïncident W-p.p. (i.e. $W(u - \tilde{u}) = 0$ q.p.) donc V-p.p. sur $X \setminus K$. Comme $p \wedge (q + u)$ et $p \wedge (q + \tilde{u})$ coïncident aussi q.p. sur K, elles coïncident finalement V-p.p. sur X: elles sont donc égales q.p. sur X car celle qui est quasi-V-excessive majore par hypothèse celle qui est quasi-V-surmédiane. On obtient donc $u = \tilde{u}$ q.p. sur l'ensemble $(p - q > u)$. En remplaçant alors le couple (p, q) par le couple (np, nq) et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $u = \tilde{u}$ q.p. sur $X \setminus K$. Par suite la régularisée W-excessive de u est exactement $1_{X \setminus K} u$.

Si ϕ est une fonctionnelle majorée par $Vf (f > 0)$ et $\int Vf \, d\theta$ fini, on a $Vf = Wf + P_K(Vf - \phi) + P_K \phi$.

Comme on l'a vu, les trois termes de droite sont des fonctionnelles W-surmédianes et ont comme au n° II des régularisées W-excessive qui sont d'ailleurs des fonctions quasi-s.c.i. Désignons par $\sim$ la régularisation W-excessive:

$$1_{X \setminus K} Vf = \widetilde{Vf} = Wf + \widetilde{P_K(Vf - \phi)} + \widetilde{P_K \phi}$$

et par suite, $P_K \phi$ et $\widetilde{P_K \phi}$ coïncident sur $X \setminus K$ et y sont quasi-continues. Si ϕ est une fonctionnelle non majorée, on trouve que $P_K \phi$ et $\widetilde{P_K \phi}$ coïncident sur $X \setminus K$ mais n'y sont que quasi-s.c.i.

Supposons que F soit une fonctionnelle surmédiane: donc $P_K F$ et $\widetilde{P_K F}$ coïncident sur $X \setminus K$. Comme on a aussi:

$$t W_t P_K F \leqq t V_t P_K F \leqq \widehat{P_K F} \leqq P_K F,$$

on voit que $P_K F$, $\widetilde{P_K F}$ et $\widehat{P_K F}$ coïncident toute trois sur $X \setminus K$ et y sont évidemment quasi-s.c.i., ce qui achève la démonstration de la proposition.

Remarque. Si K est compact ainsi que H disjoint de K, nous avons incidemment montré que P_K considéré comme opérateur de $\mathscr{C}(K)$ dans $\mathbb{L}^1(\gamma, H)$ (espace des restrictions à H: cf. [6]) est un opérateur faiblement compact.

6°. Corollaire. *Si B est quasi-borélien, et $F \in S$, alors R_F^B et $\widehat{R_F^B}$ coïncident sur $X \setminus B$.*

Cela résulte en effet de ce que $R_F^B = \operatorname{Sup}\{R_F^K/K \text{ compact} \subset B\}$, ainsi qu' on l'a dit plus haut.

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, ce corollaire est l'une des clés de ce travail, et c'était le but du n° III.

IV. Sur les ensembles semi-polaires

Si E est quasi-borélien, nous disons que E est «θ-fortement mince» si la capacité $\operatorname{Inf}\{\int R_1^G\, d\theta/G \text{ ouvert} \supset A\} = \gamma(A)$ y est fortement dominée par une mesure, c'est à dire (cf. [15]): il existe une mesure $\mu \geqq 0$ telle que si une suite A_n incluse dans E vérifie $\operatorname{Lim} \mu(A_n) = 0$ alors aussi $\operatorname{Lim} \gamma(A_n) = 0$.

Il suffit d'après les théorèmes 3° et [6] que E vérifie la propriété suivante: pour toute suite A_n de quasi-boréliens inclus dans E, décroissante et d'intersection polaire, la capacité $\gamma(A_n)$ tend vers 0.

Disons enfin qu'un ensemble E est «uniformément effilé» si l'on a:

$$\widehat{R_1^E} \leqq k \qquad \text{q.p. sur } E \text{ où } k \text{ est une constante} < 1.$$

On peut remarquer que la fonctionnelle surmédiane R_1^E est représentable puisqu'elle vaut 1 sur E et $\widehat{R_1^E}$ en dehors de E. Alors:

7°. Théorème. *Tout ensemble uniformément effilé est θ-fortement mince* (*cf.* aussi la remarque qui suit le théorème 12° ci-dessous).

Démonstration. Remarquons d'abord que le cône C_σ des (classes de) fonctions quasi-excessives est une bande spécifique dans S (cela anticipe sur l'étude de la décomposition de Mertens). En effet, si $F = \hat{F} = G + H$, on a aussi $F = \hat{F} = \hat{G} + \hat{H}$, donc $G = \hat{G}$ et $H = \hat{H}$, de plus si des F_i vont en croissant spécifiquement, et vérifient $F_i = \hat{F}_i$, soit F leur borne supérieure (spécifique ou naturelle, et supposée dans S); il existe une suite i_n croissante pour laquelle $F(\theta) = \operatorname{Sup} F_{i_n}(\theta)$, donc (en prenant $F_{i_0} = 0$):

$F(\theta) = \sum (F_{i_{n+1}} - F_{i_n})(\theta)$ et aussi la même relation en remplaçant θ par une μ balayée de θ. On a donc $F = \sum (F_{i_{n+1}} - F_{i_n})$, d'où l'on déduit $F = \hat{F}$.

Si E est notre ensemble uniformément effilé, soit $R_1^E = w + q$ sa décomposition où w appartient à C_σ et q étrangère à C_σ. On remarque que la fonctionnelle q est représentable (par la fonction $R_1^E - w$). On a $q = R_q^E$ car la réduction est additive sur S, puis $q = \hat{q}$ hors de E par le corollaire 6°. Comme $w = \hat{w}$, on a

$$R_1^E - \hat{R}_1^E = q - \hat{q}.$$

Soit A inclus dans E. On a $q \prec R_q^A + R_q^{E \setminus A}$ car S est un cône de potentiels, et même $q \prec q \curlywedge R_q^A + q \curlywedge R_q^{E \setminus A}$ car S est spécifiquement réticulé ($\curlywedge$ est le symbole de la borne inférieure spécifique. Il existe alors u et $v \in S$ tels que $q = u + v$, $u \prec q \curlywedge R_q^A$ et $v \prec q \curlywedge R_q^{E \setminus A}$. On a $v = \hat{v}$ sur A (corollaire 6°), et $u = \hat{u}$ sur $X \setminus A$, donc:

$$1_A \cdot (R_1^E - \hat{R}_1^E) = 1_A (q - \hat{q}) = u - \hat{u}.$$

Cela prouve en passant que u est représentable.

Alors la réduite $R(1_A(R_1^E-\hat{R}_1^E))=R(u-\hat{u})$ est spécifiquement majorée par u, puis par $q\curlywedge R_q^A$, et elle majore naturellement $(1-k)R_1^A$. On a finalement:

$$(1-k)R_1^A \leqq q\curlywedge R_q^A.$$

D'autre part, on vérifie immédiatement que $q\curlywedge R_q^A$ est en ordre spécifique la plus grande minorante de q valant sa propre réduite sur A (autoréduite sur A), donc si A_n est une suite décroissante, la suite $p_n=q\curlywedge R_q^{A_n}$ décroît spécifiquement vers une fonctionnelle surmédiane p vérifiant $p=R_p^{A_n}$ pour tout n. Si de plus l'intersection $\bigcap_n A_n$ est polaire, on a $p=\hat{p}$ sur X; mais $p\prec q$ est étrangère à C_σ, donc $p=0$. Ainsi $R_1^{A_n}$ tend vers 0. Or, on a d'après Choquet:

$$\gamma(A_n)=\operatorname{Sup}\{\gamma(K)/K \text{ compact}\subset A_n\}=\operatorname{Sup}\{R_1^K(\theta)/K \text{ compact}\subset A_n\}$$

soit $\gamma(A_n)=R_1^{A_n}(\theta)$, et $\gamma(A_n)$ tend vers 0. c.q.f.d.

8°. Corollaire. *Toute fonctionnelle fortement surmédiane F est représentable sur tout ensemble semi-polaire.*

En effet, un semi-polaire est union dénombrable d'ensembles uniformément effilés donc fortement minces. Il existe alors une mesure μ concentrée sur E et ne négligeant dans E que les sous ensembles polaires: toute mesure ν concentrée sur E est donc absolument continue par rapport à μ. Soit g une fonction borélienne $\geqq 0$ sur E et telle que $F(\nu)=\nu(g)$ pour toute ν sur E: g existe par le théorème de Lebesgue-Nikodym, donc F est représentable sur E.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème I°.

V. Démonstration du théorème I°

Nous montrerons que le sous-cône S_0 des $F\in S$ qui sont représentables est une bande spécifique dans S, puis nous montrerons que tout élément étranger à cette bande est nul: le théorème sera démontré.

Montrons donc que S_0 est une bande. Si $F=G+H$ et F est représentable par une fonction f, on vérifie sans peine, et de manière classique que l'ensemble $E=\{f\neq\hat{F}\}$ est semi-polaire (les ensembles $E_s^t=(f\geqq t>s\geqq\hat{F})$ sont uniformément effilés), et l'on a $f=\hat{F}$ q.p. sur $X\setminus E$. On a donc $G=\hat{G}$ et $H=\hat{H}$ sur $X\setminus E$: G et H sont représentables sur $X\setminus E$. Le corollaire 8° nous dit que G et H sont représentables sur E aussi: Donc G et H sont dans S_0. Si maintenant des F_i dans S_0 vont en croissant spécifiquement vers un $F\in S$, on remplace comme dans la démonstration du théorème 7° l'ensemble des F_i par une suite F_{i_n} spécifiquement croissante, avec $F=\sum_n(F_{i_{n+1}}-F_{i_n})$: on en déduit immédiatement que F est représentable.

Soit maintenant $F\in S$ et F étrangère à S_0: on a bien sûr $F\neq\hat{F}$, et il existe une mesure $\mu\in\mathscr{M}_+^\infty$ telle que $F(\mu)\neq\mu(\hat{F})$: la mesure μ n'est pas régulière (proposition 3°). On sait par ailleurs (cf. [9]) qu'une mesure ν est régulière si et seulement si elle néglige tous les ensembles semi-polaires: la mesure μ a donc une partie concentrée sur un ensemble semi-polaire E. Considérons $F\curlywedge R_F^E$: elle est autoréduite sur E et vaut hors de E sa régularisés quasi-excessive, mais E est semi-polaire: elle est donc représentable aussi sur E, puis sur X. Comme F est étrangère à S_0, sa minorante représentable $F \curlywedge R_F^E$ est nulle. Or, on a toujours $F \prec F \curlywedge R_F^E + F \curlywedge R_F^{X\setminus E}$, et par suite $F = R_F^{X\setminus E}$ puisque le premier terme du second membre est nul. Cela entraîne que F et $\hat{F}$ coïncident sur E, contrairement à l'hypothèse $F(\mu) \neq \mu(\hat{F})$. Ainsi S_0 n'a pas d'élément étranger non nul. c.q.f.d.

Désormais, nous parlerons donc de fonctions «fortement surmédianes» (relativement à θ), ce qui est la terminologie consacrée, et nous pourrons utiliser les notations $\mu(f)$, $f(\mu)$, $F(\mu)$, ou encore $\mu(F)$, avec une préférence pour $\mu(f)$. Rappelons encore une fois que, d'après le théorème de capacitabilité de Choquet, c'est la classe de f modulo l'égalité quasi-partout qui est uniquement déterminée par F. Noter que f est θ-intégrable.

VI. Familles monotones

9°. Théorème. *Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille filtrante croissante en ordre naturel de fonctions fortement surmédianes, et bornée dans $\mathbb{L}^1(\theta)$. Alors f_i converge en topologie $\sigma(S, \mathcal{M}^\infty)$ vers une fonction f fortement surmédiane, et il existe un ensemble dénombrable $J \subset I$ pour lequel on a $f = \operatorname{Sup}_{j \in J} f_j$ q.p. On a de plus $f \geqq f_i$ q.p. pour tout $i \in I$.*

On pourra donc noter $f = \operatorname{EssSup}_I f_i$.

Enoncé analogue pour les ensembles filtrants décroissants.

Démonstration. Posons $F(\mu) = \operatorname{Lim}_I \mu(f_i)$, qui existe et est finie.

Comme on a $F(\mu) = \operatorname{Sup}_i \mu(f_i)$, on voit aussitôt que F est une fonctionnelle surmédiane: soit f l'un de ses représentants: on a $f \geqq f_i$ q.p. pour tout i d'après le théorème de capacitabilité de Choquet. Soit $\mu \in \mathcal{M}_+^\infty$ une mesure associée à l'ensemble semi-polaire $E = \{f \neq \hat{f}\}$. Il existe une suite croissante i_n pour laquelle f_{i_n} converge vers f dans l'espace $\mathbb{L}^1(\mu + \theta V)$. Posons $g = \operatorname{Sup}_n f_{i_n}$: on a $g = f$ θV-p.p. donc $\hat{g} = \hat{f}$ q.p., d'où $\hat{f} \leqq g \leqq f$ q.p. Mais $g = f$ μ-p.p. donc q.p. sur E, et finalement $g = f$ q.p. sur X.

Si la famille est décroissante, F est une fonctionelle car elle est dominée par l'une quelconque des f_i, et $f \leqq f_i$ q.p. comme cidessus. Posons maintenent $g = \operatorname{Inf}_n f_{i_n}$: on a cette fois $\hat{g} = \hat{f} \leqq f \leqq g$ q.p., ce n'est pas suffisant pour conclure, mais soit v une mesure singulière associée au semi-polaire $\{g \neq \hat{g}\}$: il existe une deuxième suite j_n décroissante extraite de I, pour laquelle $j_n \leqq i_n$ et telle que f_{j_n} converge vers f dans $\mathscr{L}^1(\mu + v + \theta V)$. Soit $h = \operatorname{Inf}_n f_{j_n}$: on a $\hat{h} = \hat{g} = \hat{f} \leqq f \leqq h \leqq g$, et $h = f$ v-p.p. donc q.p. sur $(g \neq \hat{g})$, et finalement $h = f$ q.p.

VII. Critère de compacité

Mokobodzki a démontré [14] que les segments naturels $[0, f]$ de S sont compacts en topologie $\sigma(S, \mathcal{M}^\infty)$, ce qui est ici évident, et il a montré une propriété d'extraction pour les suites dominées en généralisant le théorème de Helly relatif à la convergence des suites de fonctions décroissantes. Cela suggère aussi une autre généralisation, englobant le cas des segments de S, et du type critère de compacité de Dunford-Pettis.

10°. Théorème. *Si $A \subset S$, les conditions* a), b), c) *sont équivalentes:*

a) *A est relativement compact dans S,*
b) *A est uniformément intégrable pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_+^\infty$,*
c) *de toute suite $f_n \in A$, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. c)$\Rightarrow$b): on applique le critère usuel de Dunford-Pettis pour chaque mesure $\mu \in \mathcal{M}_+^\infty$.

b)$\Rightarrow$a): fixons μ et appliquons le critère de Dunford-Pettis: A est relativement compact dans $\mathbb{L}^1(\mu)$. Soit (f_i) une famille ultrafiltrée extraite de A, sa limite existe dans $\mathbb{L}^1(\mu)$ affaibli: notons la g_μ et posons plus généralement $F(\mu) = \int g_\mu \, d\mu$: il est clair que F est une fonctionelle surmédiane, et que F est limite des f_i en topologie $\sigma(S, \mathcal{M}^\infty)$.

a)$\Rightarrow$c): Soit f_n une suite relativement compacte. On voit aussitôt que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est inductif en ordre naturel. Soit donc h une valeur d'adhérence maximale: l'ensemble $E = \{h \neq \hat{h}\}$ est semi-polaire, soit μ une mesure $\in \mathcal{M}_+^\infty$ qui n'y néglige que les polaires. Or f_n est relativement compacte dans $\mathbb{L}^1(\mu + \theta V_t)$ affaibli et il existe une suite extraite f'_n qui y converge vers h. Soit h' une valeur d'adhérence de la suite f'_n dans S. On a $h' = h$ $(\mu + \theta V)$-presque partout, donc $h' \geqq \hat{h}$, et $h' = h$ q.p. sur $\{h \neq \hat{h}\}$, d'où $h' \geqq h$ q.p. Mais h est maximale, donc $h' = h$, et $h = \operatorname{Lim}_n f'_n$ puisque f'_n est relativement compacte.

VIII. Le cône C_δ et la décomposition de Mertens

Une fonction sera dite C-majorée si elle est majorée par un élément de C. On note alors C_δ le cône des f qui sont fortement surmédianes, quasi-s.c.s., et C-majorées. Il est équivalent de dire que f est borne inférieure d'une suite f_n décroissante d'éléments de C.

Lemme. *Le cône C_δ est stable par sommations (la somme étant supposée dans S).*

En effet, soit $u = \sum_n u_n$ avec $u_n \in C_\delta$, et $\theta(u) < \infty$, posons $\bar{u} = \operatorname{EssInf}\{v \in C / v \geqq u\}$. Soit $\mu \in \mathcal{M}_+^\infty$, et soit $\varepsilon > 0$, il existe une suite $v_n \in C$, $v_n \geqq u_n$ et $(\theta + \mu)(v_n) \leqq (\theta + \mu)(u_n) + \varepsilon 2^{-n}$. Alors $v = \sum v_n$ appartient à C car $\theta(v) < \infty$ et la série $\sum v_n$ converge normalement, de plus $v \geqq u$, donc $v \geqq \bar{u}$; enfin, on a $\mu(u) \leqq \mu(v) \leqq \mu(u) + \varepsilon$. Comme μ et ε sont arbitraires, on a $\bar{u} = u$ q.p. par le théorème de capacitabilité de Choquet, donc $u \in C_\delta$.

Lemme. *Si u est C-majorée, et $u = R_u^H = R_u^K$ où H et K sont deux quasi-fermés disjoints, u est nulle.*

Considérons en effet la suite de quasi-noyaux définie par $Q_0 = \mathrm{Id}$, $Q_{2n+1} = P_H Q_{2n}$, $Q_{2n+2} = P_K Q_{2n+1}$; si $p \in C$, la suite $Q_n p$ converge en décroissant, on en déduit que la mesure θQ_n converge faiblement vers une mesure μ vérifiant $\mu = \mu P_H = \mu P_K$, donc $\mu = 0$, car H et K sont disjoints. Par suite, $\operatorname{Lim} Q_n p = 0$. Or, on a par récurrence $u \leqq Q_n p$ pour un p convenable, donc $u = 0$.

11°. Proposition. *Soit $f \in S$. Alors $f \in C_\delta$ si et seulement s'il existe un quasi-noyau S^f tel que $S^f(H) = f \curlywedge R_f^H$ (borne inférieure spécifique) pour tout quasi-fermé H.*

Démonstration. Si $f \in C_\delta$, et si H_n est une suite décroissante de quasi-fermés et $H = \bigcap_n H_n$, $R_f^H n$ tend vers R_f^H, car tous les termes considérés sont dans C_δ: $\mu(\operatorname{Inf} R_f^H n) = \sup_{\nu \prec \mu} \operatorname{Inf}_n \nu(1_{H_n} f) = \sup_{\nu \prec \mu} \nu(1_H f) = \mu(R_f^H)$. Fixons maintenant $\mu \in \mathscr{M}_+^\infty$; et posons $\tilde{\mu}(K) = \mu(f \curlywedge R_f^K)$: $\tilde{\mu}$ est sous-additive, $\tilde{\mu}(X) = \mu(f)$; si H et K sont deux quasi-fermés disjoints, $f \curlywedge R_f^H$ et $f \curlywedge R_f^K$ sont étrangères d'après le lemme: soit g leur somme, on a $g \prec f$, et $g = R_g^{H \cup K}$, donc $g \prec f \curlywedge R_f^{H \cup K}$, et $\tilde{\mu}$ est additive sur les quasi-fermés disjoints. Soit H un quasi-fermé: la propriété de passage à la limite sur les suites décroissantes entraîne pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un quasi-fermé K tel que $H \subset \mathring{K}$ (quasi interieur) et $\tilde{\mu}(K) \leqq \tilde{\mu}(H) + \varepsilon$. En définitive, l'application $H \rightsquigarrow \tilde{\mu}(H)$ est la restriction d'une mesure *intérieure* de Carathéodory rendant les quasi-fermés, puis les quasi-boréliens intégrables, et les polaires négligeables. Notons la encore $\tilde{\mu}$.

Si E est quasi-borélien, l'application $\mu \rightsquigarrow \tilde{\mu}(E)$ est une fonctionnelle surmédiane majorée par f. Elle est donc de la forme $\tilde{\mu}(E) = \int S^f(E)\, d\mu$ où $S^f(E)$ est fortement surmédiane. $E \rightsquigarrow S^f(E)$ est évidemment un quasi-noyau, uniquement déterminé par sa restriction aux quasi-fermés.

Réciproquement, considérons la mesure θS^f: elle néglige les polaires; il existe donc une suite de quasi-compacts K_n disjoints sur chacun desquels f est quasi-continue et majorée par un élément de C, et telle que $X = \bigcup_n K_n$ θS^f-presque partout. Soit $f_n = S^f(K_n) = f \curlywedge R_f^K n$. Pour $m \neq n$, $f_n = \hat{f}_n$ q.p. sur K_m (proposition 5°), et $f = \sum f_n$ est quasi-continue, donc f_m est quasi-s.c.s. sur K_m. On en déduit que $f_m = R_{f_m}^{K_m}$ appartient à C_δ. Il en est de même de f d'après le premier lemme.

La théorème suivant est lié à la décomposition de Mertens [10, 11]

12°. Théorème. *C_δ est une bande spécifique dans S, et l'on a:*

$$S = C_\sigma + C_\delta, \qquad C = C_\sigma \cap C_\delta.$$

Démonstration. Soit u une minorante spécifique de $f \in C_\delta$. La suite K_n de la démonstration précédente peut être choisie de sorte que u aussi soit quasi-continue sur chaque K_n. De plus, la décomposition $f = \sum f_n$ engendre une décomposition $u = \sum u_n$ avec $u_n \prec f_n$. On voit alors comme ci-dessus que $u = \sum u_n$ appartient à C_δ. Alors C_δ est une bande grâce au premier lemme.

La relation $C = C_\delta \cap C_\sigma$ est évidente. Il reste à prouver que $S = C_\sigma + C_\delta$. Soit donc $f \in S$ étrangère à $C_\sigma + C_\delta$. Si f est non nulle, l'ensemble $E = \{f \neq \hat{f}\}$ est semi-polaire et non polaire, sans quoi $f \in C_\sigma$. Soit une mesure $\mu \in \mathscr{M}_+^\infty$ concentrée sur E et n'y négligeant que les polaires, il existe par le théorème de Lusin, une suite de quasi-compacts K_n disjoints dans E, telle que $E = \bigcup_n K_n$ μ-presque partout, donc quasi-partout, et telle que f soit quasi-continue sur K_n et $f|_{K_n}$ soit C-majorée. On a $f = u + v$ avec $u \prec R_f^{K_n}$ et $v \prec R_f^{X \setminus K_n}$, donc $f - \hat{f} = u - \hat{u}$ sur K_n, et $u-\hat{u}$ est quasi-s.c.s. sur X; on en déduit $R(u-\hat{u})\in C_\delta$ et $R(u-\hat{u})\prec u\prec f$, puis $R(u-\hat{u})=0$, car f est étrangère à C_δ. Alors on a pour tout n: $f=R_f^{X\setminus K_n}$, donc $f=\hat{f}$ sur K_n, puis $f=\hat{f}$ sur E: une contradiction. Ainsi $f=0$.

Corollaire. – *toute fonction fortement surmédiane est de première classe de Baire en quasi-topologie,*
– *le cône S est l'adhérence séquentielle de C.*

Remarquons aussi ici que S est séquentiellement complet en structure uniforme $\sigma(S,\mathscr{M}^\infty)$. En effet, si f_n est une suite de Cauchy, posons $F(\mu)=\operatorname{Lim}_n \mu(f_n)$. Dans chaque $\mathbb{L}^1(\mu)$ F est représentable grâce au théorème de Vitali-Hahn-Saks, on en déduit que F est une fonctionelle évidemment surmédiane, et c'est bien la limite des f_n.

Remarque sur les ensembles uniformément effilés

Nous avons vu que si $\widehat{R_1^E}\leqq k<1$ q.p. sur E, E était fortement mince. Or, on retrouve maintenant cela bien simplement: reprenons la décomposition de Mertens $R_1^E=w+q$ avec $w\in C_\sigma$ et q étrangère à C_σ. Nous savons donc que q est quasi-s.c.s. et même $q\in C_\delta$. De plus on peut écrire $E=\{q-\hat{q}\geqq 1-k\}$, donc E est quasi-compact ainsi que tous ses sous-ensembles boréliens: cela suffit d'après ([6], th. 3°). [2]

IX. Applications

Remarques sur la réduite

A côté de l'enveloppe «de Snell» $R\varphi=\operatorname{Min}\{f\in S/f\geqq\varphi \text{ q.p.}\}$ on peut songer à la réduite «de Brelot» $\widetilde{R\varphi}=\operatorname{Essinf}\{u\in C_\sigma/u\geqq\varphi \text{ q.p.}\}$. Ces deux réduites coïncident (q.p.) car le théorème 12° nous dit aussi que toute $f\in S$ est borne inférieure d'une suite décroissante d'éléments de C_σ.

Rappelons aussi que le prolongement de Lebesgue de γ était défini par

$$\begin{aligned}\gamma(\varphi)&=\operatorname{Inf}\{\textstyle\int Rf\,d\theta/f \text{ quasi-s.c.i.}\geqq\varphi\}\\&=\operatorname{Inf}\{\textstyle\int u\,d\theta/u\in C_\sigma\ u\geqq\varphi \text{ q.p.}\}.\end{aligned}$$

On a donc $\gamma(\varphi)=\int R\varphi\,d\theta$ d'où l'on déduit que $\varphi\rightsquigarrow\gamma(\varphi)$ est une capacité fonctionelle de Choquet: on ne le savait jusque-là que pour la capacité $E\rightsquigarrow\gamma(E)$, en raison de la sous-additivé forte.

D'autre part, nous avons la formule de Mertens [11]: $R\varphi=\operatorname{Max}(\varphi,\widehat{R\varphi})$ qu'il suffit de montrer pour φ quasi-s.c.s. majorée par un élément de C. Or, nous avons la formule de Mokobodzki [13]: $\mu(R\varphi)=\operatorname{Max}\{\nu(\varphi)/\nu\prec\mu\}$. Si ν est une mesure qui réalise le maximum, alors $\varphi=R\varphi$ ν-p.p.; donc ν est concentrée sur $E=\{\varphi=R\varphi\}$, on en déduit $R\varphi=R^E R\varphi$, on a donc $R\varphi=\widehat{R\varphi}$ q.p. hors de E, d'où la formule de Mertens.

[2] On en déduit alors $R_1^E=q$: donc R_1^E étrangère à C_σ.

13°. Quasi-topologie fine

Cela permet de définir la quasi-topologie fine: un ensemble A est «quasi-ouvert fin» s'il est de la forme $\{u>v\}$ avec u et v quasi-excessives. (Rappelons qu'il est quasi-ouvert ordinaire si u et v sont dans C). Cette notion est évidemment stable par réunions dénombrables et intersections finies. On a les deux propriétés de Lindelöf: d'abord, si p est un potentiel strict, on voit facilement que tout quasi-ouvert fin A s'exprime sous la forme $A=\{p>R_p^{A^c}\}$, et réciproquement, vu ce qui précède immediatement.

Si des A_i vont en croissant, les $R_p^{A_i^c}$ vont en décroissant et convergent en topologie $\sigma(S,\mathcal{M}^\infty)$ vers $u\in S$: on voit aussitôt que $A=\{p>u\}$ est quasi-ouvert fin, contient q.p. tous les A_i et s'obtient comme réunion d'une sous-famille dénombrable par le théorème 9°.

Si des A_i vont en décroissant, les $R_p^{A_i^c}$ vont en croissant et convergent vers $v\in S$ en topologie $\sigma(S,\mathcal{M}^\infty)$. L'ensemble $A=\{p>v\}$ est un quasi-ouvert fin (noter que $v=R_p^{A^c}$) contenu q.p. dans chaque A_i, et contenant q.p. tout quasi-ouvert G contenu q.p. dans chaque A_i: or il existe par le théorème 9° une sous-famille dénombrable (A_{i_n}) telle que A soit l'intérieur (fin) de l'intersection $\bigcap_n A_{i_n}$, lequel existe d'après la première propriété de Lindelöf.

Nous avions signalé dans un précédent article ([6] n° V) que la quasi-topologie «fine» considérée «habituellement» en théorie du potentiel vérifiait un certain nombre de propriétés qui la rendaient compatible avec la quasi-topologie donnée. Pour être complet, il faut donc montrer ici que:
– les quasi-ouverts fins sont des quasi-F_σ ordinaires,
– si A est quasi-ouvert fin, il existe B non polaire et quasi-ouvert fin tel que $\bar{B}$ (quasi-adhérence ordinaire) soit inclus dans A,
– tout quasi-borélien E a même γ-capacité que sa quasi-adhérence fine.

Les deux premières propriétés résultent immédiatement de la définition des quasi-ouverts fins et de ce que les quasi-excessives sont quasi-s.c.i.; la dernière provient de la formule $\gamma(E)=\int R_1^E d\theta$ (fin de la démonstration du théorème 7°), et de la relation $R_1^E=\hat{R}_1^E$.

14°. Ensembles réguliers

Si E est quasi-borélien, E est dit régulier si R_u^E est quasi-excessive pour toute u quasi-excessive. La réunion de deux ensembles réguliers est régulière, grâce à la formule $R_u^{A\cup B}\prec R_u^A+R_u^B$. Il est clair que tout quasi-ouvert fin est régulier.

Si E est quasi-borélien, soit $(A_i)_{i\in I}$ la famille de tous ses sous-ensembles quasi-boréliens réguliers, soit p un potentiel strict (par exemple p de la forme Vf), posons $u=\operatorname{EssSupp}_i R_p^{A_i}$ et $A=\{p=u\}$. On vérifie aussitôt que A est régulier et contient tous les A_i: c'est le plus gros ensemble régulier inclus dans E, ou encore le «noyau régulier» $\widehat{R}(E)$ de E: il est quasi-fermé fin relativement à E. Posons maintenant $E'=\{p=\widehat{R_p^E}\}$, et par récurrence pour $\xi<\aleph_1$ $E^{\xi+1}=(E^\xi)'$ $E^\eta=\bigcap_{\xi<\eta} E^\xi$ si η est un ordinal limite, puis $B=\operatorname{EssInf}_{\xi<\aleph_1} E^\xi$ B est évidemment régulier, donc $B \subset R(E)$. Mais par récurrence, on a $R(E) \subset E^{\xi}$ pour tout ξ, donc $B = R(E)$. Finalement E est réunion de $R(E)$ et d'un ensemble semi-polaire: c'est une forme du théorème de Cantor-Bendixon. (cf. [6])

15°. Généralisation

Plaçons nous d'emblée dans des hypothèses suffisamment générales. X est un ensemble, $\mathscr{L}^1(\gamma)$ est un espace vectoriel de fonctions sur X, stable par l'opération $f \rightsquigarrow (f \wedge 1)^+$, muni d'une semi-norme γ vérifiant $|f| \leqq |g| \Rightarrow \gamma(f) \leqq \gamma(g)$ et $\operatorname{Inf}_n \gamma(f_n) = 0$ pour toute suite décroissante f_n tendant vers 0.

On suppose qu'il existe une suite $f_n \in \mathscr{L}^1(\gamma)$ telle que $\operatorname{Sup}_n f_n \equiv +\infty$ et que l'espace séparé associé $\mathbb{L}^1(\gamma)$ est complet.

On note $\mathscr{B}$ la tribu engendrée par $\mathscr{L}^1(\gamma)$: c'est la tribu quasi-borélienne. Le dual $\mathscr{M}^\infty$ de $\mathbb{L}^1(\gamma)$ est représentable par un espace de mesures sur $\mathscr{B}$ (cf. [6]).

On a en outre une famille résolvante $(V_t)_{t>0}$ d'opérateurs positifs à contraction dans $\mathbb{L}^1(\gamma)$. On ne suppose pas la continuité forte de la résolvante mais seulement que $V_t(\mathscr{L}^1(\gamma))$ (indépendant de t) engendre la tribu $\mathscr{B}$.

On suppose que γ et $(V_t)_{t>0}$ sont compatibles au sens suivant: $\gamma(\varphi) = \int R(|\varphi|)\, d\theta$ pour toute $\varphi \in \mathscr{L}^1(\gamma)$, où $R(\varphi)$ désigne la réduite excessive de φ, et où θ est une mesure $\in \mathscr{M}^\infty_+$.

C_σ désignera encore le cône des quasi-excessives θ-intégrables. Une mesure $\mu \in \mathscr{M}^\infty_+$ est dite «de non branchement» si $\mu(\varphi) = \operatorname{Lim}_{t \to \infty} \mu(t V_t \varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathscr{L}'(\gamma)$.

Supposons pour finir que $\mathbb{L}^1(\gamma)$ soit séparable. On montre comme en théorie des résolvantes de Ray l'existence d'un ensemble X_0, appelé «l'ensemble de non branchement», qui est un quasi-G_δ et qui est caractérisé par la propriété suivante:

une mesure $\mu \in \mathscr{M}^\infty$ est de non branchement si et seulement si elle est concentrée sur X_0.

La relation du balayage est seulement un préordre sur $\mathscr{M}^\infty$, mais c'est un ordre sur le sous-espace des mesures de non branchement $\tilde{\mathscr{M}}^\infty$.

Dans un premier temps, on remplacera donc dans toutes les définitions et les énoncés du chapitre I X par X_0, $\mathscr{M}^\infty$ par $\tilde{\mathscr{M}}^\infty$, et compact par quasi-compact (cf. [6]).

On prendra pour C le cône des $u \in C_\sigma$ qui sont quasi-continus sur X_0 et qui s'écrivent $u = \sum_n u_n$ où chaque $u_n \in C_\sigma$ et est majoré par un Vf avec $\int Vf d\theta < +\infty$.

L'existence du couple (p, q) dans la démonstration de la proposition 5° résulte de ce que pour toute mesure $\mu \in \tilde{m}^\infty_+$ et toute $\varphi \in \mathscr{L}'(\gamma)$ on a:

$$\mu(\varphi) = \operatorname{Inf}\{\mu(p-q)/p, q \in C, p-q \geqq \varphi \text{ q.p. sur } X_0\}.$$

Au n° VIII, il faudra modifier la définition de S^f: on posera

$$S^f(H) = \operatorname{EssInf}\{f \wedge R_f^{G \cap X_0}/G \text{ quasi-ouvert} \supset H\}$$

pour H quasi-fermé dans X. On en déduira que $p=f-S^f(X_0)$ est quasi-continu sur X_0 et appartient à C, et les résultats seront inchangés. D'ailleurs, dans la décomposition de Mertens $f=w+q$ avec $w\in C_\sigma$ et q étrangère à C_σ, on a nécessairement $q=S^q(X_0)$.

Comme on a obtenu ainsi que des résultats sur X_0, le problème reste de savoir si une fonctionelle surmédiane est représentable par une fonction définie sur X tout entier. D'ailleurs le problème ne se pose que pour $u\in C_\delta$: soit $u_n\in C$ une suite décroissante vers u q.p. sur X_0, et soit $\tilde{u}_n$ le prolongement quasi-excessif canonique de u_n. Posons $\tilde{u}=\operatorname{Inf}_n u_n$. Comme toute mesure $\mu\in\mathcal{M}_+^\infty$ est équivalente en balayage à une unique mesure de non branchement $\tilde{\mu}$, on voit par le théorème de capacitabilité que $\tilde{u}$ ne depend pas de la suite u_n choisie.

16°. Considérons (Ω, P) un espace probabilisé séparable, $\Omega\times[0,+\infty[$ muni d'une tribu optionelle $\mathscr{B}$ vérifiant les conditions habituelles ([4], p. 183). Soit $\tau=P\otimes\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,\infty[$. Si $f(w,t)$ est $\mathscr{B}$-mesurable $\geqq 0$, et τ-intégrable, le processus $\int_t^\infty f(w,s)\,ds$ est p.s. à trajectoires continues. On note Vf sa projection optionnelle. On définit pareillement $V_\lambda f$: c'est la projection optionnelle de $\int_0^\infty e^{-\lambda s} f(w,t+s)\,ds$. Soit $\mathscr{R}$ l'espace vectoriel réticulé stable par l'opération $\varphi\rightsquigarrow(\varphi\wedge 1)^+$ engendré par les Vf, et pour $\varphi\in\mathscr{R}$ $\gamma(\varphi)=E(Z_0)$ où Z est la réduite V-excessive, donc l'enveloppe de Snell de $|\varphi|$. Soit $\mathscr{L}^1(\gamma)$ le complété fonctionnel de $\mathscr{R}$: on voit aisément que toutes les conditions sont réalisées, sauf peut-être la condition de Daniell de décroissance vers 0 sur les suites évanescentes. Mais comme $\mathscr{L}^1(\gamma)$ est sépareble, on sait le transporter en espace fonctionnel sur un espace X localement compact à base dénombrable, de sorte que $\mathscr{C}_0(X)$ en soit un sous-espace dense. L'espace $\Omega\times\mathbb{R}^+$ devient quasi-isomorphe à une partie quasi-borélienne X_1 de X (cf. [7]). On sait par ailleurs [4] que toute forme linéaire positive sur $\mathbb{L}^1(\gamma)$ est représentable de manière unique par une mesure dite «optionnelle» sur $\Omega\times\mathbb{R}^+$. Cela entraîne que $X_1=X_0$ q.p., et par suite, $\Omega\times\mathbb{R}^+$ avec sa tribu optionnelle s'identifie à l'ensemble de non branchement de la résolvante. Les fonctions fortement surmédianes sont donc les surmartingales fortes spécialement étudiées par Mertens. Noter que les éléments de C_δ sont des processus de la classe (D).

17°. On peut encore généraliser en supprimant la condition de séparabilité, et en la remplaçant par la condition suivante dite «premier axiome de Lindelöf» pour toute famille $(f_i)_{i\in I}$ extraite de $\mathscr{L}^1(\gamma)$, il existe une sous-famille dénombrable $(f_j)_{j\in J}$ dont l'enveloppe supérieure majore q.p. toute fonction f_i. Tous les résultats du chapitre I s'étendent alors sans changement dans le cas où la résolvante est fortement continue (même l'extraction de sous-suite au théorème 10°).

Dans le cas où la résolvante n'est pas fortement continue, on est extrêmement gêné par l'inexistence a priori de l'ensemble de non branchement, c'est pourquoi nous n'avons pas poussé l'analyse dans cette direction, bien que les probabilistes aient l'habitude de ne pas faire d'hypothèse de séparabilité sur l'exemple du n° 16.

Bibliographie

1. Bourbaki, N.: Intégration. Livre VI Asi 1175. Paris: Hermann 1952
2. Brelot, M.: Eléments de la théorie classique du potentiel. Centre de documentation universitaire 1969
3. Choquet, G.: Forme abstraite du théorème de capacitabilité. Ann. Inst. Fourier **IX**, 83 (1959)
4. Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilités et potentiel. Asi 1372. Paris: Hermann 1975
5. Feyel, D.: Espaces de Banach fonctionnéls adaptés. Lect. Notes in Math. **681**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978
6. Feyel, D.: Ensembles singuliers associés aux espaces de Banach réticulés. Ann. Inst. Fourier **XXXI**, 195 (1981)
7. Feyel, D., de La Pradelle, A.: Représentations d'espaces de Riesz-Banach. Bull Acad. Roy. de Belgique, 5$^{\text{ème}}$ série, t. LXIV (1978–6)
8. Herve, R.M.: Recherches axiomatiques en théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel. Ann. Inst. Fourier **XII**, 415 (1962)
9. de La Pradelle, A.: Cônes de potentiels dans les espaces de Banach adaptés et dualité. Lect. Notes in Math. **681**. Heidelberg-New York: Springer 1978
10. Mertens, F.: Théorie des processus stochastiques généraux, application aux surmartingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **22**, 45–68 (1972)
11. Mertens, J.F.: Strongly supermedian functions and optimal stopping. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **26**, 119–1396 (1973)
12. Meyer, P.A.: Probabilités et potentiel. Asi 1318. Paris: Hermann 1966
13. Mokobodzki, G.: Structure des cônes de potentiels. Sém. Bourbaki n° 377 (1969–1970)
14. Mokobodzki, G.: Ensembles compacts de fonctions fortement surmédianes. Lect. Notes in Math. **713**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1979
15. Mokobodzki, G.: Capacités dominées par une mesure. Lect. Notes in Math. **649**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978
16. Taylor, J.C.: On the existence of sub-markovian resolvents. Inventiones Math. **17**, 85–93 (1972)

Reçu le 12 décembre 1980