

Les lois de Cauchy sur les bouts de l'arbre homogène

Claudie Hassenforder

Laboratoire du Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier,
118, Route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex, France

Sommaire. Nous définissons les lois de Cauchy sur l'espace des bouts d'un arbre homogène comme les probabilités invariantes par les sous-groupes compacts maximaux (déjà caractérisés par J. Tits) du groupe des automorphismes de l'arbre. L'article donne alors les analogues pour ces lois des résultats de Knight-Meyer et de Letac sur les lois de Cauchy dans \mathbb{R}^d .

Summary. We define the Cauchy distributions on the set of ends of the homogeneous tree as the probabilities invariant by the maximal compact subgroups of the automorphism group of the tree (the maximal subgroups have already been described by J. Tits). The paper proves the statements about these laws which are analogous to the Knight-Meyer and Letac's results on the Cauchy distributions in \mathbb{R}^d .

Introduction

L'arbre homogène tel qu'il est décrit dans la conférence de P. Cartier [5] est la source de nombreux problèmes en probabilité, qui sont des analogues de problèmes classiques sur \mathbb{Z}^d ou \mathbb{R}^d . Par exemple, Cartier [5, 6] considérait les promenades aléatoires dans les arbres et les frontières de Martin correspondantes; ce point de vue est aussi celui de Sawyer [22] et Derriennic [9]. Dans [10], Dunau examine les lois indéfiniment divisibles sur l'arbre et met en lumière le rôle de certains polynômes également considérés sous d'autres formes par Cartier [5, 7] et Sawyer [22]. Ces polynômes permettent aussi d'étudier les promenades duales sur l'arbre [18]; ainsi que les séries chronologiques [3]. Mentionnons également toute une école italienne [14, 20] qui s'intéresse à l'arbre homogène du point de vue de l'analyse de Fourier classique, et d'inégalités de normes. L'intérêt de cette école se concentre souvent sur le cas particulier d'un arbre homogène de degré q impair dont l'ensemble des sommets s'interprète comme un groupe libre non abélien à $(q+1)/2$ générateurs. A cette école on peut aussi rattacher les travaux de Pytlik [21] et de Chao [8].

Le fait que nombre de problèmes classiques puisse s'étudier sur l'arbre est dû au fait que c'est associé à un couple de Gelfand (un fait mis en lumière par Arnaud [2], après Cartier [7]).

Cet article s'inscrit donc dans cette tradition probabiliste. Cependant l'arbre homogène est aussi un sujet d'étude pour les analystes, qui le considèrent comme une sorte d'espace hyperbolique discret, très analogue au disque unité du plan complexe muni de sa métrique hyperbolique, ou à son modèle équivalent qui est le demi plan complexe de Poincaré [13].

Avant de les transposer dans l'arbre homogène, décrivons d'abord un certain nombre de résultats sur les lois de Cauchy dans \mathbb{R} et \mathbb{R}^d qui figurent dans la littérature des quinze dernières années.

Un résultat très frappant est celui de Knight :

Théorème A. *Soit G le groupe des homographies positives de \mathbb{R} , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe a, b, c, d dans \mathbb{R} avec $ad - bc > 0$ avec $g(x) = (ax + b)/(cx + d)$, et A le groupe affine de \mathbb{R} , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe (a, b) dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ avec $f(x) = ax + b$, et soit :*

$$\sigma(dx) = (\pi(1 + x^2))^{-1} dx$$

la loi de Cauchy dans \mathbb{R} . Alors si μ est une probabilité sur \mathbb{R} sans atome, on a $G_*\mu = A_*\mu$ si et seulement si la probabilité μ est dans $A_*\sigma$.

(On note $f_*\mu$ l'image de μ par f ; $A_*\mu$ est donc l'ensemble des images de μ par les éléments de A).

Il est intéressant de donner la version du théorème de Knight sur la frontière ∂D du disque unité $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. On désigne par \tilde{G} le groupe des homographies qui préservent D (= automorphismes de D pour la métrique hyperbolique); on choisit arbitrairement sur ∂D un point z_∞ qui joue le rôle de point à l'infini; on désigne par \tilde{A} le sous groupe de \tilde{G} qui préserve z_∞ . Observons que si m est la mesure de Lebesgue de masse 1 et si g est dans \tilde{G} alors $(g_*m)(d\theta)$ n'est autre que la mesure de Poisson $P_{g(0)}(\theta) d\theta$ où

$$P_{re^{i\alpha}}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \alpha) + r^2}$$

La version dans D du théorème de Knight est la réciproque de l'observation suivante $\tilde{G}_*m = \tilde{A}_*m$, c'est-à-dire que si μ est une probabilité sans atome sur ∂D telle que $\tilde{G}_*\mu = \tilde{A}_*\mu$, alors il existe z dans D tel que $\mu(d\theta) = P_z(\theta) d\theta$. Dans cette version, il semble, d'après les remarques d'un referee, que ce résultat appartienne au folklore des analystes.

Le résultat de Knight a été généralisé à \mathbb{R}^d dans différentes directions :

– Par Meyer et Knight avec $\sigma(dx) = K(1 + \|x\|^2)^{-(d+1)/2} dx$, $G =$ groupe des projectivités (c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ avec $g(x) = (Ax + b)/(cx + d)$ où $\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{R}^{d+1})$), et $A =$ groupe affine [16].

– Par Dunau et Sénateur avec $\sigma(dx) = K'(1 + \|x\|^2)^{-d} dx$, $G =$ groupe conforme $Mob(d)$ (c'est-à-dire le groupe engendré par les inversions et les symétries de \mathbb{R}^d), $A =$ groupe des homothéties-translations ou bien $A =$ groupe des similitudes-translations.

Mentionnons également une généralisation sur le groupe d'Heisenberg [11, 12].

On s'est également posé le problème inverse de trouver les fonctions $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui préservent l'ensemble de toutes les lois de Cauchy; d'après le théorème A, ces fonctions comprennent déjà toutes les homographies.

Une réponse complète est donnée dans Letac [17].

Si on considère la version sur le disque, le résultat de Letac revient à affirmer:

Si $F: \partial D \rightarrow \partial D$ est mesurable et telle qu'il existe $f: D \rightarrow D$ tel que, pour tout $z \in D$, $F_* P_z(\theta)(d\theta) = P_{f(z)}(\theta) d\theta$, alors $z \mapsto f(z)$ ou $z \mapsto f(-z)$ est une fonction intérieure (au sens de Rudin) et $F(e^{i\theta})$ est la limite presque partout de $f(re^{i\theta})$ pour $r \rightarrow 1$.

Cependant, la généralisation du problème à \mathbb{R}^d , dans un des cas particuliers cité ci-dessus, donne une classe plus réduite que pour $d = 1$. Plus précisément:

Théorème B. *Si $d \geq 2$, si G est le groupe conforme, si A est le groupe affine et si $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est telle que $F_*(A_*\sigma) \subset A_*\sigma$, alors il existe f dans G telle que $F = f$ presque partout.*

Nous allons dans cet article donner l'analogie des théorèmes A et B ci-dessus pour l'arbre homogène.

Ce qui va jouer le rôle de \mathbb{R} , ∂D ou \mathbb{R}^d est maintenant l'ensemble des bouts de l'arbre (déjà rencontré dans [7, 3, 14]). Ce qui joue le rôle de \mathbb{R}_+^2 dans [15] et [6], de D ou de \mathbb{R}_+^{d+1} dans [19] est l'ensemble des sommets de l'arbre. Ce qui joue le rôle de G groupe conforme ou \tilde{G} groupe des automorphismes du disque D est le groupe des automorphismes de l'arbre; ce qui joue le rôle du groupe affine A sur \mathbb{R} ou \mathbb{R}^d ou de \tilde{A} sur D est le sous groupe des automorphismes de l'arbre que préservent un bout fixé w_∞ . Ici on retrouve, comme dans la version sur le disque du théorème de Knight une certaine artificialité, puisqu'on choisit arbitrairement un point à l'infini sur la frontière. Enfin, ce qui joue le rôle du groupe des rotations dans [11] a maintenant deux titulaires: soit le stabilisateur d'un sommet, soit le stabilisateur d'une arête qui sont essentiellement (c'est-à-dire à conjugaison près) les deux sous groupes compacts maximaux du groupe des automorphismes de l'arbre. Ce phénomène expliquera que sur l'arbre nous aurons de notre point de vue, deux candidats au titre de loi de Cauchy sur l'espace des bouts (définitions (a) et (b) du I).

Puisqu'on va montrer un analogue pour l'arbre du théorème B et non du résultat de Letac [17], on peut dire que, du point de vue du théorème B, l'arbre homogène ressemble plus au demi espace \mathbb{R}_+^{d+1} muni de sa métrique hyperbolique [1] avec $d \geq 2$, qu'au demi espace \mathbb{R}_+^2 , ou, si on veut, plus à la boule $B = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\| < 1\}$ qu'au disque D .

Enfin il est à noter que les démonstrations sont de nature élémentaires et n'utilisent pas les fonctions sphériques de l'arbre [2].

I. Définitions et notations

Soit $(T, A(T))$ un arbre homogène de degré $q \geq 2$, c'est-à-dire un graphe d'ensemble de sommets T et d'ensemble d'arêtes $A(T)$, non orienté, connexe, sans cycle,

tel que chaque sommet appartient à $q+1$ arêtes. On définit sur T une distance en posant:

pour tout couple $(s, t) \in T^2$, $d(s, t) =$ nombre d'arêtes du chemin allant de s à t .

1. L'ensemble des bouts de l'arbre

Soit \mathcal{C} l'ensemble des chaînes (une chaîne est l'image d'une application injective de $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ dans T , $n \mapsto t_n$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{t_n, t_{n+1}\} \in A(T)$ (voir [23])).

On définit sur \mathcal{C} une relation d'équivalence par: $C \sim C'$ si et seulement si $C \cap C' \in \mathcal{C}$.

Un bout est une classe d'équivalence pour cette relation; l'ensemble des bouts, c'est-à-dire l'ensemble quotient \mathcal{C}/\sim sera noté Ω . Remarquons que pour tout w de Ω et tout s de T , il existe une chaîne et une seule $(t_n)_{n=0}^\infty$ dans \mathcal{C} telle que $t_0 = s$ et $w = \text{classe}(t_n)_{n=0}^\infty$. On notera $\{t_n\}_{n=0}^\infty = [s, w]$ et on pourra identifier les bouts et leur représentant issu d'un point fixé $s=0$ que l'on prendra pour origine.

L'ensemble Ω est muni de sa structure naturelle d'espace compact, issue de la convergence simple sur T .

On notera par Ω_t l'ensemble des bouts w dont de représentant issu de 0 passe par t . En d'autres termes, $\Omega_t = \{w \in \Omega; t \in [0, w]\}$.

2. Groupes d'automorphismes de T

Soit G le groupe des automorphismes de T (bijections de T sur lui-même préservant la distance). Tout automorphisme f de T induit sur Ω une application (que l'on notera encore f) définie par: $f(\text{classe}(t_n)_{n=0}^\infty) = \text{classe}(f(t_n))_{n=0}^\infty$.

Si $t \in T$, on pose $K_t = \{f \in G; f(t) = t\}$; si on munit G de la topologie de la convergence simple, K_t est un sous-groupe compact de G qui opère transitivement sur Ω .

Définition (a). Si $t \in T$, on note σ_t et on appelle loi de Cauchy (a) de paramètre t , l'unique probabilité sur Ω invariante par K_t .

De même, si $a = \{t_0, t_1\}$ est une arête; $K_a = \{f \in G; f(a) = a\}$ est un groupe compact qui opère transitivement sur Ω .

Définition (b). Si $a \in A(T)$, on note σ_a et on appelle loi de Cauchy (b) de paramètre a , l'unique probabilité sur Ω invariante par K_a .

Si $f: \Omega \rightarrow \Omega$ est mesurable et si μ est une probabilité sur Ω on note par $f_*\mu$ l'image de μ par f ; de même si H est un ensemble de fonctions mesurables de Ω , $H_*\mu$ est alors l'ensemble des $h_*\mu$ pour $h \in H$.

On a alors l'analogie de la préservation des lois de Cauchy dans \mathbb{R}^d par le groupe conforme [11]. (Voir Proposition 2 dans [19]). Rappelons que si $f \in G$, alors f a une action naturelle non seulement sur T , mais aussi sur Ω et sur l'ensemble $A(T)$.

Proposition 1. *Si $f \in G$, alors pour tout $t \in T$, $f_* \sigma_t = \sigma_{f(t)}$ et pour toute $a \in A(T)$, $f_* \sigma_a = \sigma_{f(a)}$.*

Démonstration. Si $g(t) = t$ alors $f(t)$ est fixe sous fgf^{-1} ; d'où $K_{f(t)} = fK_t f^{-1}$ et $K_t = f^{-1}K_{f(t)}f$. Donc, pour tout h de $K_{f(t)}$: $(f^{-1}hf)_* \sigma_t = \sigma_t$; c'est-à-dire $h_*(f_* \sigma_t) = f_* \sigma_t$; d'où, comme $\sigma_{f(t)}$ est la seule probabilité invariante par $K_{f(t)}$, $\sigma_{f(t)} = f_* \sigma_t$. On montre de même que, pour toute arête a , $\sigma_{f(a)} = f_* \sigma_a$. \square

Remarque. Si $a = \{t_0, t_1\}$, on déduit de la Proposition 1 que:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{t_0} + \sigma_{t_1}).$$

II. Caractérisation du type de Cauchy sur l'arbre homogène

Par analogie avec le cas \mathbb{R} , on introduit un groupe affine en fixant w_∞ dans Ω (qui joue le rôle de point à l'infini) et en définissant $A = \{f \in G; f(w_\infty) = w_\infty\}$. Si μ est une probabilité sur Ω , $A_* \mu$ est appelé le type de μ .

Voici l'analogie du Théorème A de l'introduction:

Théorème 1. *Soit μ une probabilité sans atome sur Ω : alors $G_* \mu = A_* \mu$ si et seulement si μ est une loi de Cauchy (a) ou (b).*

Démonstration. (1) Si μ est une loi de Cauchy (a) ou (b) alors $G_* \mu = A_* \mu$: On a $G_* \sigma_t = \{\sigma_{t'}\}_{t' \in T}$ et $G_* \sigma_a = \{\sigma_{a'}\}_{a' \in A(T)}$, car G opère transitivement sur T et sur $A(T)$. (Plus généralement, d'après [10], II, si P et P' sont deux parties de T et f une bijection de P sur P' préservant la distance, alors il existe \tilde{f} dans G dont la restriction à P vaut f).

(a) Si $\mu = \sigma_t$, il suffit de montrer que pour tout $t' \in T$, il existe $f \in A$ telle que $f(t) = t'$. Si $(t_n)_{n=0}^\infty = [t, w_\infty]$ et $(t'_n)_{n=0}^\infty = [t', w_\infty]$, on pose, pour tout n , $f(t_n) = t'_n$ et on prolonge f en un automorphisme; on a alors $f(t) = t'$ et $f(w_\infty) = w_\infty$.

(b) Si $\mu = \sigma_a$, soient $a = \{t_0, t_1\}$ et $a' = \{t'_0, t'_1\}$.

On choisit un représentant $(u_n)_{n=0}^\infty$ de w_∞ de la façon suivante: si $t_1 \in [t_0, w_\infty]$, $(u_n)_{n=0}^\infty = [t_0, w_\infty]$ et si $t_1 \notin [t_0, w_\infty]$, $(u_n)_{n=0}^\infty = [t_1, w_\infty]$; on choisit de même $\{u'_n\}_{n=0}^\infty$ un représentant de w_∞ tel que $\{u'_0, u'_1\} = \{t'_0, t'_1\}$.

Comme pour a) on pose $f(u_n) = u'_n$ et on prolonge f en un automorphisme; on a alors $f(w_\infty) = w_\infty$ et $f(a) = a'$.

(2) Si $G_* \mu = A_* \mu$ alors μ est une loi de Cauchy (a) ou (b): On pose $K_\mu = \{f \in G; f_* \mu = \mu\}$. Nous avons alors besoin de deux lemmes.

Lemme 1. *Si μ est une probabilité sans atome sur Ω et si $c_n = \max_{\{t; d(0,t)=n\}} \mu(\Omega_t)$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.*

Lemme 2. *L'ensemble K_μ est compact.*

Démonstration du Lemme 1. La suite $\{c_n\}_{n \geq 0}$ étant décroissante, posons $0 \leq k = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ et supposons $k > 0$.

Soit $D_n = \{t \in T; d(0, t) = n \text{ et } \mu(\Omega_t) \geq k\}$ et $F_n = \bigcup_{\{t \in D_n\}} \Omega_t$. La suite $\{F_n\}_{n \geq 0}$ est une suite décroissante de fermés non vides; donc, comme Ω est compact, $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Soit $w \in \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$ et soit $(s_n)_{n=0}^{\infty} = [0, w]$.

On a, pour tout n , $\mu(\Omega_{s_n}) \geq k$ et $\{w\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega_{s_n}$; donc $\mu\{w\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_{s_n}) \geq k$,

ce qui contredit le fait que μ est sans atome. \square

Démonstration du Lemme 2. L'ensemble K_μ est fermé et, d'après [23] ou [5], on a équivalence entre: (i) K_μ relativement compact; (ii) toute orbite $K_\mu \cdot s$ est finie; (iii) l'orbite $K_\mu \cdot 0$ est finie. Supposons alors l'orbite $K_\mu \cdot 0$ infinie.

Posons $E_n = \{t \in T; d(0, t) = n \text{ et } \{f \in K_\mu; \Omega_{f(0)} \subset \Omega_t\} \text{ infini}\}$ et posons $G_n = \bigcup_{\{t \in E_n\}} \Omega_t$; la suite $\{G_n\}_{n \geq 0}$ est une suite décroissante de fermés non vides de

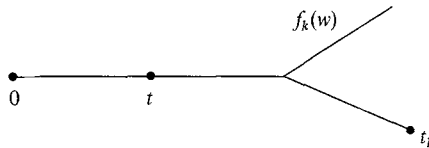
Ω ; il existe donc w_0 dans $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$ et une suite infinie $(t_k)_{k=0}^{\infty}$ de $K_\mu \cdot 0$ telle que

les $t_k = f_k(0)$ soient des points de $[0, w_0]$. (On ordonne les t_k de façon à ce que la suite $(d(0, t_k))_{k \geq 0}$ soit croissante.)

On montre alors que:

pour tout $t \in T$, si $w_0 \notin \Omega_t$, alors $f_k^{-1}(\Omega_t) \subset \Omega_{f_k^{-1}(t)}$ pour tout k . En effet, soit $w \in f_k^{-1}(\Omega_t)$; alors $f_k(w) \in \Omega_t$. Si $w \notin \Omega_{f_k^{-1}(t)}$ alors $f_k^{-1}(t) \notin [0, w]$ donc $t \notin [t_k, f_k(w)]$.

Le schéma suivant traduit les deux conditions $t \in [0, f_k(w)]$ et $t \notin [t_k, f_k(w)]$:



Mais alors $t \in [0, t_k] \subset [0, w_0]$, ce qui contredit $w_0 \notin \Omega_t$. Donc, pour tout $t \in T$, si $w_0 \notin \Omega_t$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mu(f_k^{-1}(\Omega_t)) = \mu(\Omega_t) \leq \mu(\Omega_{f_k^{-1}(t)});$$

d'après le Lemme 1:

$$\mu(\Omega_{f_k^{-1}(t)}) \leq c_{d(0, f_k^{-1}(t))} = c_{d(t, t_k)}.$$

Donc, par passage à la limite quand k tend vers l'infini:

Pour tout $t \in T$, si $w_0 \notin \Omega_t$ alors $\mu(\Omega_t) = 0$. Donc $\mu = \varepsilon_{w_0}$ (mesure de Dirac en w_0), ce qui contredit le fait que μ est sans atome. Donc $K_\mu \cdot 0$ est finie et K_μ est compact. \square

Fin de la démonstration du Théorème 1. D'après [23] ou [5], le groupe compact K_μ est inclus dans le stabilisateur d'un sommet ou d'une arête. La suite de la démonstration est alors calquée sur [11].

(a) Il existe $t \in T$ tel que $K_\mu \subset K_t$. Soit $h \in A$ tel que $h(0) = t$; $h^{-1} K_\mu h \subset K_0$. On pose alors $\nu = h_*^{-1} \mu$; ν est du type de μ ; K_ν est un sous groupe compact de K_0 ; pour tout $g \in G$, $g_* \nu$ est du type de ν . ($g_* \nu = g h_*^{-1} \mu = h'_* \mu = h' h_* \nu$ car $G_* \mu = A_* \mu$). Montrons alors que $K_0 = K_\nu \cdot (K_0 \cap A)$: Si $u \in K_0$, il existe $f \in A$ tel que $u_* \nu = f_* \nu$ donc $f^{-1} u \in K_\nu \subset K_0$; donc $f \in K_0 \cap A$ et $u = f f^{-1} u \in (K_0 \cap A) \cdot K_\nu$ et, comme K_ν et $K_0 \cap A$ sont des groupes $K_\nu \cdot (K_0 \cap A) = (K_0 \cap A) \cdot K_\nu$.

Or $K_0 \cdot w_\infty = \Omega$; comme $A \cdot w_\infty = w_\infty$, $K_0 \cdot w_\infty = K_\nu \cdot w_\infty = \Omega$ donc K_ν est un compact qui opère transitivement sur Ω ; il existe donc une unique probabilité sur Ω invariante par K_ν . (voir [11]). Or ν est une probabilité sur Ω invariante par K_ν et, comme σ_0 est aussi invariante par $K_\nu \subset K_0$, $\nu = \sigma_0 = h_*^{-1} \mu$ et donc $\mu = \sigma_t$.

(b) Il existe $a \in A(T)$ telle que $K_\mu \subset K_a$. La démonstration est analogue à celle du (a). On trouve $\mu = \sigma_a$. \square

III. Etude des fonctions préservant le type de Cauchy

Ayant caractérisé au II les lois de Cauchy comme les seules dont le type est invariant par G , nous résolvons le problème inverse: quelles fonctions de Ω dans Ω préservent les deux types de Cauchy? Voici l'analogie du Théorème B:

Théorème 2. Soit $F: \Omega \rightarrow \Omega$ une application mesurable borélienne. Si F préserve le type de Cauchy (a) (resp. (b)), alors il existe $f \in G$ telle que pour tout $t \in T$, $F_* \sigma_t = \sigma_{f(t)}$; (resp. il existe $\tilde{f} \in G$ telle que pour toute $\{t_0, t_1\} \in A(T)$, $F_* \sigma_{\{t_0, t_1\}} = \sigma_{\{\tilde{f}(t_0), \tilde{f}(t_1)\}}$) et F est égale, σ_0 -presque sûrement, à l'application induite par f sur Ω (resp. par \tilde{f}).

Démonstration. Nous partageons la démonstration en deux parties, suivant que F préserve le type de Cauchy (a) ou le type Cauchy (b).

(1) Soit $F: \Omega \rightarrow \Omega$ mesurable, préservant le type de Cauchy (a)

Il existe une application $f: T \rightarrow T$ telle que, pour tout $t \in T$,

$$F_* \sigma_t = \sigma_{f(t)}$$

donc, pour toute fonction h borélienne bornée:

$$\int_{\Omega} h(w) \sigma_{f(t)}(dw) = \int_{\Omega} h(F(w)) \sigma_t(dw) \tag{1}$$

Si $\delta_w(s, t) = \lim_{u \rightarrow w} (d(u, s) - d(u, t))$, (voir par exemple [3]), on a le résultat suivant:

$$\frac{d\sigma_t}{d\sigma_s}(w) = q^{\delta_w(s, t)}$$

Donc (1) s'écrit aussi:

$$\int_{\Omega} h(w) q^{\delta_w(0, f(t))} \sigma_0(dw) = \int_{\Omega} h(F(w)) q^{\delta_w(0, t)} \sigma_0(dw) \tag{1'}$$

pour toute fonction h borélienne bornée sur Ω .

Définissons maintenant l'opérateur Δ sur \mathbb{R}^T qui à tout $\phi: T \rightarrow \mathbb{R}$ associe $\Delta\phi$ défini par:

$$\Delta\phi(t) = \frac{1}{q+1} \sum_{\{s; d(s,t)=1\}} \phi(s).$$

Appliquons Δ à la fonction ϕ_w définie par $\phi_w(t) = q^{\delta_w(0, t)}$;

$$\Delta\phi_w(t) = \frac{1}{q+1} q^{\delta_w(0, t)} \sum_{\{s; d(s,t)=1\}} q^{\delta_w(t, s)} = q^{\delta_w(0, t)}$$

En effet, $\delta_w(t, s) = 1$ si $s \in [t, w]$ et $\delta_w(t, s) = -1$ pour les q autres voisins de t .

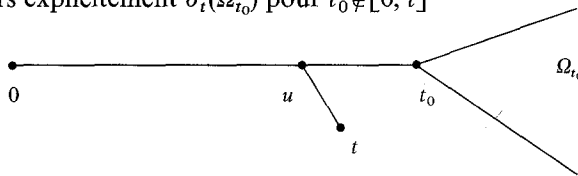
Donc, si on applique l'opérateur Δ aux deux membres de (1) ou (1'), on obtient:

$$\frac{1}{q+1} \sum_{\{s; d(s,t)=1\}} \int_{\Omega} h(w) \sigma_{f(s)}(dw) = \int_{\Omega} h(w) \sigma_{f(t)}(dw)$$

En particulier, si $h = \mathbf{1}_{\Omega_{t_0}}$:

$$\sum_{\{s; d(s,t)=1\}} \sigma_{f(s)}(\Omega_{t_0}) = (q+1) \sigma_{f(t)}(\Omega_{t_0}) \tag{2}$$

Calculons alors explicitement $\sigma_t(\Omega_{t_0})$ pour $t_0 \notin [0, t]$



Il existe un sommet unique $u \in [0, t]$ tel que $[0, t] \cap [0, t_0] = [0, u]$. On a $u \neq t_0$ car $t_0 \notin [0, t]$. On a alors pour tout $w \in \Omega_{t_0}$, $q^{\delta_w(0, t)} = q^{d(u, 0) - d(u, t)}$ et $\sigma_t(\Omega_{t_0}) = q^{d(u, 0) - d(u, t)} \sigma_0(\Omega_{t_0})$. Or il est facile de voir [3] que: $\sigma_0(\Omega_{t_0}) = \frac{q}{q+1} q^{d(0, t_0)}$.

Comme $d(0, t_0) - d(u, 0) + d(u, t) = d(t, t_0)$, on a alors l'expression simple suivante: pour $t_0 \notin [0, t]$, $\sigma_t(\Omega_{t_0}) = \frac{q}{q+1} q^{-d(t, t_0)}$. Revenons ensuite à la formule (2) et posons, pour $t \in T$ fixé: $A_t = \bigcup_{\{s; d(s,t)=1\}} \{f(s)\} \cup \{0, f(t)\}$ et \bar{A}_t l'enveloppe convexe de A_t , c'est-à-dire:

$$\bar{A}_t = U\{[a, b]; a \text{ et } b \in A_t\} \quad (\text{voir [11]}).$$

On obtient:

Pour tout $t_0 \notin \bar{A}_t$, $\sum_{\{s; d(s,t)=1\}} q^{d(f(t)t_0) - d(f(s)t_0)} = q + 1$. On utilise alors le lemme arithmétique suivant:

Lemme 3. Soit q un entier ≥ 2 et $n_1, \dots, n_{q+1} \in \mathbb{Z}$; $n_1 \geq \dots \geq n_{q+1}$. Alors $q^{n_1} + \dots + q^{n_{q+1}} = q + 1$ a deux solutions: ou bien $n_1 = \dots = n_{q+1} = 0$; ou bien $n_1 = 1, n_2 = \dots = n_{q+1} = -1$.

Démonstration du Lemme 3

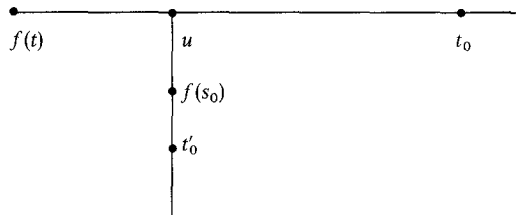
- Si $n_1 \geq 2$, $q^{n_1} \geq q^2 \geq 2q > q + 1$ impossible, donc $n_1 \leq 1$.
- Si $n_1 = n_2 = 1$, $q^{n_1} + q^{n_2} = 2q > q + 1$ impossible, donc $n_2 \leq 0$.
- Si $n_1 = 1$ et $n_2 = 0$, $q^{n_1} + q^{n_2} = q + 1$ impossible car $q + 1 \geq 3$ donc si $n_1 = 1$, alors $n_2 < 0$.
- $n_1 = 1, n_2 = \dots = n_{q+1} = -1$ vérifient bien l'équation.
- Si $n_1 = 1$ et si $n_k < -1$ pour un $k \geq 2$, alors $\sum_j q^{n_j} < q + 1$ impossible.
- Si $n_1 = \dots = n_{q+1} = 0$, alors l'équation est évidemment vérifiée.
- Si $n_1 \leq 0$ et si $n_k < 0$ pour un k alors $\sum_j q^{n_j} < q + 1$ impossible. \square

Revenons à la démonstration du (1) du Théorème 2. On a donc, dans tous les cas, pour s voisin de t : $d(f(t), t_0) - d(f(s), t_0) \in \{-1, 0, 1\}$. Nous allons en déduire que:

Pour tout $t \in T$, si $t_0 \notin \bar{A}_t$, alors $d(f(t), t_0) - d(f(s), t_0) \in \{-1, 1\}$
pour tout s voisin de t . (3)

En effet, si (3) est faux alors: il existe $t \in T$ et $t_0 \notin \bar{A}_t$ tels que, pour tout s voisin de t , $d(f(t), t_0) = d(f(s), t_0)$. Alors, pour tout s voisin de t , $f(s) = f(t)$.

En effet, sinon il existe s_0 voisin de t tel que $f(s_0) \neq f(t)$



Il existe un unique sommet $u \in [t_0, f(t)]$ tel que:

$$[t_0, f(t)] \cap [t_0, f(s_0)] = [t_0, u]$$

- $u \neq t_0$ car sinon $t_0 \in [f(t), f(s_0)]$
- $u \neq f(t)$ car $f(s_0) \neq f(t)$.

Prenons t'_0 tel que $f(s_0) \in [t'_0, f(t)]$:

on a alors $d(t'_0, f(t)) - d(t'_0, f(s_0)) \geq 2$ et on obtient une contradiction.

Ceci montre donc, par une récurrence évidente sur $n = d(t, t')$, que pour tout $t' \in T, f(t') = f(t) = c$.

Faisons alors sous forme de lemme la remarque suivante:

Lemme 4. Soit $(t_n)_{n=0}^\infty$ définissant le bout w_0 telle que $t_0 = 0$. Alors $\sigma_{t_n} \rightarrow \varepsilon_{w_0}$ étroitement.

Démonstration du Lemme 4. Remarquons d'abord que deux probabilités sur Ω sont égales si elles coïncident sur $\{\Omega_u; u \in T\}$. Ceci se déduit du théorème des classes monotones [4]. En effet, l'ensemble des boréliens de Ω sur lesquels les deux probabilités coïncident est une classe monotone qui contient $\{\Omega_u; u \in T\}$, classe stable par intersection finie.

Or, si $u \notin [0, w_0]$, pour tout $n \in \mathbb{N}, \sigma_{t_n}(\Omega_u) = \frac{q}{q+1} q^{-d(u, t_n)}$ et donc, si $u \notin [0, w_0]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{t_n}(\Omega_u) = 0$; on en déduit alors que, pour tout borélien B de $\Omega, \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{t_n}(B) = \varepsilon_{w_0}(B)$. \square

Une conséquence du Lemme 4 est alors que $F_* \sigma_t = \sigma_c$ pour tout t est impossible. (En effet, comme F est mesurable borélienne, on aurait $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{t_n}(F^{-1}(B)) = \varepsilon_{w_0}(F^{-1}(B)) = \varepsilon_{F(w_0)}(B)$; or σ_c n'est pas une mesure de Dirac.) Ceci achève la démonstration de (3). Montrons ensuite que:

Il existe une permutation τ de $\{1, \dots, q+1\}$ telle que pour tout

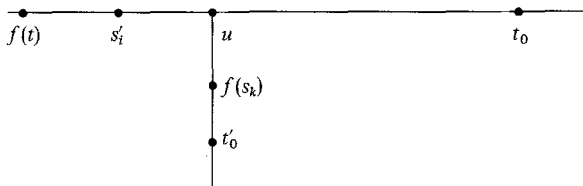
$$j \in \{1, \dots, q+1\}, s'_j = f(s_{\tau(j)}) \text{ où les } s'_j \text{ sont les voisins de } f(t). \tag{4}$$

Ceci montrera, par récurrence sur $n = d(t, t')$ que $d(f(t), f(t')) = d(t, t')$ et donc que f est un automorphisme.

Si (4) est faux, il existe s'_i voisin de $f(t)$ tel que: pour tout s_j voisin de $t, f(s_j) \neq s'_i$.

Soit t_0 fixé tel que $s'_i \in [f(t), t_0]$.

Soit s_k le voisin de t tel que $d(f(t), t_0) - d(f(s_k), t_0) = 1$.



Il existe un unique sommet $u \in [s'_i, t_0]$ tel que $[t_0, s'_i] \cap [t_0, f(s_k)] = [t_0, u]$

- $u \neq t_0$ car $t_0 \notin [f(s_k), f(t)]$
- $u \neq s'_i$ car $f(s_k) \neq s'_i$.

Soit t'_0 tel que $f(s_k) \in [u, t'_0]$. On a $d(t'_0, f(t)) - d(t'_0, f(s_k)) \geq 3$, ce qui est contradictoire.

Ceci achève la démonstration de (4).

Soit enfin $w \in \Omega$ et $(t_n)_0^\infty = [0, w]$. Comme f est un automorphisme, $(f(t_n))_{n=0}^\infty$ est le représentant de $f(w)$ issu de $f(0)$. D'après le Lemme 4 $\sigma_{t_n} \rightarrow \varepsilon_w$ et $\sigma_{f(t_n)} \rightarrow \varepsilon_{f(w)}$. Par passage à la limite dans l'égalité $F_* \sigma_{t_n} = \sigma_{f(t_n)}$ quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient enfin $F(w) = f(w)$ p.s.

(2) Soit $F: \Omega \rightarrow \Omega$ mesurable, préservant le type de Cauchy (b)

Il existe $f: A(T) \rightarrow A(T)$ telle que $F_* \sigma_a = \sigma_{f(a)}$ pour toute $a \in A(T)$. Soient $a = \{t_0, t_1\}$ et $a_0 = \{0, 1\}$. Calculons explicitement la densité de σ_a par rapport à σ_{a_0} :

$$\frac{d\sigma_a}{d\sigma_{a_0}}(w) = \frac{q^{\delta_w(0, t_0)} + q^{\sigma_w(0, t_1)}}{1 + q^{\delta_w(0, 1)}}$$

On utilise alors l'additivité de δ_w et on obtient:

$$\frac{d\sigma_a}{d\sigma_{a_0}}(w) = q^{\frac{1}{2}(\delta_w(0, t_0) + \delta_w(1, t_1))} = q^{\frac{1}{2}(\delta_w(0, t_1) + \delta_w(1, t_0))}$$

Considérons maintenant l'opérateur Δ sur $\mathbb{R}^{A(T)}$ qui à tout $\phi: A(T) \rightarrow \mathbb{R}$ associe $\Delta\phi$ défini par $\Delta\phi(a) = (2q)^{-1} \sum_{\{a' \text{ voisin de } a\}} \phi(a')$. On montre que, si $\phi(a) = \frac{d\sigma_a}{d\sigma_{a_0}}$, alors $\Delta\phi(a) = \phi(a)$.

On a $F_* \sigma_a = \sigma_{f(a)}$, donc, pour toute fonction h borélienne bornée sur Ω :

$$\int_{\Omega} h(F(w)) \phi(a)(w) \sigma_{a_0}(dw) = \int_{\Omega} h(w) \phi(f(a))(w) \sigma_{a_0}(dw).$$

On applique alors l'opérateur Δ dans le cas particulier où la fonction h vaut $\mathbf{1}_{\Omega}$, et on obtient:

$$(2q)^{-1} \sum_{\{a' \text{ voisin de } a\}} \sigma_{f(a')}(\Omega_t) = \sigma_{f(a)}(\Omega_t).$$

On pose ensuite pour $t \in T$ et $a \in A(T)$, $d(t, a) = \frac{1}{2}(d(t, t_0) + d(t, t_1) - 1)$ qui s'interprète géométriquement comme la distance de t à a . Soient, comme dans 1), $A_a = \sum_{\{a' \text{ voisin de } a\}} \{f(a')\} \cup \{0, f(a)\}$ et $\bar{A}_a = U\{[t, t']; t \text{ et } t' \in A_a\}$.

Le calcul donne:

pour tout $t \notin \bar{A}_a$, $\sum_{\{a' \text{ voisin de } a\}} q^{d(t, f(a')) - d(t, f(a))} = 2q$. On utilise alors, comme dans

le III, (1), le résultat arithmétique suivant:

Lemme 5. Soit q un entier ≥ 2 et $n_1 \geq \dots \geq n_{2q} \in \mathbb{Z}$. Alors $q^{n_1} + \dots + q^{n_{2q}} = 2q$ a deux solutions: ou bien $n_1 = \dots = n_{2q} = 0$; ou bien $n_1 = 1, n_2 = \dots = n_q = 0, n_{q+1} = \dots = n_{2q} = -1$.

Démonstration du Lemme 5. Elle est analogue à celle du Lemme 3 et nous ne la détaillons pas. \square

On a donc, pour toute arête a et pour tout $t \notin \bar{A}_a$:

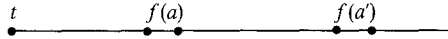
– Soit pour toute a' arête voisine de a , $d(t, f(a)) = d(t, f(a'))$ (5)

– Soit il existe $\begin{cases} 1 & \text{voisine de } a; \quad d(t, f(a)) = d(t, f(a')) + 1 \\ q-1 & \text{voisines...} \quad d(t, f(a)) = d(t, f(a')) \\ q & \text{voisines...} \quad d(t, f(a)) = d(t, f(a')) - 1 \end{cases}$ (6)

On établit maintenant le résultat suivant:

Si a et a' sont des arêtes voisines, $f(a)$ et $f(a')$ ont au moins un sommet en commun.

En effet sinon, prenons $t \notin \bar{A}_a$ de façon à ce que $f(a)$ soit incluse dans le plus petit segment contenant t et $f(a')$ ($f(a) \in [t, f(a')]$ enveloppe convexe de t et de $f(a')$).



On a alors $d(t, f(a')) - d(t, f(a)) \geq 2$, ce qui est contradictoire. On montre ensuite que:

pour tout $a \in A(T)$, il existe $t \notin \bar{A}_a$ tel que a et t vérifient (6). (7)

En effet, si (7) est faux, il existe $a \in A(T)$ tel que a vérifie (5) pour tout $t \notin \bar{A}_a$; et alors, pour toute arête a' voisine de a , $f(a) = f(a')$.

(Sinon, comme a et a' sont voisines, $f(a')$ et $f(a)$ ont un point en commun et si on prend $t \notin \bar{A}_a$ de façon à ce que $f(a) \notin [t, f(a')]$ (enveloppe convexe de t et de $f(a')$),

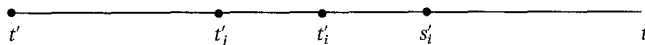


$d(t, f(a')) - d(t, f(a)) > 0$, et a et t ne vérifient pas (5)). Mais alors les arêtes a' ont au moins q voisines a'' telles que $f(a'') = f(a')$; donc les arêtes a' vérifient (5) pour tout $t \notin \bar{A}_a$, et on montre par récurrence sur $n = d(t_0, t_n)$ que f est constante. Comme dans le III.1) on aboutit à une contradiction car, si $w_0 = (t_n)_{n=0}^\infty$, alors $\sigma_{(t_n, t_{n+1})} = \frac{1}{2}(\sigma_{t_n} + \sigma_{t_{n+1}}) \rightarrow \varepsilon_{w_0}$ étroitement; ce qui achève la démonstration de (7).

Prouvons maintenant qu'on ne peut pas avoir $f(a) = f(a_0)$ pour une arête a_0 voisine de a .

Posons $a = \{t_0, t_1\}$ et $f(a) = \{t'_0, t'_1\}$.

Si $f(a) = f(a_0)$, il existe s'_i voisin de t'_i ($i=0$ ou 1) tel que, pour toute arête a' voisine de a , on ait $f(a') \neq \{t'_i, s'_i\}$



Mais alors, si on prend $t \notin \bar{A}_a$ tel que $s'_i \in [t'_i, t]$, on a nécessairement a et t vérifient (5). Mais si on prend $t' \notin \bar{A}_a$ tel que $t'_j \in [t', t'_i]$, on a alors $2q$ arêtes voisines de a telles que $d(t', f(a)) - d(t', f(a')) \in \{0, -1\}$, et au moins une telle

que $d(t', f(a)) - d(t', f(a')) = -1$ (sinon, pour toute arête a' voisine de a , $f(a) = f(a')$ et a vérifie (5) pour tout $t \notin \bar{A}_a$). On aboutit donc à une absurdité.

$$\text{Posons } \tilde{f}(t_0) = \bigcap_{\{s_0; d(s_0, t_0) = 1\}} f\{t_0, s_0\}.$$

– $\tilde{f}(t_0) \subset \{t'_0, t'_1\}$ car $d(t_0, t_1) = 1$ et $f\{t_0, t_1\} = \{t'_0, t'_1\}$
 – $\tilde{f}(t_0) \neq \{t'_0, t'_1\}$ car sinon $f\{t_0, s_0\} = f\{t_0, t_1\}$ pour $s_0 \neq t_1$
 – $\tilde{f}(t_0) \neq \emptyset$ sinon il existerait s_0 et s'_0 voisins de t_0 distincts de t_1 tels que $f\{t_0, s_0\} \cap f\{t_0, t_1\} = \{t'_0\}$ et $f\{t_0, s'_0\} \cap f\{t_0, t_1\} = \{t'_1\}$ mais alors $\{t_0, s_0\}$ et $\{t_0, s'_0\}$ sont des arêtes voisines telles que $f\{t_0, s_0\} \cap f\{t_0, s'_0\} = \emptyset$, ce qui est absurde. L'ensemble $\tilde{f}(t_0)$ est donc réduit à un point que l'on notera encore $\tilde{f}(t_0)$ par abus de notation.

– $\tilde{f}(t_0) \neq \tilde{f}(t_1)$ sinon $\tilde{f}(t_0) = \tilde{f}(t_1) = t'_i$ et si s'_j est un voisin de t'_j ($j \neq i$), pour toute arête a' voisine de a , $f(a') \neq \{s'_j, t'_j\}$ ce qui, on l'a vu, est impossible.

Donc $f\{t_0, t_1\} = \{\tilde{f}(t_0), \tilde{f}(t_1)\}$ et $d(\tilde{f}(t_0), \tilde{f}(t_1)) = 1$.

– Si t_2 est un voisin de t_1 distinct de t_0 , $\tilde{f}(t_2) \neq \tilde{f}(t_0)$, car sinon $\{\tilde{f}(t_0), \tilde{f}(t_1)\} = \{\tilde{f}(t_2), \tilde{f}(t_1)\}$ et donc $f\{t_0, t_1\} = f\{t_1, t_2\}$, ce qui est contradictoire.

Donc $d(\tilde{f}(t_0), \tilde{f}(t_2)) = 2$ et montre par récurrence sur $n = d(t_0, t_n)$ que \tilde{f} est un automorphisme.

Enfin, comme pour le III.1), on vérifie que F est égale, σ_0 -presque sûrement à l'application induite par \tilde{f} sur Ω . \square

Bibliographie

- Ahlfors, L.V.: Möbius transformations in several dimensions. Ordway Professorship Lectures in Mathematics, University of Minnesota 1981
- Arnaud, J.P.: Fonctions sphériques et fonctions définies positives sur l'arbre homogène, C.R. Acad. Sci. Sér. I **290**, 99–101 (1980)
- Arnaud, J.P., Letac, G.: Formule de représentation spectrale d'un processus gaussien stationnaire sur un arbre homogène. Publication du Laboratoire de Statistique de l'Université Paul Sabatier, n° 01-85, Juin 1985. Journées S.M.F. »Probabilités sur les structures géométriques«, Toulouse, Juin 1984
- Billingsley, P.: Probability and measure. New York: Wiley-Interscience (1979)
- Cartier, P.: Géométrie et analyse sur les arbres. Séminaire Bourbaki, 24ème année, 1971/1972
- Cartier, P.: Fonctions harmoniques sur un arbre. Symp. Math. **9**, 619–626 (1972)
- Cartier, P.: Harmonic Analysis on trees. Harmonic analysis on homogeneous spaces. Proc. Am. Math. Soc. **26**, 419–424 (1973)
- Chao, J.A.: Conjugate harmonic functions on trees. Probab. Th. Harmonic Anal. 31–44 (1986)
- Deriennic, Y.: Marche aléatoire sur le groupe libre et frontière de Martin. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **32**, 261–276 (1976)
- Dunau, J.L.: Etude d'une classe de marches aléatoires sur l'arbre homogène. Réimprimé dans Publications du Laboratoire de Statistique de l'Université Paul Sabatier, n° 02-83, Toulouse, 1983
- Dunau, J.L., Sénateur, H.: Sur différentes lois de Cauchy dans \mathbb{R}^n caractérisées comme invariantes par certains groupes de transformations. Thèse de 3ème cycle, Laboratoire de Statistique de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, Octobre 1985
- Dunau, J.L. Sénateur, H.: Une caractérisation du type de la loi de Cauchy-Heisenberg. A paraître dans Lectures Notes Probability measures on groups, Oberwolfach
- Eymard, P.: Le noyau de Poisson et la théorie des groupes. Symp. Math. **22**, 107–132 (1977)
- Figa Talamanca, A., Picardello, M.A.: Harmonic analysis on free groups. Lect. Notes Pure Appl. Math., Marcel Dekker, New York, 1983
- Knight, F.B.: A characterization of the Cauchy type. Proc. Am. Math. Soc. **55**, 130–135 (1976)

16. Knight, F.B., Myer, P.A.: Une caractérisation de la loi de Cauchy. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.* **34**, 129–134 (1976)
17. Letac, G.: Which functions preserve Cauchy laws? *Proc. Am. Math. Soc.* **67**, 277–286 (1977)
18. Letac, G.: Dual random walks and special functions on the homogeneous trees. *Journées S.M.F. sur les Marches Aléatoires*, Nancy 1981, Publications de l'institut E. Cartan, Nancy n° 7, Janvier 1983
19. Letac, G.: Seul le groupe des similitudes-inversions préserve le type de la loi de Cauchy-conforme de \mathbb{R}^n pour $n > 1$. A paraître dans *Journal of Functional Analysis*
20. Nebbia, C.: Groups of isometries of a homogeneous tree and the Kunse-Stein phenomenon. Publication de l'Institut de Recherche Mathématiques Avancées, Strasbourg
21. Pytlik, T.: An analytic family of uniformly bounded representation of free group. *Mathematical University of Wrocław*, Preprint 1984
22. Sawyer, S.: Isotropic random walks in a tree. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.* **42**, 279–292 (1984)
23. Tits, J.: Sur le groupe des automorphismes d'un arbre. Dans »Mémoires dédiés à Georges de Rham«, Berlin Heidelberg New York: Springer, pp. 188–211 1970

Received June 6, 1986; received in revised form December 12, 1987