Probab. Th. Rel. Fields 72, 619–635 (1986)

Probability Theory and Related Fields

Problèmes de prediction pour le processus de Wiener a deux parametres

L. Carraro

Université Claude Bernard – Lyon 1, Département de Mathématiques,
43, bd du 11 novembre 1918,F-69622 Villeurbanne Cedex, France

Summary. We give a decomposition of the two-parameter real Wiener process $(W(x, y), (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2)$ by using the Fourier transform defined on the group which leave it invariant. Then we use this decomposition to obtain some prediction results for this process, which allow us to give upper and lower bounds for the correlation coefficient of the vector-spaces respectively generated by the two families $\{W(x, y), x y^{\varepsilon} \leqq s\}$ and $\{W(x, y), x y^{\varepsilon} \geqq t\}$, $0 < s < t$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

1. Introduction

Le processus de Wiener à deux paramètres $(W(x, y), (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2)$ est le processus gaussien réel centré qui vérifie:

$$E(W(x, y) W(x', y')) = (x \wedge x')(y \wedge y'). \tag{1}$$

Ce processus a été assez largement étudié ces dernières années en liaison avec la théorie des distributions empiriques [2] aussi bien au niveau des propriétés des trajectoires [4] que de l'intégration stochastique [12]. Dans tous les cas, la démarche consiste à introduire la mesure de Wiener sur les rectangles du quart de plan $(\mathbb{R}^+)^2$ dont l'étude est facilitée du fait de ses propriétés d'indépendance. Les résultats qui suivent s'obtiennent d'une façon différente; l'idée est de faire appel à l'analyse harmonique sur les groupes élémentaires, soit plus précisément à la décomposition spectrale d'un opérateur au moyen de ses invariants. Ainsi, on utilise la structure géométrique du processus pour établir au paragraphe 2 une décomposition analogue à celle obtenue par H.P. McKean [8] pour le mouvement brownien à plusieurs paramètres au sens de P. Lévy. La sphère euclidienne qui intervient dans ce dernier cas est remplacée ici par l'hyperbole; la sommation discrète de H.P. McKean devient une intégration (stochastique) puisque le groupe associé est localement compact. Il est intéressant de noter, dans cette optique, que le processus de Wiener à deux paramètres restreint à l'hyperbole $H^1=\{(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2,\ xy=1\}$ coïncide avec le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (voir [9], p. 156).

Le paragraphe 3 est principalement consacré à l'application de notre décomposition pour obtenir, en suivant A. Goldman [6], des estimations précises du coefficient de corrélation des espaces vectoriels engendrés respectivement par les familles de variables aléatoires $\{W(x,y),\ xy\leqq s\}$ et $\{W(x,y),\ xy\geqq t\}$, où s et t sont deux réels fixés, $0<s<t$. On en déduit des résultats analogues pour les espaces vectoriels engendrés par les familles $\left\{W(x,y),\ \frac{x}{y}\leqq s\right\}$ et $\left\{W(x,y),\ \frac{x}{y}\geqq t\right\}$. Cette partie s'achève en démontrant que le processus de Wiener à deux paramètres est Markovien d'ordre deux (au sens de McKean) pour des domaines limités par une hyperbole.

Des difficultés notables (au niveau du calcul) apparaissent lorsque l'on veut effectuer une démarche similaire pour le processus de Wiener à N paramètres.

Cependant, on établit au paragraphe 4 une représentation intégrale de la covariance du processus de Wiener à N paramètres adaptée à la structure géométrique de ce dernier.

2. Décomposition spectrale

Le processus de Wiener à deux paramètres est invariant sous l'action du groupe $SH(2)$ des rotations hyperboliques du quadrant $(\mathbb{R}^+)^2$, propriété qui se traduit par l'identité en loi des deux processus

$$(W(x,y),(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2) \quad \text{et} \quad \left(W\left(\alpha x, \frac{y}{\alpha}\right),(x\,y)\in(\mathbb{R}^+)^2\right),$$

pour tout scalaire $\alpha>0$. Il est alors naturel de chercher à décomposer ce processus sur le groupe $SH(2)$; on obtient ainsi:

Théorème 1. *Soient $(W_u^1)_{u\in\mathbb{R}^+}$ et $(W_u^2)_{u\in\mathbb{R}^+}$ deux mouvements browniens indépendants. Pour tout $u\in\mathbb{R}^{+*}$ et tout $i\in\{1,2\}$, on considère le mouvement brownien $({}^iW_t^u)_{t\in\mathbb{R}^+}$ défini par:*

$${}^iW_t^u=u^{-1/2}(1+t)\left(W^i_{tu/(1+t)}-\frac{1}{1+t}\,W_u^i\right)$$

puis, pour tout couple (u,r) de $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^+$, on introduit l'intégrale stochastique:

$${}^iX_r^u=\frac{2}{u}\int_0^r \sin\left(u\,\mathrm{Log}\,\frac{t}{r}\right)d^i\,W_t^u \qquad \text{si}\ \ u\neq 0,\ \ {}^iX_r^0=0.$$

Le processus $({}^iX_r^u)_{u\in\mathbb{R}^+}$ étant adapté au mouvement brownien $(W_u^i)_{u\in\mathbb{R}^+}$, on peut poser, pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2$:

$$W(x,y)=\int_0^{+\infty}\cos\left(u\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{y}\right){}^1X_{xy}^u\,dW_u^1+\int_0^{+\infty}\sin\left(u\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{y}\right){}^2X_{xy}^u\,dW_u^2. \qquad (2)$$

Alors, le processus $(W(x, y);\ (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2)$ *ainsi défini coïncide avec le processus de Wiener à deux paramètres.*

Preuve. Le processus $(W(x, y),\ (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2)$ défini par la formule (2) est un processus gaussien centré; il suffit donc de voir qu'il satisfait à l'identité (1).

On désigne par H^1 l'hyperbole $\{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ xy=1\}$ qui est munie canoniquement d'une structure de groupe. Considérons alors l'isomorphisme de groupes φ défini par:

$$\varphi: (x, y) \in H^1 \mapsto \operatorname{Log} \frac{x}{y} \in \mathbb{R}.$$

Ce dernier nous permet de définir la transformation de Fourier sur l'hyperbole H^1.

Introduisons la bijection:

$$\psi: (r, t) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \mapsto (\sqrt{re^t}, \sqrt{re^{-t}}) \in (\mathbb{R}^{+*})^2.$$

Avec ces notations, si $(r, t)=\psi^{-1}(x, y)$ et $(r', t')=\psi^{-1}(x', y')$, la covariance du processus de Wiener à deux paramètres s'exprime selon:

$$\begin{aligned}
(x \wedge x')(y \wedge y') &= \exp\left(\frac{(t+\operatorname{Log} r) \wedge (t'+\operatorname{Log} r')}{2}\right) \exp\left(\frac{(-t+\operatorname{Log} r) \wedge (-t'+\operatorname{Log} r')}{2}\right) \\
&= \exp\left[\frac{1}{4}\left(t+\operatorname{Log} r+t'+\operatorname{Log} r'-\left|t-t'+\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right|\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. -t+\operatorname{Log} r-t'+\operatorname{Log} r'-\left|t-t'-\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right|\right)\right] \\
&= \sqrt{rr'} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\left|t-t'+\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right|+\left|t-t'-\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right|\right)\right]
\end{aligned}$$

formule qu'on peut écrire sous la forme:

$$(x \wedge x')(y \wedge y') = f_{r,r'}(t-t'). \tag{3}$$

La fonction $f_{r,r'}$ est réelle et paire; elle s'écrit donc:

$$f_{r,r'}(t) = \int_0^{+\infty} \cos tu (\mathscr{F} f_{r,r'})(u)\, du$$

où $\mathscr{F}$ désigne la transformation de Fourier usuelle sur $\mathbb{R}$.

Evaluons alors la transformée de Fourier de $f_{r,r'}$:

$$\begin{aligned}
(\mathscr{F} f_{r,r'})(u) &= 2\sqrt{rr'}\, \mathscr{R}e\left[\int_0^{+\infty} e^{iut} \exp\left\{-\frac{1}{4}\left(\left|t+\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right|+\left|t-\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right|\right)\right\} dt\right] \\
&= 2\sqrt{rr'}\, \mathscr{R}e\left[\int_0^{|\operatorname{Log}\frac{r}{r'}|} e^{iut} e^{-\frac{1}{2}|\operatorname{Log}\frac{r}{r'}|} dt + \int_{|\operatorname{Log}\frac{r}{r'}|}^{+\infty} e^{iut} e^{-\frac{t}{2}} dt\right] \\
&= 2\sqrt{rr'}\, e^{-\frac{1}{2}|\operatorname{Log}\frac{r}{r'}|}\left[\frac{\sin\left(u\left|\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right|\right)}{u} + 2\mathscr{R}e\left(\frac{e^{iu|\operatorname{Log}\frac{r}{r'}|}}{1-2iu}\right)\right]
\end{aligned}$$

ce qui fournit la relation:

$$(\mathscr{F} f_{r,r'})(u) = \frac{4\sqrt{rr'}}{u(1+4u^2)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left|\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right|\right) \cdot \left[2u\cos\left(u\left|\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right| + \sin\left(u\left|\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right|\right)\right]\right. \tag{4}$$

le problème est alors de trouver une famille de fonctions $(f_r^u, u\in\mathbb{R}^+, r\in\mathbb{R}^+)$, vérifiant:

$$\int_{\mathbb{R}} f_r^u(t) f_{r'}^u(t)\, dt = (\mathscr{F} f_{r,r'})(u). \tag{5}$$

La recherche formelle d'une telle famille de fonctions peut se baser sur l'expression du processus de Wiener à deux paramètres à l'aide du bruit blanc de Chentsov. Ainsi, si on pose:

$$f_r^u(t) = \frac{2}{u} \sin\left(u \operatorname{Log}\frac{t}{r}\right) 1_{[0,r]}(t) \tag{6}$$

l'identité (5) s'établit de manière élémentaire:

Si $r \leqq r'$, on a les égalités:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_r^u(t) f_{r'}^u(t)\, dt &= \frac{4}{u^2} \int_0^r \sin\left(u\operatorname{Log}\frac{t}{r}\right) \sin\left(u\operatorname{Log}\frac{t}{r'}\right) dt\\
&= \frac{2}{u^2}\left[\cos\left(u\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right)\int_0^r dt - \int_0^r \cos\left(u\operatorname{Log}\frac{t^2}{rr'}\right) dt\right]\\
&= \frac{2}{u^2}\left[r\cos\left(u\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right) - \mathscr{R}e\left(\int_0^r \left(\frac{t^2}{rr'}\right)^{iu} dt\right)\right]\\
&= \frac{2r}{u^2}\left[\cos\left(u\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right) - \frac{\cos\left(u\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right) + 2u\sin\left(u\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right)}{1+4u^2}\right]\\
&= \frac{4r}{u(1+4u^2)}\left[2u\cos\left(u\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right) - \sin\left(u\operatorname{Log}\frac{r}{r'}\right)\right]\\
&= (\mathscr{F} f_{r,r'})(u).
\end{aligned}$$

Le processus $({}^iX_r^u)$ s'exprime à l'aide des fonctions f_r^u selon:

$${}^iX_r^u = \int f_r^u(t)\, d^i W_t^u \tag{7}$$

et la covariance du processus $(W(x,y), (x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2)$ défini par la formule (1) s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
E(W(x,y)\,W(x',y')) = &\int_0^{+\infty} \cos\left(u\operatorname{Log}\frac{x}{y}\right)\cos\left(u\operatorname{Log}\frac{x'}{y'}\right) E({}^1X_{xy}^u\, {}^1X_{x'y'}^u)\, du\\
&+ \int_0^{+\infty} \sin\left(u\operatorname{Log}\frac{x}{y}\right)\sin\left(u\operatorname{Log}\frac{x'}{y'}\right) E({}^2X_{xy}^u\, {}^2X_{x'y'}^u)\, du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \cos\left(u\left(\operatorname{Log}\frac{x}{y} - \operatorname{Log}\frac{x'}{y'}\right)\right) \int f^u_{xy}(t)\, f^u_{x'y'}(t)\, dt\, du \\
&= \int_0^{+\infty} \cos\left(u\left(\operatorname{Log}\frac{x}{y} - \operatorname{Log}\frac{x'}{y'}\right)\right) (\mathscr{F} f_{xy,\, x'y'})(u)\, du \\
&= f_{xy,\, x'y'}\left(\operatorname{Log}\frac{x}{y} - \operatorname{Log}\frac{x'}{y'}\right) \\
&= (x \wedge x')(y \wedge y').
\end{aligned}
$$

On a utilisé dans l'ordre les formules (7), (5) et (3).

3. Résultats de prédiction

Pour tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et tout $s \in \mathbb{R}^+$, on note $B_\varepsilon(s)$, $S_\varepsilon(s)$, $C_\varepsilon(s)$ les espaces vectoriels respectivement engendrés par les familles de variables aléatoires

$$
\{W(x, y);\ x y^\varepsilon \leqq s\}, \qquad \{W(x, y),\ x y^\varepsilon = s\}, \qquad \{W(x, y),\ x y^\varepsilon \geqq s\}.
$$

La proposition qui suit fournit l'un des outils clés nécessaires tout au long de ce paragraphe.

Proposition 1. *Soient α, s, t, trois réels fixés, $0 < s < t$. On considère la variable aléatoire suivante:*

$$
\begin{aligned}
X = &\int_0^{+\infty} \cos(u\alpha) \int_0^s \sin\left(u \operatorname{Log}\frac{x}{t}\right) d^1 W^u_x \frac{dW^1_u}{u} \\
&+ \int_0^{+\infty} \sin(u\alpha) \int_0^s \sin\left(u \operatorname{Log}\frac{x}{t}\right) d^2 W^u_x \frac{dW^2_u}{u}.
\end{aligned}
$$

Alors X appartient à l'espace $B_1(s)$.

Preuve. On décompose X sous la forme $X = X_1 + X_2$, avec:

$$
\begin{aligned}
X_1 = &\int_0^{+\infty} \cos(u\alpha) \cos\left(u \operatorname{Log}\frac{s}{t}\right) \int_0^s \sin\left(u \operatorname{Log}\frac{x}{s}\right) d^1 W^u_x \frac{dW^1_u}{u} \\
&+ \int_0^{+\infty} \sin(u\alpha) \cos\left(u \operatorname{Log}\frac{s}{t}\right) \int_0^s \sin\left(u \operatorname{Log}\frac{x}{s}\right) d^2 W^u_x \frac{dW^2_u}{u}, \\
X_2 = &\int_0^{+\infty} \cos(u\alpha) \sin\left(u \operatorname{Log}\frac{s}{t}\right) \int_0^s \cos\left(u \operatorname{Log}\frac{x}{s}\right) d^1 W^u_x \frac{dW^1_u}{u} \\
&+ \int_0^{+\infty} \sin(u\alpha) \sin\left(u \operatorname{Log}\frac{s}{t}\right) \int_0^s \cos\left(u \operatorname{Log}\frac{x}{s}\right) d^2 W^u_x \frac{dW^2_u}{u}.
\end{aligned}
$$

Le vecteur X_1 s'exprime comme suit:

$$
X_1 = \tfrac{1}{2} W(s(e^\alpha/t)^{1/2}, (e^\alpha/t)^{-1/2}) + \tfrac{1}{2} W((e^\alpha t)^{1/2}, s(e^\alpha t)^{-1/2}).
$$

Le cas du vecteur X_2 est plus délicat à examiner; on établit dans un premier temps d'une façon analogue l'identité suivante:

$$X_2 = \frac{1}{2} X_3\left(\alpha + \mathrm{Log}\,\frac{s}{t}, s\right) - \frac{1}{2} X_3\left(\alpha - \mathrm{Log}\,\frac{s}{t}, s\right)$$

où l'on a posé:

$$X_3(\beta, s) = \int_0^{+\infty} \sin(u\beta) \int_0^s \cos\left(u\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{s}\right) d^1 W_x^u \,\frac{dW_u^1}{u} + \int_0^{+\infty} [1-\cos(u\beta)] \int_0^s \cos\left(u\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{s}\right) d^2 W_x^u \,\frac{dW_u^2}{u}.$$

Définissons alors un vecteur auxiliaire $X_4(\beta, s)$ selon:

$$X_4(\beta, s) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u\beta)}{u} \int_0^s \sin\left(u\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{s}\right) d^1 W_x^u \,\frac{dW_u^1}{u} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u\beta)}{u} \int_0^s \sin\left(u\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{s}\right) d^2 W_x^u \,\frac{dW_u^2}{u}.$$

On montre dans un premier temps que $X_4(\beta, s)$ appartient à $B(s)$; en effet, on a:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\beta W((se^{\alpha})^{1/2}, (se^{-\alpha})^{1/2})\, d\alpha \\
&= \int_0^\beta \left[\int_0^{+\infty} \cos(u\alpha)\, {}^1X_s^u\, dW_u^1 + \int_0^{+\infty} \sin(u\alpha)\, {}^2X_s^u\, dW_u^2\right] d\alpha \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^\beta \cos(u\alpha)\, d\alpha\right) {}^1X_s^u\, dW_u^1 + \int_0^{+\infty} \left(\int_0^\beta \sin(u\alpha)\right) {}^2X_s^u\, dW_u^2 \\
&= X_4(\beta, s).
\end{aligned}$$

L'interversion des signes d'intégration se justifie en notant que, par continuité des trajectoires du processus de Wiener à deux paramètres, l'expression intégrale est limite presque sûre des sommes de Riemann associées; comme d'autre part, il est facile de voir que ces dernières convergent dans $L^2(\Omega, \Sigma, P)$ vers $X_4(\beta, s)$, on en déduit l'identité voulue.

Montrons alors que le vecteur $X_3(\beta, s)$ est lié à $X_4(\beta, s)$ par la formule:

$$X_3(\beta, s) = -s\,\frac{\partial}{\partial s}\, X_4(\beta, s) \tag{8}$$

la dérivation étant à considérer dans l'espace $L^2(\Omega, \Sigma, P)$.

Rappelons à cet effet que la formule de Ito appliquée à une fonction u du type $u(s, x) = f(s)\,x$ établit de façon rigoureuse la formule d'intégration par parties stochastiques:

$$f(s) \int_0^s e(x)\, dW_x = \int_0^s f'(x) \int_0^x e(y)\, dW_y\, dx + \int_0^s f(x)\, e(x)\, dW_x.$$

Elle permet ici d'obtenir l'identité:

$$\int_0^s \sin\left(u \operatorname{Log} \frac{x}{s}\right) d^i W_x^u = -u \int_0^s \int_0^x \cos\left(u \operatorname{Log} \frac{y}{x}\right) d^i W_y^u \frac{dx}{x}$$

d'où l'on déduit:

$$\begin{aligned} X_3(\beta, s) - \frac{X_4(\beta, s') - X_4(\beta, s)}{\operatorname{Log}(s/s')} &= \frac{1}{\operatorname{Log}(s/s')} \int_0^{+\infty} \sin(u\beta) \int_{s'}^s \left(\int_0^s \cos\left(u \operatorname{Log} \frac{y}{s}\right) d^1 W_y^u \right. \\ &\quad \left. - \int_0^x \cos\left(u \operatorname{Log} \frac{y}{x}\right) d^1 W_y^u\right) \frac{dx}{x} \frac{dW_u^1}{u} \\ &\quad + \frac{1}{\operatorname{Log}(s/s')} \int_0^{+\infty} [1 - \cos(u\beta)] \int_{s'}^s \left(\int_0^s \cos\left(u \operatorname{Log} \frac{y}{s}\right) d^1 W_y^u \right. \\ &\quad \left. - \int_0^x \cos\left(u \operatorname{Log} \frac{y}{x}\right) d^1 W_y^u\right) \frac{dx}{x} \frac{dW_u^2}{u} \end{aligned}$$

ce qui nous amène, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à l'évaluation suivante:

$$\begin{aligned} \left\| X_3(\beta, s) - \frac{X_4(\beta, s') - X_4(\beta, s)}{\operatorname{Log}(s/s')} \right\|^2 \leqq K \frac{|s - s'|}{(\operatorname{Log}(s/s'))^2} \int_0^{+\infty} E\left\{ \int_{s'}^s \left(\int_0^s \cos\left(u \operatorname{Log} \frac{y}{s}\right) d^1 W_y^u \right.\right. \\ \left.\left. - \int_0^x \cos\left(u \operatorname{Log} \frac{y}{x}\right) d^1 W_y^u \right)^2 \frac{dx}{x} \right\} \frac{du}{u^2} \end{aligned}$$

et le théorème de convergence dominée permet de conclure.

Venons-en aux résultats de prédiction annoncés.

Si F est un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega, \Sigma, P)$ et X une variable aléatoire de carré intégrable, on désigne par $d(X, F)$ la distance, dans $L^2(\Omega, \Sigma, P)$ de X à l'espace vectoriel F.

Théorème 2. *Pour toute combinaison linéaire finie* $W = \sum_{i=1}^n \lambda_i W(x_i, y_i)$ *où* $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $x_i y_i = t > s$, $i = 1, \ldots, n$, *l'inégalité suivante est satisfaite:*

$$d(W, B_1(s))^2 \geqq \left[1 - \frac{s}{t}\left(1 - \operatorname{Log}\frac{s}{t} + \frac{1}{2}\left(\operatorname{Log}\frac{s}{t}\right)^2\right)\right] \|W\|^2. \tag{9}$$

De plus, si la variable aléatoire W *se limite au singleton* $W = W(x, y)$, *on a alors:*

$$d(W, B_1(s))^2 = \left[1 - \frac{s}{t}\left(1 - \operatorname{Log}\frac{s}{t}\right)\right] \|W\|^2. \tag{10}$$

Preuve. Soit X la variable aléatoire définie par:

$$\begin{aligned} X = \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i \cos\left(u \operatorname{Log} \frac{x_i}{y_i}\right) \int_0^s \sin\left(u \operatorname{Log} \frac{x}{t}\right) d^1 W_x^u \frac{dW_u^1}{u} \\ + \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i \sin\left(u \operatorname{Log} \frac{x_i}{y_i}\right) \int_0^s \sin\left(u \operatorname{Log} \frac{x}{t}\right) d^2 W_x^u \frac{dW_u^2}{u} \end{aligned}$$

le vecteur $W-X$ est orthogonal, dans $L^2(\Omega, \Sigma, P)$, à l'espace vectoriel $B_1(s)$ et, en vertu de la proposition 1, la variable aléatoire X appartient à $B_1(s)$. Ainsi, $X=E(W/B_1(s))$ et on obtient l'identité:

$$d(W, B_1(s))^2 = \int_0^{+\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^n \cos\left(u \operatorname{Log} \frac{x_i}{y_i}\right)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \sin\left(u \operatorname{Log} \frac{x_i}{y_i}\right)\right)^2 \right] \cdot \int_s^t \sin^2\left(u \operatorname{Log} \frac{x}{t}\right) dx \frac{du}{u^2}.$$

Soit r un réel fixé de l'intervalle $]0, 1]$; évaluons la quantité:

$$\begin{aligned}\int_r^1 \sin^2(u \operatorname{Log} x)\, dx &= \frac{1}{2}\int_r^1 dx - \frac{1}{2}\int_r^1 \cos(2u \operatorname{Log} x)\, dx \\ &= \frac{1-r}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1-r\cos(2u \operatorname{Log} r) - 2ur \sin(2u \operatorname{Log} r)}{1+4u^2} \\ &= \frac{4u^2(1-r) + 2ur\sin(2u \operatorname{Log} r) + r(\cos(2u \operatorname{Log} r) - 1)}{2(1+4u^2)}\end{aligned}$$

d'où l'on tire la minoration:

$$\int_r^1 \sin^2(u \operatorname{Log} x)\, dx \geqq \frac{4u^2}{2(1+4u^2)} \left(1 - r + r \operatorname{Log} r - \frac{r}{2}(\operatorname{Log} r)^2\right).$$

Par suite, on a:

$$\int_s^t \sin^2\left(u \operatorname{Log} \frac{x}{t}\right) dx \geqq \left[1 - \frac{s}{t}\left(1 - \operatorname{Log} \frac{s}{t} + \frac{1}{2}\left(\operatorname{Log} \frac{s}{t}\right)^2\right)\right] \int_0^t \sin^2\left(u \operatorname{Log} \frac{x}{t}\right) dx$$

ce qui suffit pour affirmer la validité de la formule (9) en remarquant que $d(W, B_1(0)) = \|W\|$.

L'identité (10) s'établit elle aussi de façon élémentaire; il suffit d'évaluer la quantité ci-dessous:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \int_s^t \sin^2\left(u \operatorname{Log} \frac{x}{t}\right) dx \frac{du}{u^2} &= \left[\left(1 - \frac{s}{t}\right) \int_0^{+\infty} \frac{2du}{1+4u^2} + \frac{s}{t} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2u \operatorname{Log}(s/t))}{u} \frac{du}{1+4u^2}\right. \\ &\quad \left. + \frac{s}{t} \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(2u \operatorname{Log} \frac{s}{t}\right) - 1}{u^2} \frac{du}{2(1+4u^2)}\right] t \\ &= \left[\left(1 - \frac{s}{t}\right) + \frac{s}{t}\left(-1 + \frac{s}{t}\right) + \frac{s}{t}\left(1 - \frac{s}{t} + \operatorname{Log} \frac{s}{t}\right)\right] \|W\|^2.\end{aligned}$$

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace $L^2(\Omega, \Sigma, P)$, on désigne par $c(F, G)$ le coefficient de corrélation associé:

$$c(F, G) = \operatorname*{Sup}_{\substack{X \in F \\ Y \in G}} \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \, \|Y\|} = (1 - \operatorname*{Inf}_{\substack{X \in F \\ \|X\| = 1}} d(X, G)^2)^{1/2}. \tag{11}$$

Corollaire 1. *Pour tout $t>s>0$ et tout $\varepsilon\in\{-1,1\}$, les inégalités suivantes sont satisfaites:*

$$\left[\frac{s}{t}\left(1-\operatorname{Log}\frac{s}{t}\right)\right]^{1/2}\leqq c(S_\varepsilon(t),B_\varepsilon(s))\leqq\left[\frac{s}{t}\left(1-\operatorname{Log}\frac{s}{t}+\frac{1}{2}\left(\operatorname{Log}\frac{s}{t}\right)^2\right)\right]^{1/2}. \quad (12)$$

Preuve. Si $\varepsilon=1$, la double inégalité (12) est simple conséquence des formules (9) et (10) et de la relation (11).

Si $\varepsilon=-1$, il suffit de remarquer, l'identité en loi des deux processus

$$(W(x,y),(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2) \quad \text{et} \quad (yW(x,y^{-1}),(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2).$$

Remarque. Le processus de Wiener à deux paramètres restreint à une droite passant par l'origine coïncide (à un changement de temps près) avec le mouvement brownien classique alors que l'on aboutit dans le cas d'une hyperbole au processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Or, les propriétés des trajectoires de ce dernier sont beaucoup moins connues que celles du mouvement brownien, ce qui explique l'intérêt de l'estimation (12) pour $\varepsilon=-1$ par rapport à $\varepsilon=1$.

Il est plus difficile d'évaluer la distance $d(W,B_1(s))$ lorsque W est un vecteur quelconque de l'espace $C_1(t)$; cependant, la minoration qui suit est presque aussi précise que (9):

Théorème 3. *Pour toute combinaison linéaire finie $W=\sum_{i=1}^n \lambda_i W(x_i,y_i)$ où $\lambda_i\in\mathbb{R}$ et $x_i y_i\geqq t>s$, $i=1,\dots,n$, on a la minoration suivante:*

$$d(W,B_1(s))^2\geqq\left(1-\frac{s}{t}\,g\left(\operatorname{Log}\frac{s}{t}\right)\right)\|W\|^2 \quad (13)$$

où la fonction g est définie par:

$$g(x)=1-x\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{1/2}+\frac{x^2}{2}, \qquad x\in\mathbb{R}^-. \quad (14)$$

Preuve. Du fait de l'homogénéité du processus de Wiener à deux paramètres, on peut supposer que $t=1$. On écrit le vecteur W sous la forme:

$$W=W_1+W_2+W_3+W_4$$

avec:

$$W_1=\int_0^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^n\lambda_i\cos\left(u\operatorname{Log}\frac{x_i}{y_i}\right)\int_0^1\sin\left(u\operatorname{Log}\frac{x}{x_iy_i}\right)d^1W_x^u\right]\frac{dW_u^1}{u},$$

$$W_2=\int_0^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^n\lambda_i\sin\left(u\operatorname{Log}\frac{x_i}{y_i}\right)\int_0^1\sin\left(u\operatorname{Log}\frac{x}{x_iy_i}\right)d^2W_x^u\right]\frac{dW_u^2}{u},$$

$$W_3=\int_0^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^n\lambda_i\cos\left(u\operatorname{Log}\frac{x_i}{y_i}\right)\int_1^{x_iy_i}\sin\left(u\operatorname{Log}\frac{x}{x_iy_i}\right)d^1W_x^u\right]\frac{dW_u^1}{u},$$

$$W_4=\int_0^{+}\left[\sum_{i=1}^n\lambda_i\sin\left(u\operatorname{Log}\frac{x_i}{y_i}\right)\int_1^{x_iy_i}\sin\left(u\operatorname{Log}\frac{x}{x_iy_i}\right)d^2W_x^u\right]\frac{dW_u^2}{u}.$$

Comme les quatre vecteurs ci-dessus sont indépendants, un raisonnement similaire à celui effectué lors de la preuve du théorème 2 permet d'obtenir la minoration:

$$\begin{aligned} d(W, B_1(s))^2 \geqq & \int_0^{+\infty} \int_s^1 \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \cos\left(u \operatorname{Log} \frac{x_i}{y_i}\right) \sin\left(u \operatorname{Log} \frac{x}{x_i y_i}\right)\right]^2 dx \frac{du}{x^2} \\ & + \int_0^{+\infty} \int_s^1 \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \sin\left(u \operatorname{Log} \frac{x_i}{y_i}\right) \sin\left(u \operatorname{Log} \frac{x}{x_i y_i}\right)\right]^2 dx \frac{du}{u^2} \\ & + \|W_3\|^2 + \|W_4\|^2. \end{aligned}$$

Tout le problème est donc d'obtenir une minoration précise d'une expression du type:

$$\int_s^1 \left[\sum_{i=1}^n \mu_i \sin\left(u \operatorname{Log} \frac{x}{x_i y_i}\right)\right]^2 dx$$

qui peut encore s'écrire sous la forme:

$$Q_{s,u}(A, B) = \int_s^1 [A \sin(u \operatorname{Log} x) + B \cos(u \operatorname{Log} x)]^2 \, dx.$$

Ainsi, il suffit de savoir comparer, uniformément en u, les deux formes quadratiques $Q_{s,u}$ et $Q_{0,u}$ définies sur $\mathbb{R}^2$. On recherche donc une fonction réelle f, définie sur $[0, 1]$, qui vérifie:

$$Q_{s,u}(A, B) \geqq f(s)\, Q_{0,u}(A, B).$$

En supposant $B=1$ (ce qui est licite), on peut expliciter cette condition selon

$$\alpha(s) A^2 + \beta(s) A + \gamma(s) \geqq 0 \tag{15}$$

pour tout choix du couple $(A, s) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ avec les notations:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \int_s^1 \sin^2(u \operatorname{Log} x)\, dx - f(s) \int_0^1 \sin^2(u \operatorname{Log} x)\, dx \\ \beta(s) &= \int_s^1 \sin(2u \operatorname{Log} x)\, dx - f(s) \int_0^1 \sin(2u \operatorname{Log} x)\, dx \\ \gamma(s) &= 1 - s - f(s) - \int_s^1 \sin^2(u \operatorname{Log} x)\, dx + f(s) \int_0^1 \sin^2(u \operatorname{Log} x)\, dx \end{aligned}$$

où, pour alléger l'écriture, on a partout omis l'indice u.

L'inégalité (15) est satisfaite dès que les deux conditions suivantes sont vérifées:

$$\alpha(s) \geqq 0 \tag{16}$$

$$\text{pour tout } s \in [0, 1]$$

$$\beta(s)^2 \leqq 4 \alpha(s)\, \gamma(s). \tag{17}$$

On va s'intéresser pour l'instant à la condition (17). Pour cela, explicitons les fonctions α, β et γ; des calculs élémentaires conduisent aux expressions suivantes:

$$\alpha(s)=\frac{4u^2(1-f(s))-s[4u^2+1-\cos(2u\operatorname{Log}s)-2u\sin(2u\operatorname{Log}s)]}{2(1+4u^2)},$$

$$\beta(s)=\frac{2u(f(s)-1)+s[2u\cos(2u\operatorname{Log}s)-\sin(2u\operatorname{Log}s)]}{1+4u^2},$$

$$\gamma(s)=\frac{(2+4u^2)(1-f(s))-s[4u^2+1+\cos(2u\operatorname{Log}s)+2u\sin(2u\operatorname{Log}s)]}{2(1+4u^2)}.$$

On pose alors:

$$A(s)=2(1+4u^2)\,\alpha(s),$$
$$B(s)=(1+4u^2)\,\beta(s),$$
$$C(s)=2(1+4u^2)\,\gamma(s)$$

et la condition (17) est équivalente à:

$$B(s)^2\leqq A(s)\,C(s). \tag{18}$$

Explicitons à nouveau:

$$\begin{aligned}B(s)^2=&4u^2(f(s)-1)^2+4us(f(s)-1)[2u(\cos 2u\operatorname{Log}s)-\sin(2u\operatorname{Log}s)]\\&+4u^2s^2\cos^2(2u\operatorname{Log}s)+s^2\sin^2(2u\operatorname{Log}s)\\&-4us^2\sin(2u\operatorname{Log}s)\cos(2u\operatorname{Log}s),\\A(s)\,C(s)=&4u^2(2+4u^2)(f(s)-1)^2+2s(f(s)-1)[(4u^2+1)^2\\&-\cos(2u\operatorname{Log}s)-2u\sin(2u\operatorname{Log}s)]\\&+s^2(4u^2+1)^2-s^2\cos^2(2u\operatorname{Log}s)-4u^2s^2\sin^2(2u\operatorname{Log}s)\\&-4us^2\sin(2u\operatorname{Log}s)\cos(2u\operatorname{Log}s).\end{aligned}$$

La condition (18) est donc vérifiée si l'on a:

$$\begin{aligned}&4u^2(4u^2+1)(f(s)-1)^2+2s(f(s)-1)[(4u^2+1)^2-(4u^2+1)\cos(2u\operatorname{Log}s)]\\&\quad+s^2(4u^2+1)^2-s^2(4u^2+1)\geqq 0.\end{aligned}$$

Soit, en posant $\tilde{f}(s)=\dfrac{1-f(s)}{s}$:

$$2u^2\tilde{f}(s)^2-[4u^2+1-\cos(2u\operatorname{Log}s)]\tilde{f}(s)+2u^2\geqq 0. \tag{19}$$

Cette dernière inégalité est satisfaite dès que:

$$\tilde{f}(s)^2-[2+(\operatorname{Log}s)^2]\tilde{f}(s)+1\geqq 0. \tag{20}$$

La minoration effectuée ici est la meilleure possible, uniformément en u, puisque les conditions (19) et (20) deviennent équivalentes lorsque u tend vers zéro.

Si on pose $\tilde{f}(s)=g(\operatorname{Log}s)$, l'inégalité (20) est remplacée par:

$$g(x)^2-(2+x^2)\,g(x)+1\geqq 0 \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}^- \tag{21}$$

qui est satisfaite dès que l'une des deux conditions suivantes est réalisée:

$$g(x) \leqq 1+\frac{x^2}{2}+x\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}, \tag{22}$$

$$g(x) \geqq 1+\frac{x^2}{2}-x\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}. \tag{23}$$

Exprimons à présent l'inégalité (16); celle-ci traduit la conclusion du théorème 2; elle est donc vérifiée dès que l'on a:

$$g(x) \geqq 1+\frac{x^2}{2}-x. \tag{24}$$

Par suite, si on impose à la fonction g de satisfaire à l'inégalité (23), la condition (15) est réalisée et le théorème 3 en découle immédiatement.

Remarque. La minoration du théorème 3 n'est jamais triviale puisque la fonction g définie par (14) vérifie: $g(x) \leqq e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^-$.

Ce théorème mène là encore à des encadrements du coefficient de corrélation $c(C_\varepsilon(t), B_\varepsilon(s))$:

Corollaire 2. *Pour tout* $t>s>0$ *et tout* $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, *on a:*

$$\left[\frac{s}{t}\left(1-\operatorname{Log}\frac{s}{t}\right)\right]^{1/2} \leqq c(C_\varepsilon(t), B_\varepsilon(s)) \leqq \left[\frac{s}{t}\, g\left(\operatorname{Log}\frac{s}{t}\right)\right]^{1/2}$$

où la fonction g *est définie par* (14).

Pour établir le caractère Markovien du processus de Wiener à deux paramètres, nous aurons besoin de quelques notations:

Pour tout réel positif s, on pose:

$$\mathscr{B}_-(s)=\mathscr{B}(\{W(x,y),\, xy \leqq s\}),$$
$$\mathscr{B}_+(s)=\mathscr{B}(\{W(x,y),\, xy > s\})$$

où $\mathscr{B}(A)$ désigne la tribu engendrée par la partie A.

On note également $\mathscr{B}_0(s)$ la plus petite tribu conditionnellement à laquelle les deux tribus $\mathscr{B}_-(s)$ et $\mathscr{B}_+(s)$ sont indépendantes.

On désire donner un sens à la quantité $\partial W(x,y)$, où ∂ désigne la dérivation selon la normale à l'hyperbole (normale pour la géométrie hyperbolique du quadrant).

Pour toute fonction f appartenant à $\mathscr{D}$, espace des fonctions C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}$, la quantité:

$$\int f(\alpha)\, W((se^\alpha)^{1/2}, (se^{-\alpha})^{1/2})\, d\alpha$$

existe et est dérivable en tant que fonction de s dans l'espace $L^2(\Omega, \Sigma, P)$. Il suffit en effet pour établir ceci de procéder comme pour la fin de la démonstration de la proposition 1. On pose donc:

$$\int f(\alpha)\,\partial W((se^{\alpha})^{1/2},(se^{-\alpha})^{1/2})\,d\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial s}\int f(\alpha)\,W((se^{\alpha})^{1/2},(se^{-\alpha})^{1/2})\,d\alpha \tag{25}$$

puis on introduit en suivant McKean [8] la tribu suivante:

$$\partial\mathscr{B}(s)=\mathscr{B}(\{\int f(\alpha)\,\partial^n W((se^{\alpha})^{1/2},(se^{-\alpha})^{1/2})\,d\alpha, f\in\mathscr{D}, n=0,1\}).$$

Théorème 4. *Le processus de Wiener à deux paramètres est Markovien d'ordre deux pour des domaines limités par une hyperbole au sens suivant:*

$$\textit{pour tout } s>0, \textit{ on a: } \mathscr{B}_0(s)=\partial\mathscr{B}(s).$$

Preuve. On fixe $s>0$ et on note P l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace $B_1(s)$. Il est classique que la plus petite tribu séparante $\mathscr{B}_0(s)$ peut s'identifier à $\mathscr{B}(PB_1(s))$.

Si l'on reprend en détail la démonstration de la proposition 1, on aboutit à l'identité suivante:

si $xy>s$, on a:

$$PW(x,y)=\frac{1}{2}W\left(\frac{s}{y},y\right)+\frac{1}{2}W\left(x,\frac{s}{x}\right)-\frac{s}{2}\int_{\operatorname{Log}\frac{s}{y^2}}^{\operatorname{Log}\frac{x^2}{s}}\partial W((se^{\alpha})^{1/2},(se^{-\alpha})^{1/2})\,d\alpha. \tag{26}$$

Ainsi, $PW(x,y)$ appartient à $\partial\mathscr{B}(s)$ et $\mathscr{B}_0(s)\subset\partial\mathscr{B}(s)$. Pour voir que le processus de Wiener à deux paramètres ne peut pas être Markovien d'ordre 1, il suffit par exemple d'examiner les coefficients de la décomposition (2) du théorème 1:

pour tout $i\in\{1,2\}$ et tout $u\in\mathbb{R}^{+*}$, on considère le processus $({}^iY_t^u)_{t\in\mathbb{R}}$ défini par:

$${}^iY_t^u=e^{-t}\,{}^iX_{e^{2t}}^u. \tag{27}$$

Exprimons ce dernier sous la forme d'une intégrale stochastique:

$$\begin{aligned}{}^iY_t^u&=\frac{2e^{-t}}{u}\int_0^{e^{2t}}\sin(u(\operatorname{Log}y-2t))\,d^iW_y^u\\&=\frac{2\sqrt{2}}{u}\int_{-\infty}^{t}\sin(2u(t-x))\,e^{-(t-x)}\,d^i\tilde{W}_x^u\end{aligned}$$

où ${}^i\tilde{W}_x^u=-\int_1^{e^{2x}}\frac{1}{\sqrt{2y}}\,d^iW_y^u$ est un nouveau mouvement brownien.

On se ramène ainsi au cas d'un processus gaussien stationnaire pour lequel il existe des critères simples portant sur la densité spectrale de celui-ci. Dans la situation présente, la densité spectrale f_u du processus $({}^iY_t^u)_{t\in\mathbb{R}}$ est facile à trouver:

$$\text{en posant } g_u(\gamma)=\frac{2\sqrt{2}}{u}\int_0^{+\infty}e^{i\gamma t}\sin(2ut)\,e^{-t}\,dt$$

$$\text{soit } g_u(\gamma)=\frac{4\sqrt{2}}{(1-i\gamma)^2+4u^2}$$

on a:

$$f_u(\gamma)=|g_u(\gamma)|^2.$$

Le polynôme $P_u=\frac{1}{g_u}$ est de degré deux, et ses racines sont situées dans le demi-plan inférieur; en conséquence, le processus $({}^iY_t^u)_{t\in\mathbb{R}}$ est un processus de Markov d'ordre deux (voir [3], p. 105) et le processus de Wiener est Markovien d'ordre 2.

Remarque. Il est intéressant de noter l'analogie frappante entre la formule (26) et la résolution élémentaire du problème de Cauchy pour l'équation des ondes à une dimension.

4. Le cas N-paramétrique

Rappelons que le processus de Wiener réel à N paramètres

$$(W(x_1, \ldots, x_N), (x_1, \ldots, x_N)\in(\mathbb{R}^+)^N)$$

est le processus gaussien réel centré vérifiant:

$$E(W(x_1, \ldots, x_N)\, W(y_1, \ldots, y_N))=\prod_{i=1}^{n}(x_i\wedge y_i) \tag{28}$$

le groupe des invariants de ce processus est simplement le groupe des matrices diagonales, à coefficients positifs, dont le déterminant est 1. La transformation de Fourier sur ce groupe est facile à définir puisque ce dernier est isomorphe à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{N-1}$. On introduit alors la bijection:

$$\begin{aligned}\psi\colon (r, t_1, \ldots, t_{N-1})&\subset\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{N-1}\\ &\to\left((r\,e^{t_1})^{\frac{1}{N}}, \ldots, (r\,e^{t_{N-1}})^{\frac{1}{N}}, \left(r\exp\left(-\sum_{i=1}^{N-1}t_i\right)\right)^{\frac{1}{N}}\right)\in(\mathbb{R}^{+*})^N.\end{aligned}$$

Là encore, en posant $(r, t_1, \ldots, t_{N-1})=\psi^{-1}(x_1, \ldots, x_N)$ et $(r', t'_1, \ldots, t'_{N-1})=\psi^{-1}(y_1, \ldots, y_N)$, la covariance du processus de Wiener à N paramètres s'exprime sous la forme:

$$\prod_{i=1}^{N}(x_i\wedge y_i)=\sqrt{rr'}\, f_{r,r'}(t_1-t'_1, \ldots, t_{N-1}-t'_{N-1}).$$

Une décomposition analogue à la formule (2) est donc théoriquement possible, mais des difficultés, pour l'instant insurmontables, au niveau du calcul, ne nous permettent pas d'obtenir le théorème voulu.

On donne néanmoins dans la suite une représentation intégrale de la covariance du processus de Wiener à N paramètres analogue à l'écriture intégrale de I.J. Schoenberg [11] dans le cadre du mouvement brownien à plusieurs paramètres. Cette dernière s'étant avérée efficace pour l'étude du processus associé (voir par exemple [5], [7] et [10]), on peut avoir quelques espoirs quant aux applications possibles de notre formule.

Proposition 2. *L'identité suivante est satisfaite:*

$$\prod_{i=1}^{N}(x_i \wedge y_i) = C_N \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (1-\exp\{i[\operatorname*{Min}_{1\leq i\leq N}(x_i\psi_i(r,t_1,\ldots,t_{N-1}))]^N\})$$
$$\cdot(1-\exp\{-i[\operatorname*{Min}_{1\leq i\leq N}(y_i\psi_i(r,t_1,\ldots,t_{N-1}))]^N\})\,dt_1\ldots dt_{N-1}\frac{dr}{r^2} \tag{29}$$

avec la notation: $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_N)$.

Remarque. L'intégration sur $\mathbb{R}^{N-1}$ représente en fait une intégration sur l'«hyperbole»

$$H^{N-1}=\left\{(x_1,\ldots,x_N)\in(\mathbb{R}^+)^N, \prod_{i=1}^{N} x_i=1\right\}.$$

Preuve. On définit le noyau $K((x_1,\ldots,x_N),(y_1,\ldots,y_N))$ par la formule (29). Remarquons alors que la fonction ψ s'écrit:

$$\psi(r,t_1,\ldots,t_N)=r^{\frac{1}{N}}(\varphi_1(t_1,\ldots,t_N),\ldots,\varphi_N(t_1,\ldots,t_N))$$

ce qui fournit:

$$K((x_1,\ldots,x_N),(y_1,\ldots,y_N))$$
$$=C_N\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}} r^{-1}(1-\exp\{ir[\operatorname*{Min}_{1\leq i\leq N}(x_i\varphi_i(t_1,\ldots,t_{N-1}))]^N\})$$
$$\cdot r^{-1}(1-\exp\{-ir[\operatorname*{Min}_{1\leq i\leq N}(y_i\varphi_i(t_1,\ldots,t_{N-1}))]^N)\,dr\,dt_1\ldots dt_{N-1}.$$

Appliquant la relation de Bessel-Parseval, on obtient:

$$K((x_1,\ldots,x_N),(y_1,\ldots,y_N))$$
$$=C_N\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}} 1_{[0,\{\operatorname*{Min}_{1\leq i\leq N}(x_i\varphi_i(t_1,\ldots,t_{N-1}))\}^N]}(r)$$
$$\cdot 1_{[0,\{\operatorname*{Min}_{1\leq i\leq N}(y_i\varphi_i(t_1,\ldots,t_{N-1}))\}^N]}(r)\,dr\,dt_1\ldots dt_{N-1}$$

que l'on peut encore écrire:

$$K((x_1,\ldots,x_N),(y_1,\ldots,y_N))$$
$$=C_N\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}} 1_{[0,\{\operatorname*{Min}_{1\leq i\leq N}(z_i\varphi_i(t_1,\ldots,t_{N-1}))\}^N]}(r)$$
$$\cdot 1_{[0,\{\operatorname*{Min}_{1\leq i\leq N}(z_i\varphi_i(t_1,\ldots,t_{N-1}))\}^N]}(r)\,dr\,dt_1\ldots dt_{N-1}$$

où $(z_1,\ldots,z_n)=(x_1\wedge y_1,\ldots,x_N\wedge y_N)$.

Ainsi le noyau K vérifie la relation fonctionnelle:

$$K((x_1,\ldots,x_N),(y_1,\ldots,y_N))=K((x_1\wedge y_1,\ldots,x_N\wedge y_N),(x_1\wedge y_1,\ldots,x_N\wedge y_N)).$$

Il suffit donc, afin d'achever la démonstration, de vérifier que l'on a:

$$K((x_1, \ldots, x_N), (x_1, \ldots, x_N)) = \prod_{i=1}^{N} x_i,$$

$$K((x_1, \ldots, x_N), (x_1, \ldots, x_N))$$

$$= c_N \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |1 - \exp\{ir[\min_{1 \leqq i \leqq N} (x_i \varphi_i(t_1, \ldots, t_{N-1}))]^N\}|^2 \, dt_1 \ldots dt_{N-1} \frac{dr}{r^2}.$$

Effectuons le changement de variables:

$$t'_i = t_i + \operatorname{Log}\left(x_i^N \Big/ \prod_{i=1}^{N} x_i\right).$$

On obtient alors:

$$K((x_1, \ldots, x_N), (x_1, \ldots, x_N)) = c_N \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| 1 - \exp\left\{ ir \left(\prod_{i=1}^{N} x_i \right) \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdot \operatorname{Min}\left[e^{t'_1}, \ldots, e^{t'_{N-1}}, \exp\left(-\sum_{i=1}^{N-1} t'_i \right) \right] \right\} \right|^2 dt'_1 \ldots dt'_{N-1} \frac{dr}{r^2}$$

qui fournit, avec le changement de variables $r' = r \left(\prod_{i=1}^{N} x_i \right)$, le résultat désiré si on a choisi pour constante c_N la quantité:

$$c_N = \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| 1 - \exp\left\{ ir \operatorname{Min}\left[e^{t_1}, \ldots, e^{t_{N-1}}, \exp\left(-\sum_{i=1}^{N-1} t_i \right) \right] \right\} \right|^2 dt_1 \ldots dt_{N-1} \frac{dr}{r^2} \right)^{-1}.$$

Remarque. Il est possible, dans le cas du processus de Wiener à deux paramètres, de démontrer la proposition 2 à l'aide de la décomposition obtenue au théorème 1; les deux écritures s'avèrent d'ailleurs duales l'une de l'autre, au sens de la transformation de Fourier sur $\mathbb{R} \times H^1$. On peut donc espérer, en effectuant la démarche inverse, obtenir une généralisation des résultats des paragraphes 2 et 3 au cas N-paramétrique qui soit basée sur la proposition 2.

Bibliographie

1. Carraro, L.: Un théorème de prédiction pour le processus de Wiener à deux paramètres. C.R. Acad. Sci., Paris, à paraître
2. Czőrgő, M., Révész, P.: Strong approximations in probability and statistics. New York: Academic Press 1981
3. Dym, H., McKean, H.P.: Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem. New York: Academic Press 1976
4. Ehm, W.: Sample function properties of multi-parameter stable processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **56**, 195–228 (1981)
5. Goldman, A.: Estimations analytiques concernant le mouvement brownien fractionnaire à plusieurs paramètres. C.R. Acad. Sci. Paris **298**, 91–93 (1984)
6. Goldman, A.: La mesure de Hausdorff des trajectoires du mouvement brownien à plusieurs paramètres. C.R. Acad. Sci., Paris **300**, 643–645 (1985)

7. Kahane, J.P.: Recent progress in Fourier analysis. Proceedings of the Seminar on Fourier analysis held in E.I. Escorial, Spain, June 30–July 5 (1983)
8. McKean, H.P.: Brownian motion with several-dimensional time. Theory Probab. Appl. **8**, 335–354 (1963)
9. Orey, S., Pruitt, W.E.: Sample functions of the N-parameter Wiener process. Ann. Probab. **1**, 138–163 (1973)
10. Pitt, L.D.: Local time for gaussian vector fields. Indiana Univ. Math. J. **27**, 309–330 (1978)
11. Schoenberg, I.J.: On certain metric spaces arising from euclidean spaces by a change of metric and their imbedding in Hilbert space. Ann. Math. **38**, 787–793 (1937)
12. Wong, E., Zakai, M.: Differentiations formulas for stochastic integrals in the plane. Stochastic Processes Appl. **6**, 339–349 (1979)

Received August 9, 1985