Probab. Th. Rel. Fields 74, 617–635 (1987)

Probability Theory and Related Fields

Etude asymptotique des enlacements du mouvement brownien autour des droites de l'espace

J.F. Le Gall et M. Yor

Université P. et M. Curie, Laboratoire de Calcul des Probabilités, 4, Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France

Summary. The existence of a joint asymptotic distribution for the windings of a three-dimensional Brownian motion around a finite number of straight lines is obtained. This complements the recent studies, by Pitman-Yor, and the authors, of the joint asymptotic distribution for the windings of planar Brownian motion around a finite number of points.

The following principle governs the passage from results in the plane to results in space:

Let B be a three-dimensional Brownian motion, and $P_1, \dots, P_k$, k planes which intersect two by two. Then, the convergences in distribution concerning the planar Brownian motions B^i $(1 \leqq i \leqq k)$, defined respectively as the orthogonal projections of B on P_i $(1 \leqq i \leqq k)$, take place jointly, and the corresponding limit variables are independent.

1. Introduction

Dans tout ce travail, B désigne un mouvement brownien à valeurs dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ et chacune des droites D que l'on considère ne contient presque sûrement pas B_0.

(1.1) Si D est une droite orientée, tout plan P orthogonal à D est muni d'une orientation naturelle. On définit alors l'enlacement de B autour de la droite orientée D en choisissant une détermination continue de l'angle réalisé par la projection orthogonale de B sur le plan P autour du point où la droite D perce le plan P. Dans la suite, nous ne considérerons que des droites orientées, et, en conséquence, nous omettrons l'adjectif «orientées». En outre, nous ferons la convention suivante: lorsque nous considérerons plusieurs droites parallèles, nous supposerons toujours qu'elles ont la même orientation.

En réponse à une question de L. Dubins, nous étudions ici la distribution asymptotique du p-uplet $(\theta_t^1, \dots, \theta_t^p)$ des enlacements de B autour de p droites $D^1, \dots, D^p$.

(1.2) Les études asymptotiques des nombres de tours d'un mouvement brownien plan autour de p points (cf: Spitzer [8] pour $p=1$, et Pitman-Yor [7], Le Gall-Yor [4], pour p quelconque) se traduisent immédiatement comme suit en termes d'enlacements autour de droites:

• si $(\theta_t, t \geqq 0)$ désigne l'enlacement de B autour d'une droite D fixée, on a:

$$\frac{2}{\log t} \theta_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} C \tag{1.a}$$

où C est une variable qui suit la loi de Cauchy de paramètre 1;

• plus généralement, si $D_1, \ldots, D_p$ sont p droites parallèles, on a:

$$\frac{2}{\log t} (\theta_t^i;\ 1 \leqq i \leqq p) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} \xi_p \equiv (W_T + L_T(U) C^i;\ 1 \leqq i \leqq p) \tag{1.b}$$

où $C^1, \ldots, C^p$ sont p variables de Cauchy de paramètre 1;
W est un mouvement brownien réel issu de 0;
U est un mouvement brownien réfléchi issu de 0;
$T = \inf\{t\colon U_t = 1\}$, et $L_T(U)$ est le temps local en 0 de U jusqu'à l'instant T;
enfin, $C^1, \ldots, C^p$, W et U sont indépendants.

(1.3) Par contre, dans le cas général où $(D^1, \ldots, D^p)$ ne sont pas parallèles, il est nécessaire de procéder à une nouvelle étude, que nous résumons par le théorème suivant, lequel constitue le résultat principal de ce travail.

Théorème 1. *Soient $\{\mathscr{D}_i = (D_i^j; j \leqq p_i);\ i \leqq k\}$ k ensembles de droites parallèles, correspondant à k directions distinctes, c'est-à-dire:*
– pour tout i, et tous $j, j' \leqq p_i$, D_i^j et $D_i^{j'}$ sont parallèles;
– pour tous i, i', avec $i \neq i'$, et tous j, j', D_i^j et $D_{i'}^{j'}$ ne sont pas parallèles.
On note, pour tout $i \leqq k$, $\theta_t^{\mathscr{D}_i} = (\theta_t^{D_i^j};\ j \leqq p_i)$. Alors:

$$\frac{2}{\log t} (\theta_t^{\mathscr{D}_i};\ 1 \leqq i \leqq k) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} (\xi_{p_i}^i;\ 1 \leqq i \leqq k), \tag{1.c}$$

le vecteur limite étant distribué comme suit:

• *les variables $(\xi_{p_i}^i)_{i \leqq k}$ sont indépendantes;*
• *pour tout i, $\xi_{p_i}^i$ est distribuée comme la variable ξ_{p_i} introduite en* (1.b).

Soulignons en particulier que, si $(D, \ldots, D^p)$ sont deux à deux non parallèles, on a alors, en conséquence de (1.c):

$$\frac{2}{\log t} (\theta_t^{D^1}, \ldots, \theta_t^{D^p}) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} (C^1, \ldots, C^p) \tag{1.c'}$$

les variables $(C^i)_{i \leqq p}$ étant indépendantes, et suivant chacune une loi de Cauchy de paramètre 1.

(1.4) La clé de notre démonstration de (1.c) réside dans l'application d'une version asymptotique du théorème de Knight sur les martingales continues orthogonales (Knight [2]); pour justifier l'application de ce résultat, nous montrons que, à un terme négligeable devant $(\log t)$ près, les enlacements de B autour d'une droite D donnée ont lieu à l'intérieur d'un cône de révolution d'axe D, et d'ouverture $\varepsilon(>0)$ pouvant être choisie aussi petite que possible.

D'une certaine manière, les cônes jouent, dans l'obtention du résultat (1.c), un rôle assez comparable à celui joué par les disques dans l'obtention de (1.b).

(1.5) En complément à notre étude principale, résumée dans le théorème 1, nous étudions:

- d'une part, la distribution asymptotique des enlacements autour de droites, à l'extérieur de cônes axés sur ces droites;
- d'autre part, la distribution asymptotique des enlacements autour d'une droite, qui ont lieu à l'intérieur de certaines surfaces (comprenant en particulier les cônes).

En outre, les arguments développés dans la démonstration du théorème 1 permettent de démontrer sensiblement plus que ce théorème, et en particulier d'énoncer (cf: paragraphe (2.5)) un principe général d'indépendance des lois limites relatives aux mouvements browniens plans B^i $(1 \leqq i \leqq k)$, projections orthogonales respectives de B sur P_i $(1 \leqq i \leqq k)$, k plans deux à deux non parallèles.

Pour fixer les idées, disons que les théorèmes limites pour un mouvement brownien plan auxquels il est fait allusion dans l'énoncé de ce principe sont ceux étudiés en [7] et [4].

(1.6) Comme le lecteur peut s'en douter, ce travail étant dans le prolongement de [7] et [4], divers points de nos démonstrations empruntent à [7] et [4] certains de leurs arguments. Néanmoins, de façon à ne pas présupposer une trop grande familiarité du lecteur avec [7] et [4], nous avons présenté de façon autonome et en détail les arguments nécessaires pour démontrer nos résultats dans le cas de droites 2 à 2 non parallèles, puis indiqué succinctement la démonstration dans le cas général en renvoyant alors le lecteur à [7] et [4].

2. Démonstration du théorème 1

(2.1) Nous faisons tout d'abord quelques remarques importantes concernant l'étude asymptotique de l'enlacement de B autour d'une droite D.

On peut supposer en toute généralité que D est la droite $\{x=y=0\}$.

$(\theta_t, t \geqq 0)$ désignant toujours l'enlacement de B autour de D, nous introduisons, pour tout $\varepsilon>0$, les processus:

(2.a) $$\theta_t(\varepsilon)=\int_0^t d\theta_s 1_{(B_s \in \Gamma_\varepsilon)} \quad \text{et} \quad \bar{\theta}_t(\varepsilon)=\int_0^t d\theta_s 1_{(B_s \notin \Gamma_\varepsilon)}$$

où $\Gamma_\varepsilon \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon (x^2+y^2)^{1/2} \leqq \varepsilon |z|\}$ est le cône de révolution d'axe D, de sommet $(0,0,0)$ et d'ouverture ε.

Nota bene. Dans la suite, nous ferons fréquemment l'abus de notation consistant à toujours désigner par $\theta_t(\varepsilon)$, resp: $\bar{\theta}_t(\varepsilon)$, les enlacements partiels à l'intérieur, resp: à l'extérieur, d'un cône de révolution d'axe D et d'ouverture ε, mais dont on ne précise pas le sommet. □

La proposition 1 ci-dessous donne de nombreuses informations supplémentaires par rapport à l'assertion assez grossière, quoique très utile, suivante:

à l'ordre de $(\log t)$, les enlacements de B autour de D ont lieu à l'intérieur du cône Γ_ε, c'est-à-dire:

(2.b) $$\text{pour tout } \varepsilon>0, \quad \frac{1}{\log t}(\theta_t-\theta_t(\varepsilon)) \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} 0.$$

Proposition 1. 1) *Pour tout* $\varepsilon>0$, $\frac{1}{\log t}\langle\bar{\theta}(\varepsilon)\rangle_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} \psi(\varepsilon)\equiv\frac{1}{2}\log\frac{(1+\varepsilon^2)^{1/2}+1}{(1+\varepsilon^2)^{1/2}-1}$;

2) $$\frac{1}{\sqrt{\log t}}\left(\bar{\theta}_t\left(\frac{1}{\varepsilon}\right);\, \varepsilon>0\right) \xrightarrow[t\to\infty]{(\text{d.f.})} \left(\eta\left(\psi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right);\, \varepsilon>0\right)$$

où $(\eta(h), h\geqq 0)$ *est un mouvement brownien réel issu de* 0, *et* (d.f.) *indique la convergence étroite des marginales de rang fini (en la variable* $\varepsilon>0$).

(2.2) La proposition 1 jouant un rôle fondamental dans la démonstration du théorème 1, il nous a paru important de présenter l'énoncé général suivant, dont découle immédiatement la proposition 1. Auparavant, rappelons que par hypothèse la droite D ne contient pas B_0, donc en particulier $B_0\neq 0$ p.s.

Proposition 2. *On note* $\sigma(d\mu)$ *la probabilité uniforme sur la sphère unité*

$$\Sigma=\{\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\in\mathbb{R}^3:\ \mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2=1\}.$$

Soit $f\colon \Sigma\to\mathbb{R}$ *telle que* $\int\sigma(d\mu)|f(\mu)|<\infty$. *Alors:*

(2.c) $$\frac{1}{\log t}\int_1^t \frac{ds}{|B_s|^2} f\left(\frac{B_s}{|B_s|}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} \int\sigma(d\mu)f(\mu).$$

Remarque. On peut déduire de (2.c) que:

$$\frac{1}{\log t}\int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2} f\left(\frac{B_s}{|B_s|}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} \int\sigma(d\mu)f(\mu),$$

à condition que l'intégrale de 0 à 1 soit bien définie, i.e.:

$$\int_0^1 \frac{ds}{|B_s|^2}\left|f\left(\frac{B_s}{|B_s|}\right)\right|<\infty, \quad \text{p.s.}$$

Cette dernière condition sera clairement satisfaite dans nos applications mais peut être en défaut pour certaines fonctions satisfaisant seulement $\int\sigma(d\mu)|f(\mu)|<\infty$: voir Pitman-Yor [9].

Démonstration. (i) Nous montrons tout d'abord (2.c) pour $f\equiv 1$.

On se ramène aisément à montrer que, si (B_t^0) est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$ issu de 0, alors: $\frac{1}{\log t}\int_1^t \frac{ds}{|B_s^0|^2} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} 1.$

Soit $a>1$. On peut appliquer le théorème ergodique à l'expression:

$$\frac{1}{N}\int_1^{a^N}\frac{ds}{|B_s^0|^2}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} C\circ T^k,$$

où $C=\int_1^a \frac{ds}{|B_s^0|^2}$, et $B_s^0(T\omega)\equiv\frac{1}{a^{1/2}}B_{as}^0$ $(s\geqq 0)$, ce qui entraîne (2.c) pour $f=1$, lorsque l'on a vérifié l'égalité: $E\left(\frac{1}{|B_1^0|^2}\right)=1$.

(ii) Le même argument, appliqué maintenant à $C^f=\int_1^a \frac{ds}{|B_s^0|^2} f\left(\frac{B_s^0}{|B_s^0|}\right)$ permet d'obtenir:

$$\text{(2.c')}\qquad \frac{1}{\log t}\int_1^t \frac{ds}{|B_s|^2} f\left(\frac{B_s}{|B_s|}\right)\xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} E\left[\frac{1}{|B_1^0|^2} f\left(\frac{B_1^0}{|B_1^0|}\right)\right].$$

Or, les variables $|B_1^0|$ et $\frac{B_1^0}{|B_1^0|}$ sont indépendantes, et $\frac{B_1^0}{|B_1^0|}$ est uniformément distribuée sur la sphère. La convergence (2.c') équivaut donc à (2.c).

(iii) Une seconde démonstration possible de (2.c) consiste à faire le changement de temps inverse de $C_t=\int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2}$, et à utiliser la factorisation de B en skew-product:

$$B_t=|B_t|\,\mathscr{U}_{C_t},$$

où $(\mathscr{U}_t, t\geqq 0)$ est un mouvement brownien standard sur la sphère.

On a alors:

$$\frac{1}{\log t}\int_1^t \frac{ds}{|B_s|^2} f\left(\frac{B_s}{|B_s|}\right)=\frac{1}{\log t}\int_{C_1}^{C_t} du\, f(\mathscr{U}_u),$$

et on obtient (2.c) en utilisant conjointement le résultat (i) et le théorème ergodique pour le mouvement brownien sur la sphère. □

Appliquons maintenant la proposition 2 à l'étude asymptotique de l'enlacement $(\theta_t, t\geqq 0)$ autour de la droite $D=\{x=y=0\}$. Rappelons tout d'abord que si l'on note X, Y et Z les trois composantes de B dans le repère $0xyz$, on a:

$$d\theta_t=(X_t^2+Y_t^2)^{-1/2}\,dW_t,$$

où $(W_t, t\geqq 0)$ désigne un mouvement brownien réel, et donc:

$$d\langle\theta\rangle_t=(X_t^2+Y_t^2)^{-1}\,dt.$$

D'autre part, si $a=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, et $\mu=\frac{a}{|a|}\equiv(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$, on a, pour toute fonction $h\colon \Sigma\to\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{(x^2+y^2)}h(\mu)=\frac{1}{|a|^2}\frac{1}{(\mu_1^2+\mu_2^2)}h(\mu).$$

Notons $m(d\mu)=\frac{\sigma(d\mu)}{\mu_1^2+\mu_2^2}$. On a alors, pour toute fonction $f\in L^2(m)$

$$\text{(2.d)}\qquad \frac{1}{\log t}\left\langle\int_1^{\cdot} d\theta_s f\left(\frac{B_s}{|B_s|}\right)\right\rangle_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} \int m(d\mu)\, f^2(\mu),$$

d'où l'on déduit, en écrivant la martingale $\int_1^t d\theta_s f\left(\frac{B_s}{|B_s|}\right)$ comme mouvement brownien changé de temps:

(2.e) $$\frac{1}{\sqrt{\log t}} \int_1^t d\theta_s f\left(\frac{B_s}{|B_s|}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{loi}} \|f\|_{L^2(m)} \cdot G,$$

où G désigne une variable gaussienne, centrée, réduite.

Par linéarité, on obtient le résultat multidimensionnel:

(2.f) $$\frac{1}{\sqrt{\log t}} \left(\int_1^t d\theta_s f\left(\frac{B_s}{|B_s|}\right); f \in L^2(m)\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(d.f.)}} (G_m(f), f \in L^2(m))$$

où $(G_m(f), f \in L^2(m))$ désigne la mesure gaussienne, centrée, d'intensité m, sur Σ. Lorsque l'on se restreint aux fonctions $f\left(\frac{a}{|a|}\right) = \phi\left(\frac{z}{r}\right)$, où $a=(x, y, z)$, $r=(x^2+y^2)^{1/2}$, avec $\phi \in L^2(n)$, et $n(du) = \frac{du}{2(1+u^2)^{1/2}}$, les résultats (2.d) et (2.f) deviennent, si l'on note $B=(X, Y, Z)$ et $R=(X^2+Y^2)^{1/2}$:

(2.d′) $$\frac{1}{\log t} \langle \int_1^{\cdot} d\theta_s \phi\left(\frac{Z_s}{R_s}\right) \rangle_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} \int n(du)\, \phi^2(u),$$

et

(2.f′) $$\frac{1}{\sqrt{\log t}} \left(\int_1^t d\theta_s \phi\left(\frac{Z_s}{R_s}\right), \phi \in L^2(n)\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(d.f.)}} (G_n(\phi), \phi \in L^2(n))$$

où $(G_n(\phi), \phi \in L^2(n))$ désigne la mesure gaussienne, centrée, d'intensité n, sur $\mathbb{R}$.

La proposition 1 apparaît maintenant comme une conséquence des convergences (2.d′) et (2.f′), une fois remarquée l'identité:

$$\bar{\theta}_t(\varepsilon) = \int_0^t d\theta_s \phi_\varepsilon\left(\frac{Z_s}{R_s}\right), \qquad \text{avec } \phi_\varepsilon(u) = 1_{\left(|u| \leq \frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

(2.3) Nous entreprenons maintenant la démonstration du théorème 1 dans le cas où chacune des familles $\mathscr{D}_i$ est composée d'un seul élément.

Autrement dit, dans ce paragraphe, nous allons seulement démontrer l'assertion:

(1.c′) $$\frac{2}{\log t} (\theta_t^i; 1 \leq i \leq p) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} (C^i; 1 \leq i \leq p)$$

où (θ_t^i) désigne l'enlacement de B autour de D^i, lorsque les droites D^i sont deux à deux non parallèles.

Les variables (C^i) qui figurent en (1.c′) sont indépendantes et suivent chacune une loi de Cauchy de paramètre 1.

Il a semblé judicieux de faire tout d'abord la démonstration de (1.c′) au lieu de celle de l'assertion générale (1.c), la démonstration complète de (1.c) nécessitant l'introduction des «petits angles» et «grands angles» qui jouent un rôle important dans la démonstration du résultat multidimensionnel (1.b) (voir

Messulam-Yor [6], Pitman-Yor [7], LeGall-Yor [4]), alors que la démonstration de (1.c′) peut se faire en s'appuyant essentiellement sur les arguments plus élémentaires de scaling et changement de temps qui permettent de démontrer simplement le résultat unidimensionnel (1.a) (voir également [7, 4]).

Pour démontrer l'assertion (1.c′), nous avons besoin des notations suivantes: pour tout $i \leqq p$, choisissons un plan P_i orthogonal à D^i, et soit $(R_t^i, t \geqq 0)$ la partie radiale de la projection orthogonale de B sur P_i, l'origine choisie dans P_i étant le point où D^i perce P_i.

Il existe alors deux mouvements browniens réels indépendants ω^i et ρ^i tels que:

$$\theta_t^i = \omega^i(H_t^i); \qquad \log R_t^i = \rho^i(H_t^i), \qquad \text{avec } H_t^i = \int_0^t \frac{ds}{(R_s^i)^2}.$$

Il nous faut encore introduire l'opérateur de scaling, de paramètre $c>0$, agissant sur un processus générique $(U_t, t \geqq 0)$:

$$\text{pour } c>0, \text{ on pose: } U_t^{(c)} = \frac{1}{c} U_{c^2 t} \qquad (t \geqq 0).$$

Enfin, on définit: $T(U) = \inf\{t \geqq 0 \colon U_t = 1\}$. Il a été remarqué en [7] et [4] que l'on a:

$$\text{(2.g)} \qquad \frac{2}{\log t} \theta_t^i - \omega^{i,(c)}(T(\rho^{i,(c)})) \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} 0, \qquad \text{avec } c \equiv \frac{\log t}{2}.$$

Ce résultat jouant un rôle important par la suite, nous rappelons sa démonstration: par définition de ω^i, on a: $\frac{2}{\log t} \theta_t^i = \omega^{i,(c)}\left(\frac{1}{c^2} H_t^i\right)$ et la démonstration de (2.g) se ramène à celle de:

$$\text{(2.g}'\text{)} \qquad \frac{1}{c^2} H_t^i - T(\rho^{i,(c)}) \xrightarrow[(c\to\infty)]{(P)} 0.$$

On a, en ne faisant plus apparaître l'indice i, et en notant $S_s^{(c)} = \sup_{u \leqq s} (\rho_u^{(c)})$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} H_t &= \frac{1}{c^2} \inf\left\{u \colon \int_0^u ds \exp(2\rho_s) > t\right\} = \inf\left\{u \colon \log\left(c^2 \int_0^u ds \exp(2c\rho_s^{(c)})\right) > \log t\right\} \\ &= \inf\left\{u \colon \frac{1}{2c} \log \int_0^u \exp(2c\rho_s^{(c)}) ds > 1 - \frac{\log c}{c}\right\}.\end{aligned}$$

On conclut alors en remarquant que: $\frac{1}{2c} \log \int_0^u \exp(2c\rho_s^{(c)}) ds - S_u^{(c)} \xrightarrow[c\to\infty]{(P)} 0$. (2.g) montre que l'assertion (1.c′) est une conséquence du résultat plus général suivant:

$$\text{(2.h)} \qquad (\rho^{i,(c)}; \omega^{i,(c)}; 1 \leqq i \leqq p) \xrightarrow[c\to\infty]{(d)} (\tilde{\rho}^i; \tilde{\omega}^i; 1 \leqq i \leqq p)$$

les $(2p)$ mouvements browniens réels $(\tilde{\rho}^i; \tilde{\omega}^i; 1 \leqq i \leqq p)$ étant indépendants et satisfaisant $\tilde{\rho}_0^i = \tilde{\omega}_0^i = 0$. (d) indique ici la convergence étroite des lois sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, muni de la topologie de la convergence compacte.

Pour démontrer (2.h), nous nous appuierons essentiellement sur une version asymptotique du théorème de Knight sur les martingales continues orthogonales [2]. La version présentée dans le lemme 1 ci-dessous est un cas particulier des énoncés figurant en [7] et [4].

Rappelons tout d'abord que, si $(M_t, t \geqq 0)$ est une martingale locale continue telle que $M_0=0$, et $\langle M\rangle_\infty=\infty$, il existe un mouvement brownien réel $(\beta_t, t\geqq 0)$, que nous dirons associé à (M_t), tel que: $M_t=\beta_{\langle M\rangle_t}$ $(t\geqq 0)$.

Lemme 1. *Soient $(M^1, \dots, M^k)$ k martingales locales continues, nulles en 0, définies sur un espace de probabilité filtré, et telles que: $\langle M^1\rangle_\infty=\dots=\langle M^k\rangle_\infty=\infty$. On note $\beta^1, \dots, \beta^k$ les mouvements browniens associés respectivement à ces martingales. Alors, s'il existe une fonction ρ: $]1, \infty[\to]0, \infty[$ telle que:*

(a) *pour tout $i\leqq k$,* $\dfrac{1}{\rho(t)}\langle M^i\rangle_t \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} \infty$,

(b) *pour tous i,j, avec $i\neq j$,* $\dfrac{1}{\rho(t)}\int_0^t |d\langle M^i, M^j\rangle_s| \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} 0$,

les mouvements browniens $(\beta^i;\ 1\leqq i\leqq k)$ sont asymptotiquement indépendants, au sens suivant: $(\beta^{i,(c)};\ 1\leqq i\leqq k)\xrightarrow[c\to\infty]{(d)}\gamma$ où γ désigne un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, issu de 0.

Nous montrons maintenant (2.h) en appliquant le lemme 1 aux martingales locales $\theta^1, \dots, \theta^p$, $\log R^1, \dots, \log R^p$ avec $\rho(t)=(\log t)^{1+m}$, pour $\frac{1}{2}<m<1$. Par souci de concision, nous nous restreindrons à la famille des martingales locales $(\theta^i;\ 1\leqq i\leqq p)$, les vérifications de (a) et (b) pour la famille complète $(\theta^i;\ \log R^i;\ 1\leqq i\leqq p)$ étant tout à fait semblables.

Remarquons tout d'abord que: $\dfrac{1}{\rho(t)}\langle\theta^i\rangle_t \xrightarrow[t\to\infty]{(P)}\infty$, car $\dfrac{1}{(\log t)^2}\langle\theta^i\rangle_t$ converge en loi vers une variable strictement positive (voir (2.g′) ci-dessus).

Il nous reste à montrer:

$$\text{(2.i)}\qquad \text{pour } i\neq j,\quad \frac{1}{\rho(t)}\int_0^t |d\langle\theta^i, \theta^j\rangle_s| \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} 0.$$

On utilise pour cela la décomposition: $\theta^i=\theta^i(\varepsilon)+\bar\theta^i(\varepsilon)$; $\theta^j=\theta^j(\varepsilon)+\bar\theta^j(\varepsilon)$, introduite en (2.a), et relative à un ensemble $(\Gamma^i_\varepsilon;\ i\leqq p)$ de cônes de révolution, d'ouverture ε, et d'axes respectifs D^i; les droites D^i et D^j étant non parallèles, on choisit ε suffisament petit pour que Γ^i_ε et Γ^j_ε soient disjoints. On a alors: $\langle\theta^i(\varepsilon), \theta^j(\varepsilon)\rangle=0$, et donc:

$$\langle\theta^i, \theta^j\rangle_t=\langle\bar\theta^i(\varepsilon), \theta^j(\varepsilon)\rangle_t+\langle\bar\theta^j(\varepsilon), \theta^i(\varepsilon)\rangle_t+\langle\bar\theta^i(\varepsilon), \bar\theta^j(\varepsilon)\rangle_t.$$

Par symétrie, il nous suffit de considérer:

$$\frac{1}{\rho(t)}\int_0^t \{|d\langle\bar\theta^i(\varepsilon), \theta^j(\varepsilon)\rangle_s|+|d\langle\bar\theta^i(\varepsilon), \bar\theta^j(\varepsilon)\rangle_s|\}$$
$$\leqq\frac{1}{\rho(t)}\{\langle\bar\theta^i(\varepsilon)\rangle_t^{1/2}\langle\theta^j(\varepsilon)\rangle_t^{1/2}+\langle\bar\theta^i(\varepsilon)\rangle_t^{1/2}\langle\bar\theta^j(\varepsilon)\rangle_t^{1/2}\}.$$

D'après la proposition 1, l'expression:

$$\frac{1}{\rho(t)}\langle\bar{\theta}^i(\varepsilon)\rangle_t^{1/2}\langle\bar{\theta}^j(\varepsilon)\rangle_t^{1/2}\equiv\left(\frac{1}{\rho(t)}\langle\bar{\theta}^i(\varepsilon)\rangle_t\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\rho(t)}\langle\bar{\theta}^j(\varepsilon)\rangle_t\right)^{1/2}$$

tend vers 0 en probabilité.

Il nous reste à montrer, pour prouver (2.i), que:

$$\text{(2.i')}\qquad \frac{1}{\rho(t)^2}\langle\bar{\theta}^i(\varepsilon)\rangle_t\langle\theta^j(\varepsilon)\rangle_t\xrightarrow[(t\to\infty)]{(P)}0.$$

Or, le membre de gauche de (2.i') peut être écrit sous la forme:

$$\left(\frac{1}{(\log t)}\langle\bar{\theta}^i(\varepsilon)\rangle_t\right)\left(\frac{1}{(\log t)^{1+2m}}\langle\theta^j(\varepsilon)\rangle_t\right).$$

Le premier facteur converge p.s., tandis que le second est majoré par $\frac{1}{(\log t)^{1+2m}}\langle\theta^j\rangle_t$, expression qui, avec le choix de $m>\frac{1}{2}$, converge en probabilité vers 0 (voir (2.g')).

Les convergences (2.i') et (2.i) sont finalement démontrées.

Remarque. Dans le cas particulier où les p droites D^i sont concourantes, par exemple en l'origine, on peut déduire (1.c') d'un résultat concernant le mouvement brownien sur la sphère.

En effet, la factorisation en skew-product du mouvement brownien B montre alors que les angles θ_t^i sont aussi, à un changement de temps près, les angles réalisés par un mouvement brownien sur la sphère unité, autour de p axes distincts de la sphère. D'après [4], ces derniers angles, convenablement normalisés, convergent en distribution vers p variables de Cauchy indépendantes. Ce point de vue conduit à l'interprétation suivante du fait que l'angle à l'extérieur d'un cône est négligeable: dans l'étude asymptotique de l'angle d'un mouvement brownien sur la sphère autour d'un axe, on peut négliger la contribution des tours effectués à l'extérieur de deux «petits» disques centrés aux points de contact de l'axe avec la sphère (voir [4] pour une preuve directe de cette propriété).

(2.4) Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 1 dans toute sa généralité.

Rappelons tout d'abord qu'un grand nombre de théorèmes limites concernant certaines fonctionnelles d'un mouvement brownien complexe $(W_t, t\geqq 0)$ – et, en particulier, les théorèmes limites sur les angles de W autour d'un nombre fini de points $(z_1, \dots, z_p)$ – sont des conséquences du résultat général (2.j) ci-dessous:

soit, pour tout $j\leqq p$, $(\zeta_t^j, t\geqq 0)$ le mouvement brownien complexe obtenu par changement de temps à partir de la martingale conforme:

$$\left(\int_0^t\frac{dW_s}{(W_s-z_j)}, t\geqq 0\right).$$

Alors:

$$(\zeta^{j,(h)}; j \leqq p) \xrightarrow[h\to\infty]{(d)} (\zeta^{j,(\infty)}; j \leqq p) \stackrel{\text{déf}}{=} \zeta^{(\infty)}(p) \tag{2.j}$$

et la loi de $\zeta^{(\infty)}(p)$ est caractérisée en ([7], theorem 6.2).

Retournons maintenant à la démonstration du théorème 1.

Soit, pour tout i, un plan P_i orthogonal à la direction commune des droites parallèles $(D_i^j, j \leqq p_i)$ de l'ensemble $\mathscr{D}_i$. On peut associer à chacun de ces plans, et aux points où les droites D_i^j percent P_i un processus $\zeta_i = (\zeta_i^j; j \leqq p_i)$ relatif à la projection orthogonale B^i du mouvement brownien B sur P_i. A l'aide des arguments développés en (2.3), et de ceux développés en [7] pour démontrer (2.j), on obtient aisément:

$$(\zeta_i^{(h)}; i \leqq k) \xrightarrow[h\to\infty]{(d)} (\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_k), \tag{2.k}$$

les processus $(\tilde{\zeta}_i; 1 \leqq i \leqq k)$ étant indépendants, et pour tout i, $\tilde{\zeta}_i$ étant distribué comme $\zeta^{(\infty)}(p_i)$.

Le résultat (2.k) englobe d'ailleurs (2.h), et sa démonstration est tout à fait semblable.

Or, comme il est montré en [7] et [4], la convergence en loi de $\dfrac{2}{\log t}\,\theta_t^{\mathscr{D}_i}$ vers $\xi_{p_i}^i$ est une conséquence de celle de $\zeta_i^{(h)}$ vers $\tilde{\zeta}_i$, et, le vecteur limite $\xi_{p_i}^i$ s'exprimant de façon mesurable en fonction de $\tilde{\zeta}_i$, les vecteurs $(\zeta_{p_i}^i)$ sont indépendants. Le théorème 1 est complètement démontré. □

(2.5) Au cours de la démonstration du théorème 1, nous avons montré le résultat général (2.k), qui nous permet maintenant d'énoncer le «principe général» suivant:

Soient $P_1, \ldots, P_k$ k plans deux à deux non parallèles; les convergences en loi relatives aux mouvements browniens plans B^i $(1 \leqq i \leqq k)$, projections orthogonales respectives de B sur P_i $(1 \leqq i \leqq k)$ ont lieu conjointement, et les variables limites correspondantes sont indépendantes.

Nous illustrons ce principe général au moyen de l'énoncé précis suivant, qui est une conséquence facile de (2.k).

Théorème 2. (On conserve les notations $P_i, B^i, \ldots$ ci-dessus.) 1) *Soit, pour tout $i \leqq k$, f_i: $P_i \to \mathbb{R}$ fonction bornée, à support compact. Alors:*

$$\frac{1}{\log t}\left(\int_0^t ds\, f_i(B_s^i); i \leqq k\right) \xrightarrow[t\to\infty]{(\text{loi})} \left(\frac{1}{2\pi}\bar{f}_i \mathrm{e}_i; i \leqq k\right) \tag{2.l}$$

où $\bar{f}_i$ désigne l'intégrale de f_i par rapport à la mesure de Lebesgue sur P_i, et les variables (e_i) sont des variables exponentielles indépendantes de paramètre 1.

2) *Soit, pour tout $i \leqq k$, ϕ_i: $P_i \to P_i$, fonction borélienne bornée à support compact. Alors:*

$$\left(\frac{2}{\log t}\right)^{1/2}\left(\int_0^t \phi_i(B_s^i)\cdot dB_s^i; i \leqq k\right) \xrightarrow[t\to\infty]{(\text{loi})} \left(\left(\frac{\mathrm{e}_i}{\pi}\right)^{1/2} \|\phi_i\|_2 \cdot N_i; i \leqq k\right) \tag{2.m}$$

où les variables N_i sont gaussiennes, centrées, réduites et indépendantes, les variables $\mathfrak{e}_i$ sont exponentielles, de paramètre 1, *et indépendantes, les variables* $(\mathfrak{e}_i)$ et (N_i) *sont indépendantes.*

En outre, les convergences en loi (2.l) *et* (2.m) *ont lieu conjointement, et les variables* $(\mathfrak{e}_i)$ *ont la même signification en* (2.l) *et* (2.m).

3. Compléments

(3.1) Un premier type de compléments aux résultats obtenus dans le chapitre 2, et dans le paragraphe (2.1) en particulier, consiste à étudier la distribution asymptotique des enlacements partiels $\bar{\theta}_t^D(\varepsilon)$, définis en (2.a), lorsque $t \to \infty$, et que le cône Γ_ε qui figure dans la définition de $\bar{\theta}_\cdot^D(\varepsilon)$ varie, ainsi que la droite D par rapport à laquelle on considère l'enlacement de B.

Le lemme suivant nous permettra par la suite de ne considérer que des droites passant par 0.

Lemme 2. *Soient D et D' deux droites parallèles. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, la différence*

$$\bar{\theta}_t^D(\varepsilon) - \bar{\theta}_t^{D'}(\varepsilon)$$

des enlacements partiels de B autour de D d'une part, et de D' d'autre part, qui ont lieu respectivement à l'extérieur de cônes de révolution Γ_ε et Γ'_ε d'axes D et D', et de même ouverture ε, converge p.s. lorsque $t \to \infty$.

Démonstration. L'assertion du lemme équivaut à:

$$\langle \bar{\theta}_\cdot^D(\varepsilon) - \bar{\theta}_\cdot^{D'}(\varepsilon) \rangle_\infty < \infty \qquad P\text{-p.s.}$$

Par symétrie, il suffit de montrer:

$$\int_0^\infty |d\langle \theta^D \rangle_s 1_{(B_s \notin \Gamma_\varepsilon)} - d\langle \theta^D, \theta^{D'} \rangle_s 1_{(B_s \notin \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma'_\varepsilon)}| < \infty,$$

ce qui équivaut à:

$$\text{(3.a)} \qquad \int_0^\infty d\langle \theta^D \rangle_s 1_{(B_s \in \Gamma'_\varepsilon \setminus \Gamma_\varepsilon)} < \infty,$$

et:

$$\text{(3.b)} \qquad \int_0^\infty |d\langle \theta^D \rangle_s - d\langle \theta^D, \theta^{D'} \rangle_s| 1_{(B_s \notin \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma'_\varepsilon)} < \infty.$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que:

$$D = \{x = y = 0\}; \qquad D' = \{x = 1;\ y = 0\};$$

$$\Gamma_\varepsilon = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 \leqq \varepsilon^2 z^2\}; \qquad \Gamma'_\varepsilon = \{(x, y, z) \colon (x-1)^2 + y^2 \leqq \varepsilon^2 (z-a)^2\}.$$

Pour montrer (3.a), remarquons que l'on a alors:

$$d\langle\theta^D\rangle_s = \frac{ds}{X_s^2+Y_s^2},$$

et

$$(B_s \in \Gamma'_\varepsilon \setminus \Gamma_\varepsilon) \subset \{\varepsilon|Z_s| \leqq (X_s^2+Y_s^2)^{1/2} \leqq 1+\varepsilon|a|+\varepsilon|Z_s|\}.$$

On en déduit, à l'aide d'un calcul facile:

$$E\left[\int_0^\infty \frac{ds}{X_s^2+Y_s^2} 1_{(B_s\in\Gamma'_\varepsilon\setminus\Gamma_\varepsilon)} 1_{(|B_s|\geqq 1)}\right] < \infty,$$

ce qui, compte tenu de la transience de B, entraîne (3.a).

Pour montrer (3.b), remarquons que l'on a:

$$\begin{aligned}|d\langle\theta^D\rangle_s - d\langle\theta^D, \theta^{D'}\rangle_s| &= \frac{|X_s-1|\,ds}{(X_s^2+Y_s^2)[(X_s-1)^2+Y_s^2]}\\ &\leqq \frac{ds}{(X_s^2+Y_s^2)((X_s-1)^2+Y_s^2)^{1/2}} \leqq C_\varepsilon \frac{ds}{|B_s|^3},\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant valable seulement sur l'ensemble $\{|B_s|\geqq 2;\, B_s\notin\Gamma_\varepsilon\cup\Gamma'_\varepsilon\}$, pour une certaine constante C_ε.

Finalement, (3.b) découle de la transience de B, et de ce que $\int_0^\infty \frac{ds}{|B_s|^3} < \infty$ P-p.s. □

Considérons maintenant le cas général où $D^1, \ldots, D^p$ sont p droites quelconques de l'espace. On veut montrer la convergence en distribution de:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\log t}}\,\bar\theta_t^{D^i}(\varepsilon_i);\ 1\leqq i\leqq p\right).$$

Grâce au lemme 2, on peut remplacer chaque droite D^i par la droite D'^i parallèle à D^i et passant par 0, et le cône $\Gamma^i_{\varepsilon_i}$ par le cône translaté $\Gamma'^i_{\varepsilon_i}$, de sommet 0, d'axe D'^i, et d'ouverture ε_i.

Nous allons maintenant ramener le problème à un problème équivalent sur la sphère $\Sigma\equiv\{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2=1\}$. Rappelons qu'il existe un mouvement brownien standard $(\mathscr{U}_t, t\geqq 0)$ sur la sphère tel que:

$$B_t = |B_t|\,\mathscr{U}_{C_t}, \qquad \text{où } C_t = \int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2}$$

(on garde les notations utilisées dans la démonstration de la proposition 2). De plus, si $(\alpha^{D'^i}(t), t\geqq 0)$ désigne l'angle de $(\mathscr{U}_t, t\geqq 0)$ autour de l'axe D'^i, on a:

$$\theta_t^{D'^i} = \alpha^{D'^i}(C_t). \tag{3.c}$$

Il existe en outre, pour tout axe D' de la sphère, un champ de vecteurs $(h_{D'}(\mu), \mu\in\Sigma\setminus D')$ tel que:

$$\alpha^{D'}(t) = \alpha^{D'}(0) + \int_0^t h_{D'}(\mathscr{U}_s)\cdot d\mathscr{U}_s. \tag{3.d}$$

Par exemple, si $D'=\{x=y=0\}$, on a, pour $\mu=(x,y,z)$:

$$h_{D'}(\mu)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},0\right).$$

On peut maintenant énoncer et démontrer la

Proposition 3. *Soient $D^1,\dots,D^p$ p droites de l'espace, et $D'^1,\dots,D'^p$ les axes de la sphère respectivement parallèles à $D^1,\dots,D^p$.*

Pour tout $\varepsilon>0$, on note: $\Delta^i_\varepsilon=\Sigma\cap\Gamma'^i_\varepsilon$, où Γ'^i_ε est le cône d'axe D'^i et d'ouverture ε, centré en 0. On a alors:

$$\frac{1}{\sqrt{\log t}}(\bar\theta^{D^i}_t(\varepsilon_i);\,1\leqq i\leqq p)\xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}}(G_i;\,1\leqq i\leqq p)$$

où $(G_i;\,1\leqq i\leqq p)$ est un vecteur gaussien centré dont la covariance est donnée par:

$$E[G_jG_j]=\int_{\Sigma\setminus(\Delta^i_{\varepsilon_i}\cup\Delta^j_{\varepsilon_j})}\sigma(d\mu)h_{D'^i}(\mu)\cdot h_{D'^j}(\mu).$$

Démonstration. A l'aide des relations (3.c) et (3.d), on obtient:

$$\bar\theta^{D'^i}_t(\varepsilon_i)=\int_0^{C_t}d\alpha^{D'^i}_s 1_{(\mathscr{U}_s\notin\Delta^i_{\varepsilon_i})}=\int_0^{C_t}d\mathscr{U}_s\cdot h_{D'^i}(\mathscr{U}_s)1_{(\mathscr{U}_s\notin\Delta^i_{\varepsilon_i})}.$$

D'après la partie (*i*) de la proposition 2, on a: $\frac{1}{\log t}C_t\xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}}1$, et donc, l'étude asymptotique de: $\frac{1}{\sqrt{\log t}}(\bar\theta^{D'^i}_t(\varepsilon_i);\,1\leqq i\leqq p)$ est ramenée à celle de:

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t d\mathscr{U}_s\cdot h_{D'^i}(\mathscr{U}_s)1_{(\mathscr{U}_s\notin\Delta^i_{\varepsilon_i})}.$$

La fonction $h_{D'^i}$ étant bornée sur le complémentaire de $\Delta^i_{\varepsilon_i}$, le rapport:

$$\frac{1}{t}\int_0^t ds\,h_{D'^i}(\mathscr{U}_s)\cdot h_{D'^j}(\mathscr{U}_s)1_{(\mathscr{U}_s\notin\Delta^i_{\varepsilon_i}\cup\Delta^j_{\varepsilon_j})}$$

converge p.s., en application du théorème ergodique pour le mouvement brownien sur la sphère, vers:

$$\int\sigma(d\mu)\,h_{D'^i}(\mu)\cdot h_{D'^j}(\mu)\,1_{(\mu\notin\Delta^i_{\varepsilon_i}\cup\Delta^j_{\varepsilon_j})}.$$

L'énoncé de la proposition en découle aisément. □

(3.2) Considérons à nouveau $(\theta_t,\,t\geqq 0)$ l'enlacement de B autour de la droite D: $\{x=y=0\}$. Un second type de compléments aux résultats obtenus en (2.1) consiste à étudier la distribution asymptotique de:

$$\theta_t(\Gamma^f)\equiv\int_0^t d\theta_s 1_{(B_s\in\Gamma^f)},$$

où $\Gamma^f = \{(x, y, z): (x^2+y^2)^{1/2} \leqq f(|z|)\}$, et f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction borélienne.

(3.2.1) Notre objectif initial était de déterminer sous quelle condition portant sur f les enlacements de B autour de D ont lieu, à l'ordre de $(\log t)$, à l'intérieur de l'ensemble Γ^f, c'est-à-dire:

$$\frac{1}{\log t}(\theta_t - \theta_t(\Gamma^f)) \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} 0.$$

La proposition suivante montre en particulier qu'une condition suffisante est:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\log f(\lambda)}{\log \lambda} \geqq 1. \tag{3.e}$$

Proposition 4. *Soit f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonction borélienne telle que:* $\dfrac{\log f(\lambda)}{\log \lambda} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} a_f$. *Alors:*

$$\frac{2}{\log t}\left(\int_0^t d\theta_s 1_{(B_s \in \Gamma^f)}; \int_0^t d\theta_s 1_{(B_s \notin \Gamma^f)}\right)$$

$$\Big\downarrow (t\to\infty) \ (\text{loi})$$

$$\left(\int_0^\sigma d\gamma_u 1_{(\beta_u \leqq a_f S_u)}; \int_0^\sigma d\gamma_u 1_{(\beta_u \geqq a_f S_u)}\right)$$

où β et γ désignent deux mouvements browniens réels indépendants, issus de 0, $S_u = \sup_{s\leqq u} \beta_s$, *et* $\sigma = \inf\{u: \beta_u = 1\}$.

Démonstration. 1) Pour simplifier l'écriture, nous étudions seulement la convergence en loi de: $\dfrac{2}{\log t}\int_0^t d\theta_s 1_{(B_s\in\Gamma^f)}$. Pour obtenir le résultat général, il suffit d'effectuer les manipulations ci-dessous en changeant le signe $\leqq$ qui figure dans: $R_s \leqq f(|Z_s|)$ en $\geqq$, et en faisant simultanément les transformations pour les deux expressions.

2) Comme cela a déjà été rappelé et utilisé en (2.3), il existe deux mouvements browniens réels indépendants β et γ tels que:

$$\theta_t = \gamma(H_t); \quad \log R_t = \beta(H_t), \quad \text{où } H_t = \int_0^t \frac{ds}{R_s^2}.$$

On obtient alors, en notant $c = \dfrac{\log t}{2}$:

$$\frac{2}{\log t}\theta_t(\Gamma^f) = \frac{1}{c}\int_0^{H_t} 1_{(\beta_s \leqq \log f(|Z_{\tau_s}|))} d\gamma_s,$$

où $\tau_s = \inf\{u: H_u > t\} \equiv \int_0^u ds \exp(2\beta_s)$.

Avec les notations de scaling déjà introduites en (2.3), on peut écrire:

$$\frac{2}{\log t}\,\theta_t(\Gamma^f)=\int_0^{\frac{1}{c^2}H_t} 1_{\left(\beta_s^{(c)}\leqq\frac{1}{c}\log f(|Z_{\tau_{c^2 s}}|)\right)}\,d\gamma_s^{(c)}.$$

Il nous suffit de montrer, pour terminer la démonstration de la proposition, que:

(3.f) $$\frac{1}{c^2}H_t - T(\beta^{(c)}) \xrightarrow[c\to\infty]{(P)} 0$$

(3.g) $$\text{pour tout } s,\ \frac{1}{c}\log f(|Z_{\tau_{c^2 s}}|)-a_f S_s^{(c)} \xrightarrow[(c\to\infty)]{(P)} 0,$$

en notant $S_s^{(c)}=\sup_{u\leqq s}(\beta_u^{(c)})$.

La démonstration de (3.f) a déjà été faite en (2.g′).

Montrons maintenant (3.g); on a:

(3.h) $$\frac{1}{c}\log f(|Z_{\tau_{c^2 s}}|)=\frac{a_f}{c}\log|Z_{\tau_{c^2 s}}|+\frac{1}{c}(\log|Z_{\tau_{c^2 s}}|)\left\{\frac{\log f(|Z_{\tau_{c^2 s}}|)}{\log|Z_{\tau_{c^2 s}}|}-a_f\right\}.$$

On obtient aisément, en effectuant l'opération de scaling sur Z:

(3.i) $$\frac{1}{c}\log|Z_{\tau_{c^2 s}}|-\frac{1}{2c}\log(\tau_{c^2 s}) \xrightarrow[c\to\infty]{(P)} 0.$$

D'autre part, on a:

$$\frac{1}{2c}\log(\tau_{c^2 s})=\frac{1}{2c}\log\int_0^{c^2 s} du\,\exp(2\beta_u)=\frac{1}{2c}\log\int_0^{s} du\,\exp(2c\beta_u^{(c)})+\frac{\log c}{c},$$

d'où:

(3.j) $$\frac{1}{2c}\log(\tau_{c^2 s})-S_s^{(c)} \xrightarrow[c\to\infty]{(P)} 0.$$

En utilisant conjointement (3.i) et (3.j), on obtient (3.g), à l'aide de l'identité (3.h) et de l'hypothèse faite sur f. □

(3.2.2) En nous appuyant sur la proposition 4, nous pouvons maintenant, dans le cas où la fonction f est croissante, résoudre complètement le problème posé au début du sous-paragraphe (3.2.1).

Proposition 5. *Supposons f: $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ croissante.*

L'expression: $\frac{1}{\log t}(\theta_t-\theta_t(\Gamma^f))$ converge vers 0 en probabilité lorsque $t\to\infty$ si, et seulement si, on a:

(3.e′) $$\liminf_{\lambda\to\infty}\frac{\log f(\lambda)}{\log\lambda}\geqq 1.$$

Démonstration. 1) Le fait que la condition (3.e′) soit suffisante découle aisément des arguments utilisés dans la démonstration de la proposition 4.

2) Montrons maintenant que la condition est nécessaire. Remarquons tout d'abord que, pour tout t, on a:

$$\int_0^t 1_{(B_s \notin \Gamma^f)} d\theta_s \overset{(\mathrm{loi})}{=} \left(\int_0^t \frac{ds}{R_s^2} 1_{(B_s \notin \Gamma^f)}\right)^{1/2} \cdot N,$$

où N est une variable gaussienne, centrée réduite, indépendante de $\int_0^t \frac{ds}{R_s^2} 1_{(B_s \notin \Gamma^f)}$. L'expression $\frac{1}{\log t}(\theta_t - \theta_t(\Gamma^f))$ converge donc vers 0 en probabilité si, et seulement si, il en est de même de $\frac{1}{(\log t)^2} \int_0^t \frac{ds}{R_s^2} 1_{(B_s \notin \Gamma^f)}$, ce qui équivaut, en utilisant les mêmes notations et transformations que dans la démonstration de la proposition 4, à:

$$(3.\mathrm{k}) \qquad U_c = \int_0^{T(\beta^{(c)})} du\, 1_{\left(\beta_u^{(c)} > \frac{1}{c} \log f(|Z_{\tau_{c^2 u}}|)\right)} \xrightarrow[(c\to\infty)]{(P)} 0.$$

3) Raisonnons maintenant par l'absurde. Supposons $\liminf\limits_{\lambda\to\infty} \frac{\log f(\lambda)}{\log \lambda} = a < 1$. Il existe alors b tel que $a < b < 1$, et une suite (λ_n) croissant vers $+\infty$ telle que: $\log f(\lambda_n) \leqq b(\log \lambda_n)$, c'est-à-dire: $f(\lambda_n) \leqq \lambda_n^b$.

Choisissons maintenant b' tel que $b < b' < 1$, et posons, pour tout n: $c_n = b'(\log \lambda_n)$. Remarquons ensuite que l'on a: $U_{c_n} \geqq U'_{(n)} - U''_{(n)}$, où:

$$U'_{(n)} = \int_0^{T(\beta^{(c_n)})} du\, 1_{\left(\beta_u^{(c_n)} > \frac{1}{c_n} \log \lambda_n^b\right)}$$

$$U''_{(n)} = \int_0^{T(\beta^{(c_n)})} du\, 1_{(|Z(\tau_{c_n^2 u})| > \lambda_n)}.$$

Par définition de c_n, on a: $\frac{1}{c_n} \log \lambda_n^b = \frac{b}{b'} < 1$, si bien que la suite $(U'_{(n)})$ converge en loi vers une variable non nulle.

Pour conclure, il suffit donc de montrer que $U''_{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} 0$. Or, la démonstration de la proposition 4 montre que $U''_{(n)}$ converge en loi vers: $\int_0^\sigma du\, 1_{(\beta_u \geqq \alpha S_u)}$, où $\alpha \equiv \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log \lambda_n}{c_n} = \frac{1}{b'} > 1$, ce qui entraîne que la variable ci-dessus est nulle.

(3.2.3) La proposition 5 montre que, sous l'hypothèse (3.e′), $\frac{1}{\log t}(\theta_t - \theta_t(\Gamma^f))$ converge en probabilité vers 0. Si l'inégalité large dans (3.e′) est remplacée par une inégalité stricte, on a le résultat plus précis suivant:

Proposition 6. *Soit f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonction borélienne telle que:*

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \frac{\log f(\lambda)}{\log \lambda} > 1.$$

Alors, le processus $(\theta_t - \theta_t(\Gamma^f),\ t \geqq 0)$ converge p.s. lorsque $t \to \infty$.

Démonstration. Il suffit de montrer que:

$$\langle\theta_\cdot - \theta_\cdot(\Gamma^f)\rangle_\infty = \int_0^\infty \frac{ds}{R_s^2} 1_{(R_s \geqq f(|Z_s|))} < \infty.$$

Choisissons $a > 1$ et $r > 0$ tels que, pour tout $\lambda > r$, $f(\lambda) \geqq \lambda^a$. Alors,

$$\int_0^\infty \frac{ds}{R_s^2} 1_{(R_s \geqq f(|Z_s|))} \leqq \int_0^\infty \frac{ds}{R_s^2} 1_{(|Z_s|^a \leqq R_s)} + \int_0^\infty \frac{ds}{R_s^2} 1_{(|Z_s| \leqq r)} 1_{(R_s \leqq r^a)}.$$

Le second terme du membre de droite ci-dessus est fini à cause de la transience de B. Pour voir que le premier terme est fini, on se ramène à montrer que, si $(R'_t, t \geqq 0)$ est la norme d'un mouvement brownien plan issu de 0, et $(Z'_t, t \geqq 0)$ est un mouvement brownien réel issu de 0, indépendent de R', on a:

$$\int_1^\infty \frac{ds}{R_s'^2} 1_{(|Z'_s|^a \leqq R'_s)} < \infty, \quad \text{p.s.}$$

Or, en utilisant un argument de scaling et l'inégalité grossière $P[|Z'_1| \leqq x] \leqq Cx$, on trouve:

$$E\left[\int_1^\infty \frac{ds}{R_s'^2} 1_{(|Z'_s|^a \leqq R'_s)}\right] = \int_1^\infty \frac{ds}{s} E\left[\frac{1}{R_1'^2} 1_{(|Z'_1| \leqq s^{1/2a - 1/2} R_1'^{1/a})}\right]$$
$$\leqq C \int_1^\infty \frac{ds}{s^{3/2 - 1/2a}} E\left[\frac{1}{R_1'^{2-1/a}}\right] < \infty. \quad \square$$

(3.2.4) Nous terminons ce paragraphe par les remarques suivantes:

a) Dans le cas où Γ^f est un cône, c'est-dire: $f(\lambda) = \varepsilon\lambda$, on a remarqué en (2.b) que, à l'ordre de $(\log t)$, les enlacements de B autour de D ont lieu à l'intérieur de Γ^f. Il n'en est pas de même lorsque Γ^f est la région associée à une fonction f telle que $a_f < 1$, par exemple: $f(\lambda) = \varepsilon \cdot \lambda^a$, pour laquelle: $a_f = a$.

En ce sens, le choix du cône est, d'une certaine façon, optimal.

b) Dans le cas où $f(\lambda) = \varepsilon$, on a: $a_f = 0$, et le résultat de la proposition 4 devient:

$$(3.1) \qquad \begin{array}{c} \dfrac{2}{\log t}\left(\int_0^t d\theta_s 1_{(R_s \leqq \varepsilon)};\ \int_0^t d\theta_s 1_{(R_s \geqq \varepsilon)}\right) \\ \Big\downarrow \text{(loi)} \ (t \to \infty) \\ \left(\int_0^\sigma d\gamma_s 1_{(\beta_s \leqq 0)};\ \int_0^\sigma d\gamma_s 1_{(\beta_s \geqq 0)}\right). \end{array}$$

(3.1) met en évidence la décomposition en «grand angle» et «petit angle» observée par Messulam-Yor [6], et utilisée systématiquement en [7] et [4].

c) Par ailleurs, Messulam-Yor [6] donnent une expression explicite de la transformée de Fourier conjointe de:

$$W_- = \int_0^\sigma d\gamma_s 1_{(\beta_s \leqq 0)}, \qquad W_+ = \int_0^\sigma d\gamma_s 1_{(\beta_s \geqq 0)}$$

et, plus généralement, de la transformée de Fourier-Laplace conjointe de (W_-, W_+, l_σ), où l_σ désigne le temps local en 0 de β, jusqu'à l'intant σ. On a:

$$E[\exp\{-\lambda l_\sigma + i(\mu W_- + v W_+)\}] = f(v; |\mu| + 2\lambda), \tag{3.m}$$

où

$$f(v, h) = \left(ch\, v + \frac{h}{v}\, sh\, v\right)^{-1}.$$

A ce sujet, on pourra consulter le chapitre 7 de Pitman-Yor [7] dans lequel figurent de nombreuses considérations sur la loi du vecteur limite ξ_p introduit en (1.b), la fonction caractéristique de ξ_p s'exprimant très simplement à l'aide de f.

On obtient une extension remarquablement simple de la formule (3.m) en explicitant la transformée de Fourier-Laplace conjointe de $(W_-(a), W_+(a), l_\sigma^{(a)})$ où:

$$W_-(a) = \int_0^\sigma d\gamma_s\, 1_{(\beta_s \leqq a S_s)}, \qquad W_+(a) = \int_0^\sigma d\gamma_s\, 1_{(\beta_s \geqq a S_s)}$$

et $l_\sigma^{(a)}$ est le temps local en 0 de $(\beta_u - a S_u;\ u \geqq 0)$ jusqu'à l'instant σ.

En utilisant les techniques de calculs de Knight [3] ou Jeulin-Yor [1] ou encore la théorie d'Itô des excursions, on obtient l'expression suivante: si $\bar{a} = 1 - a > 0$,

$$E[\exp\{-\lambda l_\sigma^{(a)} + i(\mu W_-(a) + v W_+(a))\}] = f(v\bar{a}; (|\mu| + 2\lambda)\bar{a})^{1/\bar{a}}. \tag{3.n}$$

La forme très simple de la formule (3.n) a suggéré certains des résultats de la note [5b]. De même que dans le cas $a = 0$, on déduit de cette formule que, pour a fixé, *conditionnellement à* $l_\sigma^{(a)}$, *les variables* $W_-(a)$ *et* $W_+(a)$ *sont indépendantes*. Ces calculs seront détaillés dans un article ultérieur [5a] où nous étudions plus généralement le *processus* $(l_\sigma^{(a)}, W_-(a), W_+(a);\ a < 1)$. Les deux dernières composantes de ce processus, ou du moins leurs composantes finidimensionnelles, apparaissent bien sûr comme lois limites dans la proposition 4, lorsque l'on considère un nombre fini de fonctions f correspondant à des constantes a_f différentes.

d) De même, il existe une version de la proposition 4 correspondant à un nombre fini de droites D.

• Lorsque les droites $D^1, \ldots, D^p$ sont deux à deux non parallèles, les processus $(W_-^i(.), W_+^i(.), i \leqq p)$ sont indépendants.

• Lorsque les droites $D^1, \ldots, D^p$ sont parallèles, le processus $(W_-^{(i)}(.), W_+^i(.);\ i \leqq p)$ est une fonctionnelle mesurable par rapport au processus $\tilde{\zeta}$ déjà évoqué en (2.4).

• Enfin, lorsque l'on considère des familles $\mathscr{D}_i = (D_i^j;\ j \leqq p_i)$ $(i \leqq k)$ de droites parallèles, correspondant à k directions distinctes, les processus $(W_\pm^{\mathscr{D}_i}(.);\ i \leqq k)$ sont indépendants, en conséquence de l'indépendance des processus $(\tilde{\zeta}_i,\ i \leqq k)$ obtenue en (2.4).

(3.3) Signalons enfin que l'on peut aisément généraliser le résultat (1.c') d'indépendance asymptotique au mouvement brownien en dimension d

supérieure à 3. En effet, soient B un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et $F_1, \ldots, F_p$ p sous-variétés affines de $\mathbb{R}^d$, de dimension $d-2$. On peut définir à nouveau, pour tout $1 \leqq i \leqq p$, l'enlacement $(\theta_t^i,\ t \geqq 0)$ de B autour de F_i. Alors, lorsque $F_1, \ldots, F_p$ sont deux à deux non parallèles, le résultat (1.c′) reste vrai. Le principe de la démonstration est exactement le même que pour $d=3$, le rôle joué alors par les cônes Γ_ε étant maintenant tenu par les ensembles G_ε définis comme suit: si F est la sous-variété affine $\{x_1 = x_2 = 0\}$, G_ε $(\varepsilon > 0)$ est l'ensemble

$$G_\varepsilon = \{(x_1, \ldots, x_d) \colon (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \leqq \varepsilon \inf\{|x_i|;\ 3 \leqq i \leqq d\}\}.$$

Une autre extension des résultats du présent article est développée dans [5c], où l'on étudie en particulier la loi asymptotique jointe des enlacements du mouvement brownien autour d'une droite et d'une courbe asymptote à cette droite. Cette étude asymptotique fait à nouveau intervenir la loi du triplet $(l_\sigma^{(a)},\ W_-(a),\ W_+(a))$, dont la transformée de Fourier-Laplace est explicitée en (3.n).

References

1. Jeulin, T., Yor, M.: Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement brownien. Sém. Probas XV. Lect. Notes Math. **850**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1981
2. Knight, F.B.: A reduction of continuous square-integrable martingales to Brownian motion. Lect. Notes Math. **190**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1971
3. Knight, F.B.: On sojourn times of killed Brownian motion. Sém. Probas XII. Lect. Notes Math. **649**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1978
4. Le Gall, J.F., Yor, M.: Etude asymptotique de certains mouvements browniens complexes avec drift. Probab. Th. Rel. Fields **71**, 183–229 (1986)

5a. Le Gall, J.F., Yor, M.: Sur certaines lois limites intervenant dans l'étude des enlacements du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. En préparation

5b. Le Gall, J.F., Yor, M.: Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. **303** (Série I, 3), 73–76 (1986)

5c. Le Gall, J.F., Yor, M.: Enlacements du mouvement brownien autour des courbes de l'espace. En préparation

6. Messulam, P., Yor, M.: On D. Williams "pinching method" and some applications. J. Lond. Math. Soc. (2), **26**, 348–364 (1982)
7. Pitman, J.W., Yor, M.: Asymptotic laws of planar Brownian motion. Ann. Probab. (special invited paper) **14**, 733–779 (1986)
8. Spitzer, F.: Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion. Trans. Am. Math. Soc. **87**, 187–197 (1958)
9. Pitman, J.W., Yor, M.: Some divergent integrals of Brownian motion. Adv. Appl. Probab., Supplement to Vol. 18, n° 4, December 1985

Reçu le 30 novembre 1985, revisé le 25 septembre 1986