Probab. Th. Rel. Fields 76, 51–70 (1987)

Probability Theory and Related Fields

© Springer-Verlag 1987

Principes d'invariance faible pour la mesure empirique d'une suite de variables aléatoires mélangeante

P. Doukhan, J.R. Leon, and F. Portal

Université Paris-Sud, U. A. 743 «Statistique Appliquée» Mathématiques, Bât. 425, F-91405 Orsay, France

Summary. We give weak invariance principles for the empirical measure of a stationary strongly mixing sequence $(\xi_k)_{k \geqq 0}$, $X_n(f) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k) - Ef(\xi_k))$. For the case where $f \in B_s$, the unit ball of the Sobolev space $H_s(X)$ of a riemannian compact manifold, and f is a Lip_α function ($\frac{1}{2} < \alpha \leqq 1$) we obtain logarithmic rates of convergence ε_n such that, for a stationary sequence of gaussian processes Y_n, $\mathbb{P}(\sup_f |X_n(f) - Y_n(f)| \geqq \varepsilon_n) \leqq \varepsilon_n$. We also prove, for the case of kernel estimates $\hat{g}_n$, the existence of a gaussian non stationary sequence of random processes $(Y_n(x))_{x \in K}$ indexed be a compact subset K of $\mathbb{R}^d$ and constants $a, b, c > 0$ such that

$$\mathbb{P}\left(\sup_{x \in K} |(nh_n^d)^{1/2} (\hat{g}_n(x) - g(x)) - Y_n(x)| \geqq cn^{-a}\right) \leqq cn^{-a} \quad \text{if} \quad h_n = n^{-b};$$

finally we give estimates of the kind:

$$E \sup_{x \in K} (\hat{g}_n(x) - g(x))^2 \leqq cn^{-a} \quad \text{if} \quad h_n = n^{-b}.$$

Here h_n is the window of the kernel estimate $\hat{g}_n$.

I. Introduction

L' objet de ce travail est de montrer des principes d'invariance faible pour la mesure empirique $\left(X_n(f) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} [f(\xi_k) - Ef(\xi_k)],\ f \in \mathscr{F}\right)$ d'une suite $(\xi_k)_{k \geqq 0}$ de variables aléatoires strictement stationnaire et fortement mélangeante (cf. [7]) à valeurs dans un espace $(E, \mathscr{B}(E), \mu)$ topologique mesuré par une mesure σ-finie et positive sur ses boréliens. La famille $\mathscr{F}$ est ici une famille compacte de $L^2(E, \mu)$

d'entropie finie. Un lemme dû à Dudley permettra la construction d'une suite de processus gaussiens $(Y_n(f); f \in \mathscr{F})$ vérifiant:

$$\mathbb{P}(\sup\{|X_n(f) - Y_n(f)|: f \in \mathscr{F}\} \geqq \varepsilon_n) \leqq \varepsilon_n.$$

Pour cela nous évaluons la distance de Prohorov dans $(C(\mathscr{F}), \|\cdot\|_\infty)$ des processus X_n à un processus gaussien Y_n. La méthode de travail, décrite au § II, consiste à évaluer d'une part la distance de Prohorov des répartitions fini-dimensionnelles de ces processus et d'autre part l'oscillation des processus. Pour ce qui concerne l'évaluation de l'oscillation du processus empirique nous développons une méthode originale basée sur un calcul de

$$E \sup\{|X_n(f)|^2: f \in \mathscr{F} - \mathscr{F}, \textstyle\int f^2\, d\mu < \delta^2\}.$$

Les cas étudiés sont les suivants.

Nous généralisons d'abord un travail de Giné [12] qui construit des tests d'uniformité basés sur des normes de Sobolev dans le cas de variables aléatoires à valeurs dans une variété riémannienne compacte; nous donnons de plus des évaluations de la vitesse de convergence de la mesure empirique associée. Nous montrons aussi des applications de notre méthode au cercle associé à l'étude des fonctions α-lipschitziennes sur un intervalle, comme l'a fait Beran [2] dans le cas indépendant. Marcus et Philipp [19] donnent des principes forts dans le cas indépendant sur des classes de fonctions continues; ils remplacent notre calcul d'oscillation par des évaluations pour des projections fini-dimensionnelles. Nos vitesses de convergence semblent préférables aux leurs, toutefois ces résultats sont de nature différente donc difficilement comparables.

L'objet essentiel de ce travail est d'obtenir des principes d'invariance faible pour des estimateurs à noyau dans les cas de l'estimation d'une densité marginale et de la fonction de régression pour des échantillons multivariés. De tels résultats sont importants car ils permettent d'obtenir des régions de confiance au sens de la norme uniforme analogues au résultat donné par Bickel et Rosenblatt [4]; toutefois on ne dispose pas dans des cas mélangeants de résultats optimaux comme celui de Komlos et al. [16] dans le cas indépendant, les seuls résultats connus donnent, pour un γ petit, des vitesses faibles en $n^{-\gamma}$ dans le cas de variables fortement mélangeantes [9]. C'est en raison de la faiblesse relative d'un tel résultat que nous envisageons ici une méthode directe. Notons pour finir que l'hypothèse de stationnarité de la suite $(\xi_k)_{k \geqq 0}$ pourrait être remplacée par l'ergodicité de la suite, toutefois les hypothèses à faire dans ce cas sont très techniques; nous nous sommes ainsi placés dans un cadre stationnaire afin d'éviter d'alourdir encore les hypothèses. Nos résultats donnent des évaluations de vitesses de convergence dans des principes d'invariance faibles; ces vitesses ne sont pas nécessairement optimales et des contre-exemples les concernant semblent délicats à construire toutefois les applications des tests d'uniformité donnés par Giné s'étendent immédiatement aux cas mélangeants et sont détaillées dans [12].

Afin de mieux situer notre travail, nous rappelons les notions de mélange utilisées ici. Le processus $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, stationnaire, est dit α-mélangeant (resp. ϕ-

mélangeant) lorsque $\lim_n \alpha_n = 0$ (resp. $\lim_n \phi_n = 0$) où, si $\mathcal{M}_a^b$ désigne la σ-algèbre engendrée par $\{\xi_k;\ a \leqq k < b\}$:

$$\phi_n = \operatorname{Sup}\{|\mathbb{P}(B/A) - \mathbb{P}(B)|;\ A \in \mathcal{M}_{-\infty}^0,\ B \in \mathcal{M}_n^{+\infty}\}$$
$$\alpha_n = \operatorname{Sup}\{|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)|;\ A \in \mathcal{M}_{-\infty}^0,\ B \in \mathcal{M}_n^{+\infty}\}$$

Des exemples de processus mélangeants sont issus de trois domaines des statistiques. Un processus gaussien stationnaire est α-mélangeant lorsque sa covariance tend vers 0; de plus Ibragimov et Rozanov [15] explicitent la vitesse de convergence vers 0 de α_n selon les propriétés analytiques de la densité spectrale du processus. D'autre part les processus markoviens donnent lieu à des mélanges; d'une part un processus Doeblin récurrent est ϕ-mélangeant et son mélange décroït géométriquement et d'autre part l'ergodicité géométrique d'un tel processus implique un α-mélange de décroissance geométrique. Nummelin et Tuominen [23] donnent des conditions explicitables d'ergodicité géométrique des processus de Markov qui sont appliquées par Mokkadem [22] à une classe de processus non linéaire autorégressifs. Une dernière categorie de processus dont le α-mélange est contrôlable est la classe des processus linéaires étudiée par Gorodetski [13]. Dans les cas énoncés nos résultats peuvent s'énoncer avec des hypothèses simples portant sur des modèles explicites.

II. Méthode générale

La méthode de base consiste à diviser le problème de l'évaluation de la distance de Prohorov de variables aléatoires à valeurs dans un espace de fonctions continues sur un compact en un calcul de distance de Prohorov pour des répartitions finidimensionnelles (cf. § II.1) et d'autre part un calcul d'oscillations des processus mis en oeuvre (cf. § II.2). Cela découle du Théorème II.1. pour lequel nous introduisons les notations suivantes:

Ici $T \subset C(\mathcal{F})$ est une partie de cardinal k telle que les boules de rayon δ centrées sur les éléments de T recouvrent $C(\mathcal{F})$ et π_T: $C(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}^k$ désigne la projection canonique. De plus $\varepsilon_Z(\delta) = \operatorname{Inf}\{\varepsilon > 0;\ \mathbb{P}(w_Z(\delta) \geqq \varepsilon) \leqq \varepsilon\}$ pour un processus Z sur $C(\mathcal{F})$ où $w_Z(\delta) = \operatorname{Sup}\{|Z(f) - Z(g)|;\ d(f,g) < \delta,\ f, g \in \mathcal{F}\}$.

Théorème d'approximation II.1. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathcal{F}, d)$ un espace métrique compact et $(X(f))_{f\in\mathcal{F}}$, $(Y(f))_{f\in\mathcal{F}}$ deux processus séparables sur $C(\mathcal{F})$ définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, nous notons $\mathbb{P}_X$ (resp. $\mathbb{P}_Y$) la loi du processus X (resp. Y) et ϱ la distance de Prohorov dans $C(\mathcal{F})$ (resp. dans $\mathbb{R}^k$ muni de la norme du* sup.*), alors:*

$$\varrho(\mathbb{P}_X, \mathbb{P}_Y) \leqq \varepsilon_X(\delta) + \varepsilon_Y(\delta) + \varrho(\mathbb{P}_X \circ \pi_T^{-1},\ \mathbb{P}_Y \circ \pi_T^{-1}).$$

Ce résultat est démontré dans [9] pour le cas de processus à valeurs dans $D([0,1]^d)$; ici la démonstration en est identique. Massart [20] donne une démonstration différente de ce résultat pour le cas de processus non séparables.

Dans la suite de ce travail nous considérons l'espace $\mathcal{F}$ comme une partie compacte d'un espace $L^2(E,\mu)$ où $(E, \mathcal{B}(E), \mu)$ désigne un espace mesuré par une mesure μ positive et σ-finie sur $\mathcal{B}(E)$. Nous supposons de plus l'espace E métrique.

1. Distance de Prohorov de répartitions fini-dimensionnelles et reconstruction

Soit $(\xi_k)_{k \geqq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E nous définissons le processus empirique $(X_n(f))_{f \in \mathscr{F}}$ par:

$$X_n(f) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k) - Ef(\xi_k)), \quad f \in \mathscr{F}.$$

La suite $(\xi_k)_{k \geqq 0}$ est supposée fortement mélangeante strictement stationnaire et telle que la loi de ξ_0 soit absolument continue par rapport à μ et de densité bornée. Ces hypothèses et notations seront conservées dans la suite. Nous considérons aussi $\{Y(f);\ f \in \mathscr{F}\}$ la famille de variables aléatoires gaussiennes centrées que nous étudions au § II.2. telle que, si $f, g \in \mathscr{F}$ et $\bar{f} = Ef(\xi_0)$, $\bar{g} = Eg(\xi_0)$:

$$EY(f)\,Y(g) = Ef(\xi_0)\,g(\xi_0) - \bar{f}\bar{g} + \sum_{k=1}^{\infty} E(f(\xi_0)\,g(\xi_k) - \bar{f}\bar{g}) + (f(\xi_k)\,g(\xi_0) - \bar{f}\bar{g})\}$$

La série correspondante converge (cf. [7]) lorsque le mélange fort vérifie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{\delta} < \infty \qquad \text{pour un } 0 < \delta \leqq \tfrac{1}{3}.$$

Nous notons ν_n et ν les lois des projections dans $\mathbb{R}^k$ de X_n et Y sur une partie T de $C(\mathscr{F})$ de cardinal k, et $M_a = \operatorname{Sup}\{E\,|f(\xi_1)|^a;\ f \in \mathscr{F}\}$.

Théorème II.2. [11]. *Pour toute partie T de $\mathscr{F}$, de cardinal $k(n)$, la distance de Prohorov $\varrho(\nu_n, \nu)$ calculée sur $\mathbb{R}^{k(n)}$ relativement à la norme uniforme se majore*

a) dans le cas fortement mélangeant, si $\sum n^2 \alpha_n^{\sigma} < \infty$, $M_{4\sigma/(1-\sigma)} < \infty$ et $\sup_n \{\alpha_n n^v k(n)\} < \infty$ pour un $\sigma \in]0, \frac{1}{5}]$ et un $b \in]0, \frac{1}{4}[$, avec $v = \frac{2}{3}(\frac{1}{b} - 1)$ par:

$$\varrho(\nu_n, \nu) \leqq C k^{5/8}(n)\, n^{(b-1)/12} (\log^{1/2} k(n) + \log^{1/2} n).$$

b) dans le cas ϕ-mélangeant, (cf. [5]), si $\sum n^2 \phi_n^{1/2} < \infty$ et $\sup_n \{\phi_n n^{3/4(1/b-1)}\} < \infty$ pour un $b \in]0, \frac{1}{4}[$ et $M_4 < \infty$, par:

$$\varrho(\nu_n, \nu) \leqq C k^{5/8}(n)\, n^{(b-1)/12} (\log^{1/2} k(n) + \log^{1/2} n).$$

c) dans le cas ϕ-mélangeant géométrique, (c'est-à-dire: $\exists u, v > 0, v < 1$ tels que $\phi_n \leqq uv^n$) par:

$$\varrho(\nu_n, \nu) \leqq C k^{5/8}(n)\, n^{-1/12} \log^{1/12}(n)\, (\log^{1/2} n + \log^{1/2} k(n)).$$

La constante C ne dépend que du mélange utilisé, en particulier elle est indépendante de l'ensemble T de cardinal $k(n)$ utilisé.

Afin de pouvoir déduire un résultat de convergence en probabilité de l'évaluation de la distance de Prohorov nous utilisons le résultat de reconstruction suivant. Ce lemme, montré dans [9] repose sur un résultat dû à Dudley et permettra de construire des processus gaussiens Y_n de même loi que Y. Pour des raisons techniques nous supposons de plus à partir de maintenant que l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est suffisamment riche pour que l'on puisse y définir une variable uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de la suite $(\xi_k)_{k \geqq 0}$.

Lemme II.3. *Soit $(X_n)_{n\geqq 0}$ une suite de processus à valeurs dans $C(\mathscr{F})$ convergeant en loi vers un processus gaussien Y, défini sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et telle que:*

$$\varrho(\mathbb{P}_{X_n}, \mathbb{P}_Y) \leqq u_n.$$

Alors il existe une suite de processus gaussiens Y_n de même loi que Y définis sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et telle que:

$$\mathbb{P}[\|X_n - Y_n\|_\infty \geqq u_n] \leqq u_n.$$

2. *Calculs d'oscillations des processus*

Nous considérons une partie $\mathscr{F}$ de $L^2(E,\mu)$ formée de fonctions à support dans $F\subset E$ et une base orthonormale $(f_k)_{k\in\mathbb{K}}$ dénombrable de $L^2(F,\mu)$ vérifiant:

$$\operatorname{Sup}\{|(f,f_k)|;\ f\in\mathscr{F}\} = c_k < \infty.$$

Evaluons l'oscillation du processus $X_n(f) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\ell=1}^{n}[f(\xi_\ell) - Ef(\xi_\ell)]$, $f\in\mathscr{F}$. Pour cela nous majorons $E\sup\{X_n^2(f);\ f\in\mathscr{F}_\delta\}$, où $\mathscr{F}_\delta = \{f\in\mathscr{F} - F;\ \|f\|_2 < \delta\}$; alors nous remarquons que $\mathbb{P}(\sup\{X_n^2(f);\ f\in\mathscr{F}_\delta\} > x(\delta)^{1/3}) < x(\delta)^{1/3}$ si $x(\delta)$ est le majorant obtenu pour la quantité précédente. Pour obtenir ce majorant, nous utilisons d'abord le:

Lemme II.4. *Dans les deux cas suivants, il existe une suite $(N_j)_{j\geqq 0}$ croissante de parties finies de $\mathbb{K}$ telles que:*

$$\forall f\in\mathscr{F},\ X_n(f) \overset{p.s.}{=} \lim_{j\to\infty} X_n(S_j(f)) \quad \text{où} \quad S_j(f) = \sum_{k\in N_j}(f,f_k)f_k.$$

(i) *Si $(\xi_\ell)_{\ell\geqq 0}$ est une suite ϕ-mélangeante vérifient $\sum_{l\geqq 0}\phi_\ell^{1/2} < \infty$ et $\sum_{k\in\mathbb{K}} c_k^2 < \infty$.*

(ii) *Si $(\xi_\ell)_{\ell\geqq 0}$ est une suite fortement mélangeante vérifiant $\sum_{l\geqq 0}\alpha_\ell^\sigma < \infty$ pour un $0<\sigma\leqq\frac{1}{3}$ et si il existe une suite $(\theta_k;\ k\in\mathbb{K})$, positive telle que $\operatorname{Sup}\left\{\sum_{k\in\mathbb{K}}\theta_k(f,f_k)^2;\ f\in\mathscr{F}\right\} < \infty$ est telle que $T = \int\left(\sum_{k\in\mathbb{K}}\theta_k^{-1}f_k^2(x)\right)^{1/(1-\sigma)}\mu(dx) < \infty$.*

Démonstration. (*i*) Posons $S_N(f) = \sum_{k\in N}(f,f_k)f_k$, nous avons:

$$EX_n^2(f - S_N(f)) \leqq 8\sum_{l\geqq 0}\phi_\ell^{1/2} E[f(\xi_0) - S_N(f)(\xi_0)]^2 \leqq 8\sum_{l\geqq 0}\phi_\ell^{1/2}\left\|\frac{dL}{d\mu}\right\|_\infty \sum_{k\notin N} c_k^2$$

d'après l'inégalité [8] de mélange, en notant L la loi de ξ_0. Nous considérons alors une suite N_j croissante telle que $\sum_{j\geqq 0}\left(\sum_{k\notin N_j} c_k^2\right) < \infty$ pour appliquer le lemme de Borel-Cantelli qui conclut.

(ii) L'inégalité de Schwarz montre que:

$$EX_n^2(f-S_N(f)) \leqq E \sum_{k \notin N} \theta_k^{-1} X_n^2(f_k) \operatorname{Sup}\left\{\sum_{k \in \mathbb{K}} \theta_k (f,f_k)^2;\ f \in \mathscr{F}\right\}$$

L'inégalité de mélange fort [7] dans l'espace de Hilbert $H=\{(u_k)_{k\in\mathbb{K}\setminus N};\ \sum \theta_k^{-1} u_k^2 < \infty\}$ montre que

$$E \sum_{k \notin N} \theta_k^{-1} X_n^2(f_k) \leqq C \sum_{l \geqq 0} \alpha_\ell^\sigma \left(\int \left(\sum_{k \notin N} \mathrm{h}_k^{-1} f_k^2(x)\right)^{1/(1-\sigma)} d\mu(x)\right)^{1-\sigma}$$

On conclut alors comme en (i). Passons à présent à l'évaluation de $x(\delta)$.

$$\begin{aligned} E\sup\{X_n^2(f); f\in\mathscr{F}_\delta\} &\leqq 2E\sup\{X_n^2(S_j(f)), f\in\mathscr{F}_\delta\} + 2E\sup\{X_n^2(f-S_j(f)); f\in\mathscr{F}_\delta\} \\ &\leqq 2(Ea_j + Eb_j) \end{aligned}$$

L'inégalité de Schwarz montre que, pour toute suite $(\theta_k)_{k\in\mathbb{K}}$ positive:

$$a_j \leqq \operatorname{Sup}_{\mathscr{F}_\delta} \left\{\sum_{k \in N_j} (f,f_k)^2\right\} \times \sum_{k \in N_j} X_n^2(f_k);$$

$$b_j \leqq \operatorname{Sup}_{\mathscr{F}_\delta} \sum_{k \notin N_j} \theta_k (f,f_k)^2 \times \sum_{k \notin N_j} \theta_k^{-1} X_n^2(f_k)$$

Posant $B_j = \operatorname{Sup}_{\mathscr{F}_\delta} \sum_{k \notin N_j} \theta_k (f,f_k)^2$, nous obtenus:

$$a_j \leqq \delta^2 \sum_{k \in N_j} EX_n^2(f_k) \quad \text{et} \quad b_j \leqq B_j \sum_{k \notin N_j} X_n^2(f_k)$$

Pour évaluer ces deux expressions nous utilisons l'inégalite de mélange dans un espace de Hilbert [7] respectivement pour $H=\mathbb{R}^{|N_j|}$ et

$$h=\left\{(u_k)_{k\in\mathbb{K}\setminus N_j};\ \sum_{k \notin N_j} \theta_k^{-1} u_k^2 < \infty\right\}$$

(ii) $$\sum_{k \in N_j} EX_n^2(f_k) \leqq 90 \sum_{l \geqq 0} \alpha_\ell^\sigma \left(E\left(\sum_{k \in N_j} f_k^2(\xi_0)\right)^{1/(1-\sigma)}\right)^{1-\sigma}$$

(i) $$\sum_{k \in N_j} EX_n^2(f_k) \leqq 4 \sum_{l \geqq 0} \phi_\ell^{1/2} \left\|\frac{dL}{d\mu}\right\|_\infty |N_j|$$

De même:

$$\sum_{k \notin N_j} \theta_k^{-1} EX_n^2(f_k) \leqq 4 \sum_{l \geqq 0} \phi_\ell^{1/2} \left\|\frac{dL}{d\mu}\right\|_\infty \sum_{k \notin N_j} \theta_k^{-1}$$

et (ii)

$$\sum_{k \notin N_j} \theta_k^{-1} EX_n^2(f_k) \leqq 90 \sum_{l \geqq 0} \alpha_\ell^\sigma \left\|\frac{dL}{d\mu}\right\|_\infty \left(\int \left(\sum_{k \notin N_j} \theta_k^{-1} f_k^2\right)^{1/(1-\sigma)} d\mu\right)^{1-\sigma}$$

Le théorème suivant en découle:

Théorème II.5. *Supposons réalisées les hypothèses du lemme II.4. et soit $(\theta_k)_{k\in\mathbb{K}}$ une suite strictement positive, si on note*

$$B_j=\operatorname*{Sup}_{\mathscr{F}_\delta}\sum_{k\notin N_j}\theta_k(f,f_k)^2 \quad \text{et si} \quad \operatorname*{Sup}_{f\in\mathscr{F}}\sum_{k\in\mathbb{K}}\theta_k(f,f_k)^2<\infty, \quad \text{on a:}$$

(i) *Si* $(\xi_\ell)_{\ell\geqq 0}$ *est* ϕ*-melangeante* $E\sup\limits_{\mathscr{F}_\delta} X_n^2(f)\leqq C\left(\delta^2|N_j|+\left(\sum\limits_{k\notin N_j}\theta_k^{-1}\right)B_j\right)$ *lorsque* $\sum\limits_{l\geqq 0}\phi_\ell^{1/2}<\infty$, *pour une constante ne dépendant que de* $(\xi_\ell)_{\ell\geqq 0}$.

(ii) *Si* $(\xi_\ell)_{\ell\geqq 0}$ *est fortement mélangeante et vérifie* $\exists\sigma\in\,]0,\frac{1}{3}]$, $\Sigma\alpha_\ell^\sigma<\infty$ *alors si:*

$$U_j=\left(\int_E\left(\sum_{k\in N_j}f_k^2(x)\right)^{1/(1-\sigma)}\mu(dx)\right)^{1-\sigma}, \quad V_j=\left(\int_E\left(\sum_{k\notin N_j}\theta_k^{-1}f_k^2(x)\right)^{1/(1-\sigma)}\mu(dx)\right)^{1-\sigma}$$

$$E\sup_{\mathscr{F}_\delta}X_n^2(f)\leqq C(\delta^2 U_j+B_j V_j)$$

Dans ce cas les expressions de U_j *et* V_j *peuvent être remplacées par*

$$U_j'=\sum_{k\in N_j}\|f_k\|_\infty^2, \quad V_j'=\sum_{k\notin N_j}\theta_k^{-1}\|f_k\|_\infty^2.$$

Remarques. La dernière évaluation utilisant U_j' et V_j' n'a d'intérêt que lorsque $\mu(E)=+\infty$. Ce résultat donne aussi une évaluation de $E\sup\{X_n^2(f);\ f\in\mathscr{F}\}$ dans tous les cas.

Après avoir montré un résultat concernant le processus empirique, X_n, nous étudions l'oscillation du gaussien limite. Pour cela, nous montrons la convergence en loi dans $C(\mathscr{F})$ du processus $(X_n(f),\ f\in\mathscr{F})$ vers le processus gaussien $(Y(f);\ f\in\mathscr{F})$ défini au début du §II.1.

Tout d'abord, sous les hypothèses du lemme II.4, $\Gamma(f,g)$ est une série convergente. Ainsi le théorème central limite multidimensionnel [6] s'applique aux répartitions finies, il reste donc à montrer la tension de la suite de processus $(X_n;\ n\geqq 1)$.

Nous utilisons le résultat de De Acosta [1], il suffit de voir que X_n est platement concentré. Nous supposons $\mathscr{F}$ compact dans $L^2(E,\mu)$, si $(\theta_k)_{k\in\mathbb{K}}$ est la suite donnée par l'énoncé du théorème II.5., $\mathscr{F}$ est une partie bornée de l'espace de Hilbert H_θ, sous-espace de $L^2(F,\mu)$: $H_\theta=\{f\in L^2(F,\mu);\ \sum\limits_{k\in\mathbb{K}}\theta_k(f,f_k)^2<\infty\}$, nous notons aussi $\|f\|_\theta=\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{K}}\theta_k(f,f_k)^2\right)^{1/2}$ la norme hilbertienne de cet espace. Nous définissons:

$F_N=\{A\in C(\mathscr{F})$; A linéaire sur H_θ, $A(f_k)=0$ si $k\notin N\}$ pour $N\subset\mathbb{K}$, fini.

$F_N^\varepsilon=\{A\in C(\mathscr{F});\ d(A,F_N)<\varepsilon\}$, d désigne la distance uniforme sur $C(\mathscr{F})$.

$M_N^\varepsilon=\{A\in C(\mathscr{F})$; A linéaire sur H_θ et $\sum\limits_{k\notin N}\theta_k^{-1}(A(f_k))^2<\varepsilon^2\}$, $L=\operatorname{Sup}\{\|f\|_\theta,\ f\in\mathscr{F}\}$.

Nous voyons alors comme Giné [12] que $M_N^\varepsilon\subset F_N^{\varepsilon L^{-2}}$ ainsi:

$$\mathbb{P}(X_n\in F_N^{\varepsilon L^{-1}})\geqq\mathbb{P}(X_n\in M_N^\varepsilon)\geqq 1-\mathbb{P}\left(\sum_{k\notin N}\sum_{k\notin N}\theta_k^{-1}X_n^2(f_k)\geqq\varepsilon^2\right)$$

$$\geqq 1-\varepsilon^{-2}\sum_{k\notin N}\sum_{k\notin N}\theta_k^{-1}EX_n^2(f_k)=1-\varepsilon^{-2}T_{n,N}$$

Sous l'hypothèse $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^{1/2} < \infty$, nous obtenons la tension de X_n dans le cas ϕ-mélangeant grâce à la convergence de la série $\Sigma\, \theta_k^{-1}$.

Dans le cas d'un mélange fort, notons d'abord que la condition $T < \infty$, entraîne $\sum_k \theta_k^{-1} < \infty$ car $\|f_k\|^2 = 1$.

$$T_{n,N} = \sum_{k \notin N} \theta_k^{-1} \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) E u_{0,k} u_{j,k} \quad \text{où} \quad u_{j,k} = f_k(\xi_j) - Ef_k(\xi_j), \quad k \in \mathbb{K}, j \geqq 0 .$$

Pour intervertir l'espérance et la somme en k nous utilisons le théorème de converge dominée dont les hypothèses sont réalisées:

$\sum_{k \notin N} \theta_k^{-1} E|u_{0,k} u_{j,k}| \leqq \sum_{k \in \mathbb{K}} \theta_k^{-1}, j = 0, \ldots, n-1$ où c est la borne supérieure de la densité de la loi de ξ_0 par rapport à μ.

Ainsi:

$$T_{n,N} \leqq \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) E\left(\sum_{k \notin N} \theta_k^{-1} u_{0,k} u_{j,k} \right)$$

L'inégalité de Dehling et Philipp [7] dans l'espace de Hilbert ℓ^2 ($\ell^2 = \{(u_k)_{k \in \mathbb{K} \setminus N};\ \Sigma\, \theta_k^{-1} u_k^2 < \infty\}$) montre que

$$T_{n,N} \leqq 180 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_m^{\sigma} \right) \left(E \left(\sum_{k \notin N} \theta_k^{-1} f_k^2(\xi_0) \right)^{1/(1-\sigma)} \right)^{1-\sigma}$$

$$T_{n,N} \leqq 180 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^{\sigma} \right) \left(\int \left(\sum_{k \notin N} \theta_k^{-1} f_k^2(x) \right)^{1/(1-\sigma)} \mu(dx) \right)^{1-\sigma}$$

Le membre de droite de cette inégalité converge vers 0 quand N tend vers $\mathbb{K}$, uniformément en n, ce qui montre la tension de la suite X_n et la continuité du processus Y.

Théorème II.6. *Sous les hypothèses du théorème II.5 er si $\mathscr{F}$ est précompacte dans $L^{\infty}(E, \mu)$ la suite $(X_n(f); f \in \mathscr{F})$ converge en loi dans $C(\mathscr{F})$ vers le processus $(Y(f); f \in \mathscr{F})$. En particulier $E \sup \{Y^2(f); f \in \mathscr{F}_{\delta}\} \leqq C(\delta^2 U_j + B_j V_j)$.*

L'hypothèse additionnelle de compacité dans $L^{\infty}(E, \mu)$ entraîne la séparabilité de $C(\mathscr{F})$ qui nous permet d'utiliser le critère de tension de [1] et d'éviter de la sorte les problèmes de mesurabilité (voir, par exemple [20]). Aprés un changement d'espace nous obtenus la convergence en probabilité des processus le lemme de Fatou permet donc de conclure la preuve du théorème II.6..

Le théorème II.6. réglant le problème de l'oscillation du processus gaussien Y, nous pourrons dans la suite des applications données dans ce travail éviter d'y faire allusion. Des méthodes comme celle de Dudley-Fernique, développées par exemple par Massart [20], permettraient d'obtenir des oscillations bien meilleures pour la partie gaussienne mais n'amélioreraient pas globalement nos résultats.

Remarques. Lorsque les fonctions de base $(f_k)_{k \in \mathbb{K}}$ sont uniformément bornées par c:

$$U_j \leqq c^{2\sigma} \operatorname{Card} N_j, \qquad V_j \leqq c^{2\sigma} \sum_{k \notin N_j} \theta_k^{-1} .$$

Ce cas sera celui des estimations à noyaux.

Le théorème II.6 montre que seule l'oscillation des processus X_n intervient dans l'inégalité du théorème II.1.

III. Tests d'uniformité sur une variété riemannienne compacte

Notre object est ici d'étendre au cas d'une suite de variables stationnaire et fortement mélangeant [8] les tests donnés par Giné [12], dans le cas indépendant, basés sur des normes de Sobolev d'une variété riemannienne compacte, X; les tests considérés rejettent l'hypothèse d'uniformité de la loi v de la suite de variables aléatoires $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ que nous supposons stationnaire et fortement mélangeante pour de grandes valeurs de la statistique:

$$T_n^{(s)}(\{a_k\})(\omega) = n\,\|(\Sigma\, a_k \sigma_k^{s/2} \pi_k)(v_n(\omega)-\mu)\|_{-s}^2 \quad \text{où} \quad v_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\xi_k(\omega)},\ (a_k)$$

désigne une suite telle que $\operatorname*{Sup}_k |a_k \sigma_k^{s/2}| < \infty$, (σ_k) est la suite des valeurs propres, rangées par ordre croissant, de l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ, $\|\cdot\|_{-s}$ désigne la norme de Sobolev d'indice négatif tel que $s > (\dim X)/2$, enfin π_k désigne la projection orthogonale de $L^2(X,\mu)$ sur le sous-espace propre E_k associé à la valeur propre σ_k pour l'opérateur Δ. Rappelons que si $(f_i;\ i \in I)$ désigne une base de $L^2(X,\mu)$ formée de fonctions propres pour Δ, nous pouvons écrire:

$$T_n^{(s)}(\{a_k\})(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \sum_{f_i \in E_k} \left[\int_X f_i\, d(v_n(\omega)-\mu)\right]^2.$$

Pour obtenir un test d'uniformité, nous considérerons dans le § 2 le processus défini sur la boule unité fermée B_s de l'espace de Sobolev $H_s(X)$ d'indice s par:

$$Z_n^v(f) = \int_X f\, d(v_n(\omega)-v)\,\sqrt{n},$$

qui correspond au cas d'une loi marginale v pour la suite $(\xi_k)_{k\geqq 0}$.

Nous montrerons la convergence de Z_n^v vers un processus gaussien Z^v sur la boule B_s qui est un compact de $C(X)$. Nous renvoyons à Giné [12] et à Helgason [14] pour les résultats et définitions concernant les espaces de Sobolev $H_s(X)$ et $H_{-s}(X)$.

1. *Théorème limite pour la loi empirique*

Nous considérons le processus gaussien Z^v sur B_s, centré et de covariance:

$$\Gamma(f,g) = \int \left(f - \int f dv\right)\left(g - \int g dv\right) dv + \sum_{k=1}^{\infty} E((f(\xi_0) - Ef(\xi_0))(g(\xi_k)$$
$$- Eg(\xi_k)) + (f(\xi_k) - Ef(\xi_k))(g(\xi_0) - Eg(\xi_0)))$$

Les répartitions fini-dimensionnelles du processus Z_n^v convergent lorsque: $\exists \sigma \in]0, \frac{1}{3}]$, $\Sigma\, \alpha_n^\sigma < \infty$ (resp. $\Sigma\, \phi_n^{1/2} < \infty$ dans le cas ϕ-mélangeant).

Pour montrer la convergence de Z_n^ν vers Z^ν , il reste à montrer sa tension. D'après [1], il suffit de voir que Z_n est platement concentré:

$F_n = \{A \in C(B_s);\ A$ linéaire sur $H_s(X)$, $Af_i = 0$ si $f_i \in E_k$ pour $k = 0$ ou $k > n\}$

$F_n^\varepsilon = \{A \in C(B_s);\ d(A, F_n) < \varepsilon$ et A est linéaire sur $H_s(X)\}$

$M_n^\varepsilon = \{A \in C(B_s);\ A$ linéaire sur $H_s(X)$, $(Af_0)^2 + \sum_{n+1}^{\infty} \sum_{f_i \in E_k} (A\tilde{f}_i)^2 < \infty$, $\tilde{f}_i = \sigma_k^{-s/2} f_i$, si $f_i \in E_k\}$

Alors $M_n^\varepsilon \subset F_n^\varepsilon$ et donc:

$$\mathbb{P}(Z_r^\nu \in F_n^\varepsilon \geqq \mathbb{P}(Z_r^\nu \in M_n^\varepsilon \geqq 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{n+1}^{\infty} \sum_{f_i \in E_k} (Z_r^\nu(\tilde{f}_i))^2 \geqq \varepsilon^2\right)$$

$$\geqq 1 - \varepsilon^{-2} \sum_{n+1} \sigma_k^{-s} \sum_{f_i \in E_k} E(Z_r^\nu(f_i))^2$$

Ainsi l'inégalité de mélange montre, comme l'a fait Giné dans le cas indépendant, la tension du processus dans le cas φ-mélangeant. Dans le cas fortement mélangeant,

$$\mathbb{P}(Z_r^\nu \in F_n^\varepsilon) \geqq 1 - \varepsilon^{-2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \sigma_k^{-s} \frac{2}{r} \sum_{j=0}^{r} (r-j) \sum_{f_i \in E_k} E(f_i(\xi_0) - Ef_i(\xi_0))(f_i(\xi_j) - Ef_i(\xi_j)).$$

La série donnée dans le membre de droite est le reste de celle définissant:

$$\frac{2}{r} \sum_{j=0}^{r} (r-j) E(\delta_{\xi_0} - E\delta_{\xi_0}, \delta_{\xi_j} - E\delta_{\xi_j})_{-s}$$

L'interversion des limites est justifiée par le théorème de convergence dominée et l'inégalité

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \sigma_k^{-s} \sum_{f_i \in E_k} E\,|f_i(\xi_0) - Ef_i(\xi_0)|\,|f_i(\xi_j) - Ef_i(\xi_j)| \leqq E\,\|\delta_{\xi_0} - E\delta_{\xi_0}\|_{-s}^2.$$

De plus Giné montre que $x \to \|\delta_x\|_{-s}$ est une application bornée. Enfin, l'inégalité de mélange fort dans un espace de Hilbert [7] montre qu'un majorant de l'expression est $\frac{90}{r} \sum_{j=0}^{r} (r-j)\,\alpha_j^\sigma (E\,\|\delta_{\xi_0} - E\delta_{\xi_0}\|_{-s}^{2/(1-\sigma)})^{1-\sigma}$.

La série considérée est donc convergente, cela assure que $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(Z_r^\nu \in F_n^\varepsilon) = 1$, uniformément par rapport à r.

Remarque. La famille de processus (Z_r^ν) est en fait tendue lorsqu'elle est indexée par n et par l'ensemble des lois de suites de variables aléatoires stationnaires de loi ν telle que $\nu \ll \mu$, $\left\|\frac{d\nu}{d\mu}\right\|_\infty \leqq b$ et fortement mélangeantes telles que $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^\sigma \leqq a$.

Théorème III.1. *La suite de processus $(Z_n^\nu(f))_{f \in B_s}$ converge vers le processus gaussien $(Z^\nu(f))_{f \in B_s}$ centré et de covariance Γ lorsqu'il existe $0 < \sigma \leqq \frac{1}{3}$ tel que $\sum_{n=0} \alpha_n^\sigma < \infty$.*

2. Tests d'uniformité

Les statistiques $T^{(s)}$ s'écrivent sous la forme $\|\psi(n^{1/2}(v_n - v))\|_{-s}^2$ où ψ désigne l'opérateur linéaire continu sur $H_{-s}(X)$ défini par $\psi(\sigma_k^{s/2} f_i) = a_k \sigma_k^s f_i$ pour f_i dans E_k.

La norme de cet opérateur est majorée par $\sup_k |a_k \sigma_k^{s/2}| < \infty$ mais cet opérateur est aussi continu sur $H_s(X)$. Considérons, avec Giné, l'application h continue sur $C(B_s)$ et définie par $h(A) = \operatorname{Sup}\{|A_0 \psi(f)|;\ f \in B_s\}$; nous remarquons que $h^2(Z_n^v) = T_n^{(s)}(\{a_k\})$. Ainsi, le théorème de Prohorov entraîne, grâce au théorème III.1, a:

Proposition III.2. *Si* $\operatorname{Sup}_k |a_k \sigma_k^{s/2}| < \infty$, *alors, sous les hypothèses du théorème III.1., la statistique* $T_n^{(s)}(\{a_k\})$ *converge en loi vers* $T^{(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \sum_{f_i \in E_k} (Z^\mu(f_i))^2$, *sous l'hypothèse* $v = \mu$.

Ce résultat peut être précisé de la manière suivante lorsque le mélange est de type géométrique, pour un champ fortement mélangeant [10],

$$\mathbb{P}(T_n^{(s)} > t) - \mathbb{P}(T^{(s)} > t) = 0\,(n^{\varepsilon - 1/12}).$$

Ici $\varepsilon > 0$ *est arbitrairement petit.*

Corollaire III.3. *Les tests basés sur le rejet de l'hypothèse d'uniformité pour de grandes valeurs de* $T_n^{(s)}(\{a_k\})$ *sont consistants contre toute alternative* v *telle que* v *n'est pas orthogonale à tout* E_k *tel que* $a_k \neq 0$.

Pour obtenir la loi limite de $T_n^{(s)}$ lorsque la loi n'est pas uniforme, nous en considérons l'expression suivante:

$$T_n^{(s)}(\{a_k\}) = \frac{1}{n} \int_X \left(\sum_{j=0}^{n-1} g(x, \xi_j) \right)^2 \mu(dx),$$

où
$$g(x, y) = \sum_k a_k \sum_{f_i \in E_k} f_i(x) f_i(y).$$

Définissant $r(u) = \int_X g(u, v)\, v(dv)$ où v désigne la loi marginale commune aux ξ_j, il vient

$$\begin{aligned} n^{-1/2}\left(T_n^{(s)}(\{a_k\}) - n \int r^2(x) \mu(dx)\right) &= \int \left(n^{-1/2} \sum_{j=0}^{n-1} (g(x, \xi_j) - Eg(x, \xi_j)) \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(x, \xi_j) + r(x) \right) \mu(dx) \\ &= \int S_n(x) (R_n(x) + r(x)) \mu(dx) \end{aligned}$$

Ici S_n est un élément de $L^2(X, \mu)$ vérifiant les conditions du théorème de limite centrale dans un espace de Hilbert [7] lorsque le mélange vérifie $\exists \varepsilon > 0$, $\alpha_n = O(n^{-3-\varepsilon})$.

La loi limite de S_n est une gaussienne centrée, et $\|R_n - r\| = n^{-1/2} \|S_n\| \to O$ en probabilité. La loi limite de l'expression considérée plus haut est donc la gaussienne $N(O, \sigma^2)$ où $\sigma^2 = 4\Sigma(r, r)$ et Σ est la covariance de la gaussienne limite de S_n; en fait:

$$\sigma^2 = 4\Big(\int \Big(\int g(x,y)\, r(x)\, \mu(dx)\Big)^2 \nu(dy) - \Big(\int r^2(x)\, \mu(dx)\Big)^2 \\ + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \int s(x)\, s(y)\, (\nu_j(dx, dy) - \nu(dx)\, \nu(dy))$$

où ν_j désigne la loi marginale du couple (ξ_0, ξ_j) et $s(x) = \int g(x,y)\, r(y)\, \mu(dy)$.

Proposition III.4. *Si ν désigne le loi marginale de la suite (ξ_j) et vérifie qu'il existe k avec $a_k \neq 0$ et $\pi_k(\nu) \neq 0$, alors si $(\exists \varepsilon > 0)$, $\alpha_n = O(n^{-3-\varepsilon})$ quand $n \to \infty$) la loi de $n^{-1/2}(T_n^{(s)}(\{a_k\}) - ET_n^{(s)}(\{a_k\}))$ converge vers une gaussienne centrée de variance σ^2.*

Pour conclure ce résultat, il reste à remarquer que le terme de centrage choisi est convenable car

$$n^{-1/2}\Big(ET_n^{(s)} - n \int r^2(x)\, \mu(dx)\Big) = E \int S_n(x)\, (R_n(x) + r(x))\, \mu(dx).$$

3. *Principe d'invariance faible*

Nous supposons dans ce § la variété X homogène.

Nous utilisons la méthode décrite au § II pour montrer un principe d'invariance faible pour le processus $(Z_n(f); f \in B_s)$; nous supposons que la densité de la loi ν de ξ_0 par rapport à μ est bornée. Utilisons le théorème II.5 pour évaluer l'oscillation de ce processus. Dans le cadre de ce résultat nous avons ici $E = F = X$, $\mathscr{F} = B_s$ et $\mathbb{K} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{i; f_i \in E_j\}$ de plus $\operatorname{Sup}\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^s \sum_{f_i \in E_j} (f, f_i)^2;\ f \in B_s\Big\} = 1$ par définition de la norme de $H_s(X)$ ainsi $\sigma_j^s c_i^2 \leqq 1$ si $f_i \in E_j$, de plus nous posons $\theta_i = \sigma_j^s$ si $f_i \in E_j$. Vérifions d'abord les hypothèses du lemme II.4:

(i) $$\sum_{k \in \mathbb{K}} c_k^2 < \infty \text{ car } \Sigma\, \sigma_j^{-s} \dim E_j < \infty \quad \text{(cf. [12])}.$$

(ii) $$T \leqq \int \Bigg(\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{-s} \Bigg(\sum_{f_i \in E_j} f_i^2(x)\Bigg)\Bigg)^{1/(1-\sigma)} \mu(dx);$$

$$\operatorname*{Sup}_{\mathscr{F}} \Bigg(\sum_{k \in \mathbb{K}} (f, f_k)^2\, \theta_k\Bigg) = \operatorname{Sup}(\|f\|_s^2;\ f \in B_s) = 1$$

de plus [12] donne le résultat suivant sur les fonctions zonales:

$$\sum_{f_i \in E_j} f_i^2(x) = \dim E_j \quad \text{ainsi} \quad T \leqq \Bigg(\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{-s} \dim E_j\Bigg)^{1/(1-\sigma)} < \infty, \quad \text{pour } s > (\dim X)/2.$$

Ainsi $N_j = \bigcup_{\ell=1}^{L(j)} \{i; f_i \in E_\ell\}$ vérifie les conditions du lemme II.4 sous les hypothèses de mélange. Evaluons à présente les quantités intervenant dans l'énoncé du théorème II.5

$$B_j \leqq \operatorname{diam} \mathscr{F}_\delta \leqq 2, \quad U_j = \sum_{\ell=1}^{L(j)} \dim E_\ell, \quad V_j = \sum_{\ell=L(j)+1}^{\infty} \sigma_\ell^{-s} \dim E_\ell.$$

Les évaluations du moment d'ordre 2 sont donc dans les deux cas:

$$x(L,\delta)=C\left(\delta^2\sum_{\ell=1}^{L}\dim E_\ell+2\sum_{\ell=L+1}^{\infty}\sigma_\ell^{-s}\dim E_\ell\right),\quad \text{où}\quad L=L(j).$$

Dans le cas de la sphère S^d, Berger et al. [3] donnent des valeurs explicites: $\sigma_k=k(d+k-1)$ et $\dim E_k=\binom{d+k}{k}-\binom{d+k-1}{k-1}$ ce qui permet d'évaluer:

$$\sum_{\ell=1}^{L}\dim E_\ell=\binom{d+L}{L}-1\simeq\frac{L^d}{d!}\quad\text{et}\quad\sum_{\ell=L+1}^{\infty}\sigma_\ell^{-s}\dim E_\ell\simeq\frac{1}{d!(2s-d+1)}L^{\frac{1}{2s-d}}.$$

Ainsi $\operatorname*{Inf}_L x(\delta,L)=O(\delta^{2-d/s})$, de plus $N_2(B_s,\delta)=O\left(\exp\left[\frac{2^d}{d!}\delta^{-d/s}(\log 2-\log\delta)\right]\right)$; en effet on peut voir que $N_2(B_s,\delta)=\left(\frac{2}{\delta}\right)^{D(\delta)}$ où $D(\delta)=\sum_{1}^{L(\delta)}\dim E_\ell$ et $L(\delta)$ vérifie $\sigma^s_{L(\delta)}\geqq\frac{4}{\delta^2}$.

Ce résultat peut toutefois être généralisé, bien que le cas des sphères semble devoir satisfaire la majorité des besoins en statistiques.

Réordonnant les valeurs propres $\{\lambda_k, k\geqq 1\}$ de sorte que chacune soit comptée avec son ordre de multiplicité ($\dim E_j$), un résultat de Minakshisundaram et Pleijel [21] montre que $\lambda_k k^{-2/d}$ converge lorsque k tend vers l'infini. Posant $k=\sum_{\ell=1}^{L}\dim E_\ell$, nous voyons que l'expression à optimiser devient $x(L,\delta)=C(\delta^2 k+k^{1-2s/d})$, ainsi $E\sup_{\mathscr{F}_\delta}X_n^2(f)\leqq Cte\,\delta^{2-d/s}$.

Pour montrer un principe d'invariance il nous fait à présent évaluer l'entropie L^2 de B_s. Celle-ci est de la forme $N_2(\delta,B_s)=O((2/\delta)^{k(\delta)})$ où $k(\delta)$ est le plus petit entier k tel que $\lambda_k^s\geqq 4\delta^{-2}$; d'après [21], $k(\delta)=O(\delta^{-d/s})$.

Théorème III.5. *Supposons la suite $(\xi_\ell)_{\ell\geqq 0}$ fortement mélangeante et telle qu'il existe $0<b<\frac14$, $0<\sigma\leqq\frac15$ tels que $\Sigma n^2\alpha_n^\sigma<\infty$ et $\operatorname*{Sup}_n n^v\alpha_n^\sigma<\infty$ pour $v=-\frac{8}{15}+\frac{2}{3b}$ alors on peut reconstruire une suite $(Y_n(f); f\in B_s)$ de processus gaussiens de même loi que Z défini au §III.2 et telle que:*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{f\in B_s}|Z_n(f)-Y_n(f)|>\varepsilon_n\right)<\varepsilon_n$$

où $$\varepsilon_n=C(\log n)^{-(2s-d)/(3d)}(\log\log n)^{s/d}.$$

Notons que l'exposant de $(\log n)^{-1}$ tend vers l'infini avec la régularité, s, du problème. Une vitesse de type logarithmique n'était pas inattendue compte tenu de la nature exponentielle de l'entropie $L^2(X,\mu)$ de B_s.

Remarque. Enfin nous voyons avec Dehling (proposition 9.1, [6]) qu'une loi du logarithme itéré bornée a lieu lorsque $s>2d$: $\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{X_n(f)}{\sqrt{2\log\log n}}\leqq c \text{ p.s.};\ \forall f\in B_s\right\}$. Ici c est une constante qui ne dépend que de $H_s(X)$ et du mélange, en effet

Dehling écrit cette constante sous la forme $c=4c_1\sigma$ où $\sigma^2=\sup_n E\sup_{f\in B_s} X_n^2(f)$ et σ^2 est évalué grâce au théorème II.5.

4. *Principe d'Invariance dans le cas du cercle*

Dans le cas du cercle, Beran [2] a proposé des tests basés sur des processus du type $X_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(f(x+\xi_k)-1)$, où f est liptschitzienne.

Nous pouvons étudier le cas du processus $X_n(f)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k)-Ef(\xi_k))$ lorsque $f\in \mathrm{Lip}_\alpha([0,2\pi])$ pour $1\geqq\alpha>\frac{1}{2}$ avec $f(0)=f(2\pi)$, $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt=0$ et $(\xi_k)_{k\geqq 0}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[0,2\pi]$ strictement stationnaire et telle que la loi de ξ_0 soit dominée par la mesure de Lebesgue sur $[0,2\pi]$ de sorte que sa densité soit bornée.

Utilisons le théorème II.5 avec $E=F=[0,2\pi]$,

$$\mathscr{F}_\alpha=\left\{f=[0,2\pi]\to\mathbb{R};\, f(0)=f(1),\ \int_0^{2\pi} f(t)\,dt=0,\quad \forall x,y,\ |f(x)-f(y)|\leqq|x-y|^\alpha\right\},$$

$$f_0(x)=(2\pi)^{-1/2};\quad f_{2k}(x)=\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}};\quad f_{2k+1}(x)=\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}.$$

Dans ce cas Dehling [6] montre en utilisant [24] que: $\forall f\in\mathscr{F}_\alpha$, $\forall x\in[0,2\pi]$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(f,f_k)f_k(x),\ \sum_{k=N}^{\infty}\theta_k((f,f_{2k})^2+(f,f_{2k+1})^2)<CN^{1/2-\alpha}\quad\text{où}\quad \theta_k=k^{\alpha+1/2}.$$

Les hypothèses du théorème II.5 (i) sont alors réalisées avec:

$$B_j\leqq CN_j^{1/2-\alpha},\ \operatorname*{Sup}_j V_j<\infty,\ U_j=N_j\quad\text{si}\quad\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^\sigma<\infty$$

ainsi $E\sup_{\mathscr{F}_\delta} X_n^2(f)\leqq\delta^2N+N^{1/2-\alpha}$ expression optimisée par $E\sup_{\mathscr{F}_\delta} X_n^2(f)=O(\delta^\beta)$ avec $\beta=2(2\alpha-1)/(2\alpha+1)$; de plus Lorentz [18] montre que l'entropie en norme infinie de $\mathscr{F}$ est $O(\exp c\delta^{-1/\alpha})$. Nous obtenons ainsi le:

Théorème III.6. *Supposons la suite $(\xi_k)_{k\geqq 0}$ strictement stationnaire fortement mélangeante à valeurs dans $[0,2\pi]$ et de loi à densité bornée telle que:*

$$\exists b\in]0,\tfrac{1}{4}[,\quad\exists\sigma\in]0,\tfrac{1}{5}],\ \sum_{n=0}^{\infty}n^2\alpha_n^\sigma<\infty,\ \sup_n n^v\alpha_n^\sigma<\infty\quad\text{où}\quad v=\frac{2}{3b}-\frac{8}{15}.$$

Alors on peut reconstruire une suite Y_n de processus gaussiens de même loi que Y telle que $\mathbb{P}(\sup\{|X_n(f)-Y_n(f)|;\ f\in\mathscr{F}_\alpha\}\geqq\varepsilon_n)\leqq\varepsilon_n$ où $\varepsilon_n=O((\log n)^{-\gamma})$, $\gamma=\frac{2\alpha(2\alpha-1)}{3(2\alpha+1)}$.

Remarquons que la vitesse de convergence obtenue peut paraître modeste (elle est de l'ordre de $(\log n)^{-2/9}$ pour $\alpha=1$); elle est toutefois d'un ordre supérieur à celle obtenue par Dehling [6] qui n'obtient que des majorations de l'ordre de $(\log\log n)^{1/2}$.

Toutefois les résultats de Dehling étant des principes forts, ils ne peuvent être directement comparés aux nôtres.

Dans le même cadre nous nous intéressons comme Kuelbs et Philipp [17] à l'espace S:

$$S=\left\{f\in C(0,2\pi);\ f=\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \quad \text{où} \quad \sum c_n^2\, n(\log n)^4 \leqq 1\right\}.$$

Nous remarquons que la convergence de la série a lieu pour tout x de $[0,2\pi]$ et que $S\supset \bigcup_{\alpha>1/2} \mathscr{F}_\alpha$ où $\mathscr{F}_\alpha$ est défini plus haut.

L'énoncé du théorème II.5 donne dans le cas d'un mélange fort

$$E\operatorname*{Sup}_{S_\delta} X_n^2(f)\leqq C\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-3} \quad \text{si il existe} \quad \sigma\in\left]0,\tfrac{1}{3}\right] \quad \text{tel que} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^\sigma<\infty.$$

L'entropie L^2 de S se calcule comme celle de B_s au § III.3.

$N_2(\delta,S)=O(\exp c\delta^{-2}(\log\frac{1}{\delta})^{-3})$ quand $\delta\to 0$, pour un réel $c>0$. Des calculs analogues aux précédents montrent le:

Théorème III.7. *Sous les hypothèses du théorème III.6 nous pouvons reconstruire une suite Y_n gaussienne telle que:* $\mathbb{P}(\operatorname{Sup}\{|X_n(f)-Y_n(f)|;\ f\in S\}\geqq\varepsilon_n)\leqq\varepsilon_n$ *avec* $\varepsilon_n=O((\log\log n)^{-1})$.

Remarquons que Kuelbs et Philipp [17] n'obtenaient, dans le cas α-mélangeant, qu'une majoration presque sûre de l'ordre de $(\log\log n)^{1/2}$ au lieu de $(\log\log n)^{-1}$ pour notre résultat. Encore une fois si ces résultats peuvent aisément être mis en parallèle ils ne sauraient être comparés car Kuelbs et Philipp donnent un résultat fort.

Notant que les vitesses obtenues dans les théorèmes 7 et 8 étant d'un ordre logarithmique en raison de l'entropie importante des classes $\mathscr{F}_\alpha$ et S, nous nous intéressons à des classes d'entropie plus raisonnable; Lorentz [18] donne d'autres exemples de calculs d'entropie, les espaces $\Lambda_{p\alpha}$ de fonctions différentiables donnent elles aussi des vitesses logarithmiques $(O((\log n)^{-\gamma})$ et les espaces de fonctions analytiques ont, en général, une entropie de l'ordre de $\exp\lambda(\log 1/\delta)^2$. Dans ces deux cas nous ne pouvons atteindre de vitesse en $n^{-\gamma}$ c'est pourquoi il ne semble pas utile d'ajouter de tels énoncés. Par contre si nous fixons $f\in\mathscr{F}_\alpha$ nous pouvons considérer la classe $\mathscr{F}(f)$ des translatées de la fonction obtenue à partir de f prolongée avec une périodicité de 2π qui admet pour entropie en norme infinie:

$$N(\delta,\mathscr{F}(f))=O(\delta^{-1/\alpha})$$

$$\mathscr{F}(f)=\{f_x;\ x\in[0,2\pi[\} \quad \text{où} \quad f_x(t)=\begin{cases} f(x+t), \text{ si } x+t\in[0,2\pi] \\ f(x+t-2\pi), \text{ sinon, pour } t\in[0,2\pi]\end{cases}$$

Théorème III.8. *Sous les hypothèses du théorème III.6, nous pouvons reconstruire une suite Y_n gaussienne telle que*

$$\mathbb{P}(\sup\{|X_n(f_x)-Y_n(f_x)|;\ x\in[0,2\pi]\}\geqq\varepsilon_n)\leqq\varepsilon_n$$

où

$$\varepsilon_n=O(n^{-\gamma}\log^{1/2}n)\ \textit{avec}\ \gamma=\frac{5(1-b)\alpha(2\alpha-1)}{12(10\alpha^2+19\alpha+12)}$$

Notons ici que:

$$X_n(f_x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(g(x+\xi_k)-Eg(x+\xi_k))\quad \text{où}\quad g(x)=f\left(x-2\pi\left[\frac{x}{2\pi}\right]\right).$$

Si, de plus, $f\in C^p([0,2\pi])$ nous obtenons la vitesse $n^{-\gamma}\log^{1/2}n$ avec $\gamma=\frac{4}{3}\frac{(1-b)(2p-1)}{62p-1}$; notons que $\lim_{p\to\infty}\gamma=4(1-b)/93\simeq(1-b)/23$ et pour $\alpha=1$, $\gamma\simeq(1-b)/86$.

IV. Estimation non paramétrique à noyau

Soit u une fonction à support compact K_0, de classe C^p et d'intégrale 1 définie sur $\mathbb{R}^d$, nous estimons la densité g de la loi marginale d'une suite $(\xi_k)_{k\geqq 0}$ strictement stationnaire et fortement mélangeante à l'aide de $\hat{g}_n$:

$$\hat{g}_n(x)=\frac{1}{nh_n^d}\sum_{k=1}^{n}u\left(\frac{x-\xi_k}{h_n}\right).$$

Nous introduisons, avec les notations du paragraphe II, la classe $\mathscr{F}_h=\{u_{h,x};\ x\in K\}$ où $u_{h,x}(t)=u((x-t)/h)\,h^{-d/2}$ et K est un compact de $\mathbb{R}^d$. Si K et K_0 sont des parallélipipèdes de $\mathbb{R}^d$, le support hK_0+K de $u_{h,y}$ en est aussi un; nous considérons la base trigonométrique $(f_{h,k})_{k\in\mathbb{N}^d}$ de $L^2(F,\mu)$ où $F=hK_0+K$ et μ est la mesure de Lebesgue.

Alors $(u_{h,x},\ f_{h,k})^2_{L^2(F)}\leqq C_p h^{-d(2p-1)}\|k\|^{-2p}$ où $\|k\|=\sup\{k_1,\dots,k_d\}$ si $k=(k_1,\dots,k_d)$. Posons $\theta_k=\|k\|^a$ dans le théorème II.5, sous les conditions $d+1<a<2p-d-1$ nous obtenons: $U_j\leqq CL_j^d$ si

$$N_j=[0,L_j]^d\cap\mathbb{N}^d,\ C=\sup\{|f_{h,k}(x)|;\ 0<h<1,\ k\in\mathbb{N}^d,\ x\in\mathbb{R}^d\}$$
$$V_j\leqq Cte\,CL_j^{d+1-2p},\ B_j\leqq Cte\,C_p h^{-d(2p-1)}/(2p-d-1).$$

Ainsi $E\sup_{\mathscr{F}_{h,\delta}}X_n^2(f)\leqq Cte(\delta^2L_j^d+c_p h^{-d(2p-1)}L_j^{d+1-2p})$ où $c_p=C_p/(2p-d-1)$.
Cette expression est optimisée par

$$c_p^{-\varepsilon}\delta^{2(1-\varepsilon)}h^{-d^2}\quad \text{où}\quad \varepsilon=\frac{d}{2p-1},$$

$$c_p=c\frac{\|u^{(p)}\|_\infty^{2d}}{(2\pi)}(2\pi)^{-2dp}\lambda(hK_0+K)^{2(p-1)}(2p-d-1)^{-1}$$

où c est une constante indépendante de u, h, p et $\lambda(hK_0+K)$ est la mesure de Lesbesgue de cet ensemble.

L'entropie de $\mathscr{F}_h$ est $O(h^{-(1+d/2)}\delta^{-d})$ uniformément en h ce qui conduit à l'évaluation de la distance de Prohorov P_n, sous les hypothèses du théorème II.2.a.:

$$P_n \leqq Cte\left[\delta^{5d/8} h^{-5(d+2)/16} n^{(b-1)/12}\left(\log^{1/2} n+\log^{1/2}\frac{1}{\delta}+\log^{1/2} k^{-1}\right)\right.$$
$$\left.+c_p^{-\varepsilon/3} h^{-d^2/3}\delta^{2(1-\varepsilon)/3}\right].$$

Théorème IV.1. *Soit (ξ_k) une suite fortement mélangeante stationnaire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} n^2\alpha_n^\sigma<\infty$ et $\sup_n \alpha_n^{2\sigma} n^v<\infty$ pour $v=\frac{2}{3b}-\frac{8}{15}$ pour un couple $b,\sigma>0$ avec $b<\frac{1}{4}$, $\sigma\leqq\frac{1}{5}$. Soit d'autre part u un noyau de classe C^p à support compact comme défini plus haut. On peut reconstruire une suite de processus gaussiens $\{Y_{n,h}(x),\ x\in K\}$ telle que*

$$\mathbb{P}\left(\operatorname*{Sup}_{x\in K}|X_{n,h}(x)-Y_{n,h}(x)|\geqq\varepsilon_n\right)\leqq\varepsilon_n$$

où

$$X_{n,h}(x)=(nh^d)^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\left[u\left(\frac{x-\xi_k}{h}\right)-Eu\left(\frac{x-\xi_k}{h}\right)\right]$$

$\varepsilon_n=O((\log n)^{1/2}n^{-w})$ *pour*

$$w=(4(1-\varepsilon)(1-b)-a(15d^3+(1-\varepsilon)(32d^2+15(d+2)))/(45d+48(1-\varepsilon)),$$

$\varepsilon=\dfrac{d}{2p-1}$ *lorsque* $h=h_n=O(n^{-a})$ *pour* $a<\dfrac{4(1-b)(1-\varepsilon)}{15d^3+(1-\varepsilon)(32d^2+15(d+2))}=a_0$

Remarquons que $X_{n,h_n}(x)=\sqrt{nh_n^d}\,(\hat g_n(x)-E\hat g_n(x))$, par conséquent si de plus $\int P(x)u(x)\,dx=0$ pour tout polynôme P de degré $<p$ tel que $P(0)=0$ nous obtenons $\operatorname*{Sup}_{x\in K}|E\hat g_n(x)-g(x)|=O(h_n^p)$. Ainsi si: $X^0_{n,h_n}(x)=(nh_n^d)^{1/2}(\hat g_n(x)-g(x))$ vérifie le même principe d'invariance faible que X_{n,h_n} avec $\varepsilon_n^0=\varepsilon_n+n^{1/2}h_n^{p+d/2}$, l'approximation est donc convergente lorsque $a_0>1/2p+d$.

Notons de plus que $Y_{n,h}$ est un processus gaussien défini dans §II indexé par $K\subset\mathbb{R}^d$ dont la loi ne dépend que de h et non pas de n. Cette loi ne converge pas lorsque $h\to 0$.

La méthode de calcul de l'oscillation conduit aussi au:

Théorème IV.2. *Soit $(\xi_k)_{k\geqq 0}$ une suite fortement mélangeante telle que $\Sigma\alpha_n^\sigma<\infty$ pour un $0<\sigma\leqq\frac{1}{3}$, et u un noyau à support compact tel que $\int P(x)u(x)\,dx=P(0)$ pour tout polynôme de degré $(p-1)$ sur $\mathbb{R}^d$; alors si la suite (ξ_k) est strictement stationnaire et si la densité g de ξ_0 est de classe C^p sur un voisinage d'un compact K de $\mathbb{R}^d$ alors:*

$$E\sup\{|\hat g_n(x)-E\hat g_n(x)|^2;\ x\in K\}\leqq C_p n^{-1}h_n^{-(d^2+d)}$$
$$E\sup\{|\hat g_n(x)-g(x)|^2;\ x\in K\}\leqq C_p' n^{-2p/(2p+d^2+d)}\quad si\quad h_n=cn^{-1/(2p+d^2+d)}$$

où C_p et C_p' sont des constantes dépendant de u, g et du mélange.

Dans [8] nous évaluons $\sup E(\hat{g}_n(x)-g(x))^2$, la vitesse obtenue pour $h_n = cn^{-1/(2p+d)}$ est $n^{-2p/(2p+d)}$; pour $p=2$, $d=1$ le théorème IV.2 donne une vitesse de l'ordre de $n^{-1/3}$ alors que le risque quadratique est de l'ordre de $n^{-2/3}$.

Considérons à présent le cas suivant: soit $\xi_k=(\zeta_k, \eta_k)$ une suite fortement mélangeante et stationnaire vérifiant les conditions du théorème IV.1. Nous posons: si $\zeta_k \in \mathbb{R}$, $\eta_k \in \mathbb{R}^d$, $D_n(x)=\frac{1}{nh_n^d}\sum_{k=1}^{n} u\left(\frac{x-\eta_k}{h_n}\right)$,

$$g_n(x)=\frac{1}{nh_n^d}\sum_{k=1}^{n}\zeta_k u\left(\frac{x-\eta_k}{h_n}\right), \quad r_n(x)=\frac{g_n(x)}{D_n(x)} \quad \text{si} \quad D_n(x)\neq 0, \ (=0 \text{ sinon}).$$

H Nous supposons la densité D de la loi de η_0 de classe C^p sur un voisinage d'un compact K de même que $r(x)=E(\xi_0/\eta_0=x)$, qui est supposée exister. Nous supposons aussi $2\delta=\operatorname{Inf}\{D(x);\ x\in K\}>0$, $E|\zeta_0|^{4/(1-\sigma)}<\infty$

Alors: $\mathbb{P}\left(\operatorname{Inf}_K |D_n|\leqq \delta\right)\leqq \frac{c}{\delta^2}\theta(h_n,n)$, où $\theta(h,n)=n^{-1}h^{-(d^2+d)}+h^{2p}$, d'après le théorème 2.

Considérons les classes suivantes associées à $E=\mathbb{R}^e\times\mathbb{R}^d$, $F=r(K)\times(hK_0+K)$ et les familles orthonormales $\{\varphi_k^i\}$ suivantes:

$\mathscr{F}_h^i=\{s_{x,h}^i;\ x\in K\}$, pour $i=1,2$ où $s_{x,h}^1(v,w)=vh^{-d/2}\,u\left(\frac{x-w}{h}\right)$ et

$\{\varphi_k^1\}=\{\mathrm{Id}\otimes f_{h,k}, k\}$ et $s_{x,h}^2(v,w)=(v-r(x))\,h^{-d/2}\,u\left(\frac{x-w}{h}\right)$ et

$\{\varphi_k^2\}=\{\mathrm{Id}\otimes f_{h,k}\}\cup\{1\otimes f_{h,k};\ k\}$.

Ces classes admettent les mêmes propriétés que $\mathscr{F}_h$ ce qui conduit à des résultats analogues aux théorèmes 1 et 2, associés à des processus $Y_{n,h}^1$ et $Y_{n,h}^2$ gaussiens vérifiant:

$$\mathbb{P}\left(\operatorname{Sup}_{x\in K}|(nh_n^d)^{1/2}(g_n(x)-Eg_n(x))-Y_{n,h_n}^1(x)|\geqq\varepsilon_n\right)\leqq\varepsilon_n.$$

$$\mathbb{P}\left(\operatorname{Sup}_{x\in K}|(nh_n^d)^{1/2}D(x)(z_n(x)-Ez_n(x))-Y_{n,h_n}^2(x)|\geqq\varepsilon_n\right)\leqq\varepsilon_n,$$

où $z_n(x)=(g_n(x)-r(x)D_n(x))/D(x)$.

Les valeurs de ε_n sont les mêmes que celles données dans le théorème IV.1. Notons à présent que:

$$r_n-r=\frac{1}{DD_n}((g_n-g)(D-D_n)+rD(D_n-D)^2)+z_n.$$

Nous en déduisons que:

$$\mathbb{P}\left(\operatorname{Sup}_{x\in K}|(nh_n^d)^{1/2}(r_n-r)-Y_{n,h_n}^3(x)|\geqq\varepsilon_n'\right)\leqq\varepsilon_n' \quad \text{où} \quad Y_{n,h_n}^3(x)=\frac{1}{D(x)}Y_{n,h_n}^2(x)$$

$$\text{et où} \quad \varepsilon_n'=\varepsilon_n/(2\delta)+3\,c/2\,\theta(h_n,n).$$

Les covariances Γ_n^i de Y_{n,h_n}^i sont données par:

$$\Gamma_n^3(x,y)=(D(x)D(y))^{-1/2}\,\Gamma_n^2(x,y) \quad \text{où, pour} \quad i=1 \quad \text{et} \quad i=2,$$

$$\Gamma_n^i(x,y)=\tfrac{1}{2}(\Gamma_n^i(x+y,x+y)-\Gamma_n^i(x,x)-\Gamma_n^i(y,y)),$$

$$\Gamma_n^i(x,x)=E(s_{x,h_n}^i(\xi_0)-Es_{x,h_n}^i(\xi_0))^2 + \sum_{k=1}^{\infty} E(s_{x,h_n}^i(\xi_0)-Es_{x,h_n}^i(\xi_0))(s_{x,h_n}^i(\xi_k)-Es_{x,h_n}^i(\xi_k))$$

Théorème IV.3. *Sous les hypothèses du théorème IV.1., si les conditions précédentes H, sont réalisées on peut construire des processus Y_{n,h_n}^i $(i=1,3)$ tels que*

$$P\left(\sup_K |(nh_n^d)^{1/2}(g_n-g)-Y_{n,h_n}^1|\geqq \varepsilon_n\right)\leqq \varepsilon_n$$

$$P\left(\sup_K |(nh_n)^{1/2}(r_n-r)-Y_{n,h_n}^3|\geqq \varepsilon_n\right)\leqq \varepsilon_n$$

où ε_n est donné dans le théorème IV.1 avec, de plus $a>(2p+d)^{-1}$.

Théorème IV.4. *Sous les hypothèses du théorème IV.2. nous obtenons une évaluation analogue du moment d'ordre 2 du* sup *sur K de g_n-Eg_n et g_n-g.*

Notons que la division par D_n qui n'est pas nécessairement positif exclut de conclure pour le cas de r_n. Remarquons de plus que le système orthonormal $\{\varphi_k^i\}$ utilisé n'est pas complet dans $L^2(\mathscr{F},\mu)$ mais que toutefois l'espace qu'il engendre contient $\mathscr{F}_h^i$, $i=1$ ou 2 ainsi les évaluations d'oscillations des théorèmes II.5 et II.6 s'étendent ipso facto.

Remarques. La même méthode permet d'obtenir un principe d'invariance faible pour l'estimation de la fonction caractéristique à l'aide de la fonction caractéristique empirique.

Au lieu de considérer le développement en série de Fourier de f nous aurions pu considérer des troncatures de son intégrale de Fourier; de cette facon des noyaux à support non compacts tels que le noyau gaussien aurient pu être utilisés. Pour cela il faut écrire des analogues continus, c'est-à-dire portant sur des intégrales, du lemme II.4 et des théorèmes II.5 et II.6, qui s'écrivent aisément.

Bibliographie

1. De Acosta, A.: Existence and convergence of probability measures on Banach spaces. Trans. Am. Math. Soc. **152**, 273–298 (1970)
2. Beran, R.J.: Asymptotic theory of a class of test for uniformity of a circular distribution. Ann. Math. Statist. **40**, 1196–1206 (1969)
3. Berger, P., Gauduchon, P., Mazet, E.: Le spectre d'une variété riemannienne. Lect. Notes Math. **194**. Berlin Heidelberg New York: Springer 1971
4. Bickel, P.J., Rosenblatt, M.: On some global measures of the deviations of density function estimates. Ann. of Statist. **1**, 1071–1095 (1973)
5. Billingsley, P.: Convergence of probability measures. New York: Wiley 1968
6. Dehling, H.: Limit theorems for sums of weakly dependent Banach space valued random variables. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **63**, 393–432 (1983)

7. Dehling, H., Philipp, H.: Almost sure invariance principles for weakly dependent vector valued random variables. Ann. Probab. **10**, 689–701 (1982)
8. Doukhan, P., Portal, F.: C.R. Acad. Sci. Paris Série I, **297**, 129–132 (1983)
9. Doukhan, P., Portal, F.: Principe d'invariance faible pour la fonction de répartition empirique ... Prob. Math. Stat. Vol. 8, Fasc. 2 (1987)
10. Doukhan, P., Leon, J., Portal, F.: C.R. Acad. Sci. Paris Série I, **298**, 305–308, (1984)
11. Doukhan, P., Leon, J., Portal, F.: Calcul de la vitesse de convergence dans le théorème central limite vis à vis des distances de Prokhorov, Levy et Dudley dans le cas de variables aléatoires dépendantes. Probab. and Math. Statist. Vol. 6, Fasc. 1, pp. 19–27 (1985)
12. Gine, E.: Invariant tests for uniformity on compact Riemannian manifolds based on Sobolev norms. Ann. Statist. **3**, 1243–1266 (1975)
13. Gorodetski, V.V.: On the strong mixing property for linear sequences. Theor. Probab. Appl. **XXII**, 411–413 (1977)
14. Helgason, S.: Differential geometry and symetric spaces. New York: Academic Press 1962
15. Ibragimov, I.A., Rozanov, Yu A.: Gaussian random processes. Berlin Heidelberg New York: Springer 1978
16. Komlos, J., Májor, P., Tusnády, G.: An approximation of partial sums of independent r.v.'s and the sample d.f. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **32**, 111–131 (1975)
17. Kuelbs, J., Philipp, W.: Almost sure invariance principles for partial sums of weakly dependent B-valued random variables. Ann. Probab. **8**, 1003–1036 (1980)
18. Lorentz, G.G.: Approximation of functions. New York: Holt Rinehart and Winston 1966
19. Marcus, M., Philipp, W.: Almost sure invariance principles for sums of B-valued random variables with applications to random Fourier series and the empirical characteristic process. Trans. Am. Math. Soc. **269**, 67–90 (1982)
20. Massart, P.: C.R. Acad. Sci. Paris Série I, **296**, 937–940 (1983)
21. Minakshisundaram, S., Pleijel, A.: Some properties of the eigenvalues of the Laplace. Operator on Riemannian manifolds. Canad. J. Math. **1**, 242–256 (1943)
22. Mokkadem, A.: Le modèle AR(1) général. Ergodicité et ergodicité géométrique. C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, **301**, 889–892 (1985)
23. Nummelin, E., Tuominen, P.: Geometric ergodicity of Harris recurrent Markov chains. Stoch. Proc. Appl. **12**, 187–202 (1982)
24. Zygmund, A.: Trigonometric series. Warsawa: Lwow 1935

Reçu le 18 Mars 1985; en forme révisée le 6 Octobre 1986