Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 8, 182—184 (1967)

Zur schwachen Folgenkompaktheit von Testfunktionen

G. Nölle und D. Plachky

Eingegangen am 14. März 1966

1. Einführung und Zusammenfassung

Viele in der Mathematischen Statistik grundlegende Existenzaussagen wie z.B. das Lemma von Neyman und Pearson, das Theorem von Hunt und Stein, sowie (im dominierten Fall) die Existenz eines Minimax-, Maximin-, strengsten (most stringent) Tests oder eines optimalen Tests (im Sinne von Neyman und Pearson) bei einfacher Gegenhypothese lassen sich mit Hilfe des Satzes über die schwache Folgenkompaktheit von Testfunktionen (vgl. Lehmann [4], S. 354) beweisen.

Es sollen zwei verschiedene Beweise dafür angegeben werden, daß dieser Satz ohne die übliche Separabilitätsannahme richtig ist. Bezeichnet $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ einen meßbaren Raum, μ ein σ-finites Maß über $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ die Menge der reellwertigen, $\mathfrak{B}$-meßbaren und μ-integrablen Funktionen, und erklärt man eine Testfunktion φ als reellwertige, $\mathfrak{B}$-meßbare Funktion mit $0 \leqq \varphi(x) \leqq 1$ für jedes $x \in \mathfrak{X}$, so wird bewiesen:

Satz. *Zu jeder Folge $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ von Testfunktionen gibt es eine Teilfolge $\{\varphi_{n_\nu}\}_{\nu=1,2,\ldots}$ und eine Testfunktion φ^* mit*

$$\int \varphi_{n_\nu} f \, d\mu \to \int \varphi^* f \, d\mu \quad \text{für jedes} \quad f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu).$$

2. Beweis des Satzes

Beweis I. Wenn der σ-Körper $\mathfrak{B}$ über $\mathfrak{X}$ ein abzählbares Erzeugendensystem hat, ist der Satz eine bekannte Aussage (vgl. Lehmann [4], S. 354). Ist nun $\mathfrak{B}$ ein beliebiger σ-Körper über $\mathfrak{X}$ und μ (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) ein normiertes Maß, so betrachte man den kleinsten σ-Körper $\mathfrak{B}'$ über $\mathfrak{X}$ mit der Eigenschaft, daß alle Testfunktionen φ_n der gegebenen Folge $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ $\mathfrak{B}'$-meßbar sind. Dieser ist separabel, denn er wird erzeugt durch die Mengen $\{x\colon \varphi_n(x) \leqq r\}$, r rational, $n = 1, 2, \ldots$, und es gilt $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$. Bezeichnet μ' die Restriktion von μ auf $\mathfrak{B}'$, so gibt es also eine Teilfolge $\{\varphi_{n_\nu}\}_{\nu=1,2,\ldots}$ von $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ und eine reellwertige, $\mathfrak{B}'$-meßbare Funktion φ^* mit $0 \leqq \varphi^*(x) \leqq 1$ für jedes $x \in \mathfrak{X}$, so daß gilt

$$\int \varphi_{n_\nu} f' \, d\mu' \to \int \varphi^* f' \, d\mu' \quad \text{für jedes} \quad f' \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}', \mu'). \tag{1}$$

Bezeichnet $E(f \mid \mathfrak{B}')$ den bedingten Erwartungswert von $f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ unter $\mathfrak{B}'$, so gilt $g E(f \mid \mathfrak{B}') \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}', \mu')$ für $g = \varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, bzw. $g = \varphi^*$ und damit nach DOOB [2], S. 22 und wegen (1)

$$\int \varphi_{n_\nu} f \, d\mu = \int \varphi_{n_\nu} E(f \,|\, \mathfrak{B}') \, d\mu' \to \int \varphi^* E(f \,|\, \mathfrak{B}') \, d\mu' = \int \varphi^* f \, d\mu$$

für jedes $f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$. $\_\!\!\rfloor$

Beweis II. Sei μ wiederum ohne Einschränkung der Allgemeinheit ein normiertes Maß. Wie üblich bezeichne $L_2(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ den Raum der Äquivalenzklassen $\tilde{f}$ quadratisch μ-integrabler, reellwertiger, $\mathfrak{B}$-meßbarer Funktionen f mit der Äquivalenzrelation $f_1 \sim f_2$ genau dann, wenn $f_1(x) = f_2(x)$ μ-f.ü.. Der Raum $L_2(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\tilde{f}, \tilde{g}) = \int fg \, d\mu$ und der Norm $\|\tilde{f}\| = (\tilde{f}, \tilde{f})^{1/2}$, $\tilde{f}, \tilde{g} \in L_2(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$.

Für eine beliebige Folge $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ von Tests gilt $\tilde{\varphi}_n \in L_2(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ und $\|\tilde{\varphi}_n\| \leqq 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Da eine beschränkte Menge im Hilbertraum schwach kompakt ist (vgl. ACHIESER-GLASMANN [1], S. 49), existiert eine Teilfolge $\{\varphi_{n_\nu}\}_{\nu=1,2,\ldots}$ von $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ und ein Element $\tilde{\varphi}^* \in L_2(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ mit

$$(2) \qquad (\tilde{\varphi}_{n_\nu}, \tilde{f}) \to (\tilde{\varphi}^*, \tilde{f}) \quad \text{für jedes} \quad \tilde{f} \in L_2(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu).$$

Da die den Indikatorfunktionen I_B mit $B \in \mathfrak{B}$ zugeordneten Äquivalenzklassen in $L_2(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ liegen und wegen $0 \leqq \varphi_{n_\nu} \leqq 1$ für jedes $x \in \mathfrak{X}$ und $\nu = 1, 2, \ldots$, gilt insbesondere $0 \leqq \int\limits_B \varphi_{n_\nu} \, d\mu \to \int\limits_B \varphi^* \, d\mu \leqq \mu(B)$ für jedes $B \in \mathfrak{B}$. Hieraus folgt zunächst $0 \leqq \varphi^*(x) \leqq 1$ μ-f.ü., so daß φ^* als Testfunktion gewählt werden kann. Außerdem ergibt sich aus (2)

$$(3) \qquad \int \varphi_{n_\nu} p \, d\mu \to \int \varphi^* p \, d\mu$$

für jede primitive Funktion $p = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i I_{B_i}$ mit $c_i \in R_1$, $B_i \in \mathfrak{B}$, $i = 1, \ldots, k$. Da die Gesamtheit $\mathfrak{P}$ der primitiven Funktionen aufgrund der Definition des μ-Integrals dicht in $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ liegt, kann man zu beliebigem $f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ und $\varepsilon > 0$ ein $p \in \mathfrak{P}$ wählen mit $\int |f - p| \, d\mu < \varepsilon/3$. Wegen

$$\begin{aligned} \left|\int \varphi_{n_\nu} f \, d\mu - \int \varphi^* f \, d\mu\right| &\leqq \left|\int \varphi_{n_\nu}(f - p) \, d\mu\right| + \left|\int \varphi^*(p - f) \, d\mu\right| + \left|\int p(\varphi_{n_\nu} - \varphi^*) \, d\mu\right| \\ &\leqq \tfrac{2}{3}\varepsilon + \left|\int p(\varphi_{n_\nu} - \varphi^*) \, d\mu\right| \end{aligned}$$

folgt nun die Behauptung aus (3). $\_\!\!\rfloor$

Bemerkungen. 1. Der angegebene Satz kann auch aus Theorem IV. 8.9 bei DUNFORD-SCHWARTZ [3], S. 292, hergeleitet werden.

2. Der obige Satz gilt nicht für beliebige Maße μ über $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, wie folgendes Beispiel zeigt:

Es sei $\mathfrak{X} = [0, 1]$, $\mathfrak{B}$ der σ-Körper der Borelschen Mengen B des Intervalls $[0, 1]$ und μ_a das „abzählende" Maß der Menge $[0, 1]$, d.h.

$$\mu_a(B) = \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } B, \text{ falls } B \text{ endlich ist} \\ \infty, \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Maß μ_a ist nicht σ-finit.

Teilt man nun für $n = 1, 2, \ldots$ das Intervall $[0, 1]$ in 10^n gleiche Teilintervalle und definiert φ_n auf jedem dieser Teilintervalle als lineare Funktion, die von 0 auf 1 anwächst, so hat φ_n die Darstellung $\varphi_n(x) = 10^n \sum\limits_{\nu > n} a_\nu / 10^\nu$, wobei $x = \sum\limits_{\nu \geqq 0} a_\nu / 10^\nu$ diejenige dekadische Entwicklung von $x \in [0, 1]$ darstellt, in der nicht von einem Index ab stets $a_\nu = 9$ ist.

Wäre nun der obige Satz für nicht σ-finite Maße richtig, so müßte speziell für die Folge $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine Teilfolge $\{\varphi_{n_\nu}\}_{\nu=1,2,\ldots}$ und eine Testfunktion φ^* existieren mit

$$\int \varphi_{n_\nu} f \, d\mu_a \to \int \varphi^* f \, d\mu_a \quad \text{für jedes} \quad f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu_a).$$

Wählt man hier speziell für $f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu_a)$ die Indikatorfunktion $I_{\{x\}}$ mit $x \in [0, 1]$, so würde $\varphi_{n_\nu}(x) \to \varphi^*(x)$ für jedes $x \in [0, 1]$ gelten; dies ist aber nicht möglich, denn für jede Zahl $x = \sum\limits_{\nu \geqq 0} a_\nu / 10^\nu$ mit $0 \leqq x \leqq 1$ und $|a_{n_\nu + 1} - a_{n_{\nu-1}+1}| \geqq 2$ für $\nu = 2, 3, \ldots$ ist $|\varphi_{n_{\nu-1}}(x) - \varphi_{n_\nu}(x)| \geqq 1/10$ für $\nu = 2, 3, \ldots$.

Herrn Professor Dr. H. WITTING (Münster/Westf.) danken wir für Ratschläge und Hinweise bei der Fertigstellung dieser Arbeit.

Literatur

1. ACHIESER, N. J., u. J. M. GLASMANN: Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum. Berlin: Akademie-Verlag 1960.
2. DOOB, J. L.: Stochastic processes. New York: J. Wiley 1960.
3. DUNFORD, N., and J. T. SCHWARTZ: Linear operators I. New York: Interscience Publishers 1964.
4. LEHMANN, E. L.: Testing statistical hypotheses. New York: J. Wiley 1959.

Institut für Mathematische Statistik
44 Münster/Westf., Schloßplatz 2