Probab. Th. Rel. Fields 81, 139–158 (1989)

Probability Theory and Related Fields

Sur l'intégration stochastique par rapport à une martingale hilbertienne de carré intégrable

Carlo Asperti
Dipartimento di Matematica, Via Buonarroti, 2, I-56100 Pisa, Italy

Summary. We give a complete characterization of the operator-valued processes which are integrable, in the sense of [6], with respect to a fixed Hilbert-valued square integrable martingale M. This characterisation allows to complete the theory of stochastic integration with respect to Hilbert-valued martingales. In particular, we give a construction of the process $\langle\!\langle M, N\rangle\!\rangle$ (predictable compensator of $M \otimes N$), as well as a Hilbert-valued version of the Kunita-Watanabe inequality. Finally, we deal with the distributivity of the stochastic integral $X \cdot M$ with respect to the martingale M: this property can be usefully applied to obtain a simple proof of a representation theorem of Gal'tchouk-Métivier.

The results of this article have been announced in Comptes Rendus Note [1].

Introduction

La théorie de l'intégration stochastique par rapport à une martingale hilbertienne M de carré intégrable a été développée par M. Métivier et ses collaborateurs (voir [5–9, 11]).

Le premier pas, dans cette théorie, consiste à associer à la martingale M un certain espace de Hilbert L^*. Chaque élément de cet espace est un «processus», dont les valeurs sont des opérateurs linéaires non-bornés. Dans la construction de L^*, un rôle essentiel est joué par la mesure de Doléans μ de $M \otimes M$, et notamment par la densité de μ par rapport à $|\mu|$ (variation totale de μ). Cette densité admet une version Q à valeurs dans le cône des opérateurs nulcéaires positifs et autoadjoints. Le sous-espace Λ^2 de L^* constitué par les éléments qui sont «intégrables par rapport à M» est défini comme étant l'adhérence, dans L^*, de l'espace des processus prévisibles élémentaires. Sur Λ^2 on définit ensuite l'intégrale stochastique $X \mapsto X \cdot M$, obtenue en prolongeant par continuité l'intégrale stochastique élémentaire. Il était connu (cf. [6, 8, 9]) que l'ensemble des processus intégrables contenait effectivement des processus admettant comme valeurs des opérateurs non bornés; mais cet ensemble n'était pas caractérisé par une propriété d'«intégrabilité», en un sens simple, de ses éléments.

Dans le présent article nous montrons qu'un processus X est intégrable si et seulement si la densité Q peut être choisie de telle manière que, pour tout couple (t, ω), l'opérateur composé $Y(t, \omega) = X(t, \omega) \circ (Q(t, \omega))^{1/2}$ soit de Hilbert-Schmidt et que l'application $(t, \omega) \mapsto Y(t, \omega)$ soit un processus prévisible, vérifiant la condition $\int \| Y(t, \omega) \|_2^2 \, d|\mu|(t, \omega) < \infty$ (où $\| \ \|_2$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt). En d'autres termes, nous démontrons que Λ^2 coïncide en fait avec l'espace L^* tout entier. Nous montrons en même temps que la définition de l'espace $L^* = \Lambda^2$ peut être rendue plus maniable, du point de vue de la composition des intégrations stochastiques, en utilisant, à la place du processus $Q^{1/2}$, un processus prévisible quelconque R vérifiant la relation $R \circ R^* = Q$. (Un tel processus sera dit un *processus de Métivier* pour la martingale M.)

Comme exemple d'utilisation de cette nouvelle construction de l'espace Λ^2, nous étudierons ensuite la notion d'orthogonalité forte, qui nous permettra d'obtenir très rapidement le processus «M, N» (compensateur prévisible de $M \otimes N$), ainsi qu'une version «hilbertienne» de l'inégalité de Kunita-Watanabe. Il faut noter que la non commutativité du produit tensoriel ne permet pas d'obtenir directement par polarisation l'existence de «M, N» de celle de «M, M» (démontrée dans [5]).

Nous démontrerons enfin la propriété de distributivité de l'intégrale stochastique $X \cdot M$ par rapport à la martingale M, ce qui nous permettra d'obtenir, de façon tout à fait élémentaire, un théorème de représentation de Métivier-Gal'tchouk.

Les résultats du présent article avaient été annoncés (sans démonstrations) dans la Note aux Comptes Rendus [1].

0. Hypothèses, notations, rappels

Dans toute la suite, on désigne par H, G, F, E, E_1, E_2 des espaces de Hilbert *réels et séparables*.

L'espace $\mathscr{L}(H, G)$ des applications linéaires continues de H dans G est considéré comme muni de sa norme habituelle, désignée par $\| \ \|$.

Pour tout élément (h, g) de $H \times G$, on désigne par $h \otimes g$ l'élément de $\mathscr{L}(H, G)$ défini par

$$(h \otimes g)(h') = (h' \mid h)\, g. \tag{0.1}$$

On désigne en outre par $\mathscr{L}_1(H, G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(H, G)$ constitué par les *opérateurs nucléaires* de H dans G (voir [3], Sect. 42, 6). L'espace $\mathscr{L}_1(H, G)$ est considéré comme muni de la *norme nucléaire*, désignée par $\| \ \|_1$, qui en fait un espace de Banach séparable (admettant comme sous-espace partout dense l'espace vectoriel engendré par les opérateurs de la forme (0.1)). On désigne par tr la forme linéaire *trace* sur l'espace $\mathscr{L}_1(H) = \mathscr{L}_1(H, H)$ (voir [3], Sect. 42, 7). Elle est définie par

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_i (u(h_i) \mid h_i), \tag{0.2}$$

où (h_i) désigne une base hilbertienne quelconque pour l'espace H. On a

$$|\mathrm{tr}(u)| \leqq \|u\|_1, \tag{0.3}$$

avec égalité lorsque u est positif.

Si u est un élément de $\mathscr{L}_1(H,G)$, et v un élément de $\mathscr{L}(H,G)$, on a $u \circ v^* \in \mathscr{L}_1(G)$. En outre, toute forme linéaire continue sur $\mathscr{L}_1(H,G)$ est du type

$$u \mapsto \mathrm{tr}(u \circ v^*)$$

pour un élément v de $\mathscr{L}(H,G)$.

On désigne par $\mathscr{L}_2(H,G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(H,G)$ constitué par les *opérateurs de Hilbert-Schmidt* de H dans G, c'est-à-dire par les opérateurs (compacts) u qui vérifient la relation $u \circ u^* \in \mathscr{L}_1(G)$. On considère l'espace $\mathscr{L}_2(H,G)$ comme muni de sa structure habituelle d'espace de Hilbert (séparable): voir [3], Sect. 42,4.(6), p. 212–213. Pour tout couple u, v d'éléments de $\mathscr{L}_2(H,G)$, on a $u \circ v^* \in \mathscr{L}_1(G)$, et le produit scalaire de u, v dans $\mathscr{L}_2(H,G)$ est donné par

$$(u \mid v) = \mathrm{tr}(u \circ v^*). \tag{0.4}$$

La norme associée à ce produit scalaire (*norme de Hilbert-Schmidt*) est désignée par $\| \ \|_2$. Elle est liée à la norme nucléaire par la relation suivante (dans laquelle (g_i) désigne une base hilbertienne de G):

$$\|u\|_2^2 = \mathrm{tr}(u \circ u^*) = \|u \circ u^*\|_1 = \sum_i |u^*(g_i)|^2. \tag{0.5}$$

On a $\|u\|_2 \geqq \|u\|$ pour tout élément u de $\mathscr{L}_2(H,G)$. On a en outre $\mathscr{L}_1(H,G) \subset \mathscr{L}_2(H,G)$ et $\|u\|_1 \geqq \|u\|_2$ pour tout élément u de $\mathscr{L}_1(H,G)$.

Si u est un élément de $\mathscr{L}_2(H,G)$, et v un élément de $\mathscr{L}_2(G,F)$, l'opérateur $v \circ u$ est nucléaire et vérifie la relation

$$\|v \circ u\|_1 \leqq \|v\|_2 \, \|u\|_2. \tag{0.6}$$

Considérons des opérateurs u, v, w, avec $u \in \mathscr{L}(H,G)$, $v \in \mathscr{L}(G,F)$, $w \in \mathscr{L}(F,E)$; si v est nucléaire (resp. de Hilbert-Schmidt), il en est de même de $w \circ v \circ u$, et l'on a

$$\|w \circ v \circ u\|_1 \leqq \|w\| \, \|v\|_1 \, \|u\| \ (\text{resp. } \|w \circ v \circ u\|_2 \leqq \|w\| \, \|v\|_2 \, \|u\|). \tag{0.7}$$

Etant donnés un élément u_1 de $\mathscr{L}(E_1, H)$ et un élément u_2 de $\mathscr{L}(E_2, H)$, on désigne par $u_1 \oplus u_2$ l'élément de $\mathscr{L}(E_1 \times E_2, H)$ défini par

$$u_1 \oplus u_2(e_1, e_2) = u_1(e_1) + u_2(e_2). \tag{0.8}$$

On a:

$$u_1(e_1) = u_1 \oplus u_2(e_1, 0), \qquad u_2(e_2) = u_1 \oplus u_2(0, e_2),$$

$$(u_1 \oplus u_2) \circ (u_1 \oplus u_2)^* = u_1 \circ u_1^* + u_2 \circ u_2^*. \tag{0.9}$$

Par conséquent, pour que l'opérateur $u_1 \oplus u_2$ soit de Hilbert-Schmidt, il faut et il suffit que chacun des opérateurs u_1, u_2 soit de Hilbert-Schmidt. En outre, si cette condition est remplie, on a, d'après (0.5), (0.9),

$$\|u_1 \oplus u_2\|_2^2 = \|u_1\|_2^2 + \|u_2\|_2^2. \tag{0.10}$$

Dans toute la suite, on se place sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, muni d'une filtration $(\mathscr{F}_t)$ vérifiant les conditions habituelles. Selon les conventions de [4], on appelle *tribu prévisible* la tribu engendrée sur l'ensemble

$$]\!]0, \infty[\![=]0, \infty[\times \Omega$$

par les *rectangles prévisibles*, c'est-à-dire par les ensembles de la forme $]s, t] \times A$, avec $0 \leqq s < t < \infty$, $A \in \mathscr{F}_s$.

Si B est un espace de Banach, on appelle *processus prévisible* à valeurs dans B toute application mesurable de l'ensemble $]\!]0, \infty[\![$, muni de la tribu prévisible, dans l'espace B (muni de la tribu borélienne). Le processus prévisible X est dit:

fortement prévisible si l'ensemble de ses valeurs est une partie séparable de B;

élémentaire si X est étagé sur le semiclan des rectangles prévisibles.

L'espace des processus prévisibles élémentaires, à valeurs dans B, est désigné par $\mathscr{E}(B)$.

Si X (resp. Y) est une application qui, à tout élément (t, ω) de $]\!]0, \infty[\![$, associe un opérateur linéaire, non nécessairement borné, de H dans G (resp. de G dans F), on désigne simplement par $Y \circ X$ l'application qui, à tout élément (t, ω) de $]\!]0, \infty[\![$, associe l'opérateur $Y(t, \omega) \circ X(t, \omega)$ (produit de composition, au sens des opérateurs non-bornés).

On désigne par $\mathscr{M}^2(H)$ l'espace constitué par les martingales M, à valeurs dans H, qui sont nulles en 0, continues à droite et «de carré intégrable», c'est-à-dire telles que l'on ait

$$E[\sup_t |M_t|^2] < +\infty.$$

L'espace $\mathscr{M}^2(H)$ est muni de sa structure habituelle d'espace de Hilbert (avec identification de deux martingales indistinguables); le produit scalaire dans $\mathscr{M}^2(H)$ est défini par

$$(M \mid N)_{\mathscr{M}^2(H)} = \int (M_\infty(\omega) | N_\infty(\omega))_H \, P(d\omega).$$

Si M est une martingale de $\mathscr{M}^2(H)$, le processus, à valeurs dans $\mathscr{L}_1(H)$,

$$(t, \omega) \mapsto M(t, \omega) \otimes M(t, \omega)$$

(que l'on désignera par $M \otimes M$) admet une mesure de Doléans μ (définie dans la tribu prévisible, et à valeurs dans $\mathscr{L}_1(H)$).

La variation totale $|\mu|$ de cette mesure coïncide (voir [8], 14.3) avec la mesure de Doléans du processus réel

$$(t, \omega) \mapsto |M(t, \omega)|^2$$

(désigné par $|M|^2$). En outre, la mesure μ admet une densité par rapport à sa variation totale, et il est possible de choisir, pour cette densité, une «bonne» version: c'est-à-dire une version Q, dont chaque valeur $Q(t, \omega)$ soit un élément de $\mathscr{L}_1(H)$ positif, autoadjoint et de norme égale à 1 (voir [8], 14.3).

On désigne enfin par $\langle M, M \rangle$ le compensateur prévisible de la sous-martingale réelle $|M|^2$: c'est-à-dire le processus réel, nul en 0, croissant et continu à droite, caractérisé (à indistinguabilité près) par les deux propriétés suivantes:

(a) $\langle M, M \rangle$ admet $|\mu|$ comme mesure de Doléans (autrement dit, la différence $|M|^2 - \langle M, M \rangle$ est une martingale).

(b) La restriction de $\langle M, M \rangle$ à $]\!]0, \infty[\![$ est un processus réel prévisible.

1. Quelques lemmes sur les opérateurs linéaires

Dans ce paragraphe nous démontrerons un certain nombre de lemmes techniques, concernant les opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert, dont nous aurons besoin dans la suite. Si u est un tel opérateur, nous désignerons par $\mathscr{N}(u)$ son noyau et par $\mathscr{I}(u)$ son image.

Soit r un élément de $\mathscr{L}(H)$, autoadjoint et positif. Un tel élément est un opérateur monotone maximal (voir [2], p. 113, Remarque 8). On peut donc considérer, pour tout scalaire $\lambda > 0$, l'opérateur (autoadjoint et positif)

(1.1) $$j_\lambda = (I + \lambda r)^{-1}.$$

On a (voir [2], p. 102, Prop. VII.2):

(1.2) $$\|j_\lambda\| \leqq 1, \qquad \|I - j_\lambda\| \leqq 1,$$

(1.3) $$I - j_\lambda = \lambda j_\lambda \circ r = \lambda r \circ j_\lambda.$$

Il en résulte notamment que l'opérateur $I - j_\lambda$ est, lui aussi, positif.

(1.4) **Lemme.** *Soit r un élément de $\mathscr{L}(H)$, autoadjoint et positif. Lorsque λ tend vers l'infini, l'opérateur j_λ défini par* (1.1) *converge, en tout point de H, vers la projection orthogonale de H sur $\mathscr{N}(r)$.*

En d'autres termes, l'opérateur (1.3) *converge, en tout point de H, vers la projection orthogonale de H sur le sous-espace*

$$\mathscr{N}(r)^\perp = \overline{\mathscr{I}(r)}.$$

Démonstration. L'opérateur (1.3) a une norme inférieure ou égale à 1. En outre, il est nul sur $\mathscr{N}(r)$. Il suffit donc de vérifier qu'il converge vers l'identité en chaque point de $\mathscr{I}(r)$. En d'autres termes, il suffit de vérifier que j_λ converge vers 0 en chaque point de $\mathscr{I}(r)$.

Or, ceci résulte de la relation

$$\|j_\lambda \circ r\| = \frac{1}{\lambda} \|I - j_\lambda\| \leqq \frac{1}{\lambda}. \quad \square$$

(1.5) **Corollaire.** *Soit r un élément de $\mathscr{L}(H)$, autoadjoint et positif, et soit u un élément de $\mathscr{L}_2(H, G)$ tel que l'on ait*

$$\mathcal{N}(r) \subset \mathcal{N}(u), \tag{1.6}$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{I}(u^*) \subset \mathcal{N}(r)^{\perp}. \tag{1.7}$$

On a alors, avec la notation (1.1).

$$\|u \circ (I - j_\lambda)\|_2 \leqq \|u\|_2. \tag{1.8}$$

En outre, lorsque λ tend vers l'infini, l'opérateur $u \circ (I - j_\lambda)$ converge vers u dans $\mathscr{L}_2(H, G)$.

Démonstration. La relation (1.8) résulte de la deuxième des inégalités (1.2).

Pour prouver l'autre assertion, considérons la différence

$$u - u \circ (I - j_\lambda) = u \circ j_\lambda.$$

Il s'agit de prouver que la norme de cet opérateur dans $\mathscr{L}_2(H, G)$ converge vers 0 lorsque λ tend vers l'infini.

Fixons, à cet effet, une base hilbertienne (g_i) de G. On a alors, d'après (0.5),

$$\|u \circ j_\lambda\|_2^2 = \sum_i |j_\lambda \circ u^*(g_i)|^2.$$

La première des relations (1.2) entraîne d'autre part que, pour tout $\lambda > 0$, la famille sommable

$$(|j_\lambda \circ u^*(g_i)|^2)_i$$

est majorée par la famille sommable que l'on en déduit en remplaçant j_λ par l'identité.

Tout est donc réduit à prouver que l'on a, pour chaque indice i,

$$\lim_{\lambda \to \infty} j_\lambda \circ u^*(g_i) = 0.$$

Or, ceci résulte du fait que $u^*(g_i)$ appartient, d'après (1.7), à $\mathcal{N}(r)^{\perp}$, et que j_λ converge, en tout point de H, vers la projection orthogonale de H sur $\mathcal{N}(r)$ (voir lemme précédent). $\square$

(1.9) **Lemme.** *Soit r un élément de $\mathscr{L}(E, H)$ et soit s un élément de $\mathscr{L}(F, H)$.*

1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $r \circ r^* = s \circ s^*$.

(b) *Il existe un élément u de $\mathscr{L}(E, F)$ tel que l'on ait*

$$r = s \circ u, \qquad s = r \circ u^*. \tag{1.10}$$

2. *Supposons la condition* (a) *remplie, et posons*

$$(1.11) \qquad q = r \circ r^* = s \circ s^*.$$

Considérons, pour tout scalaire $\lambda > 0$, *l'élément* j_λ *de* $\mathscr{L}(H)$ *et l'élément* u_λ *de* $\mathscr{L}(E, F)$ *définis par*

$$(1.12) \qquad j_\lambda = (I + \lambda q)^{-1}, \qquad u_\lambda = \lambda s^* \circ j_\lambda \circ r.$$

On a alors $\|u_\lambda\| \leqq 1$. *En outre, lorsque* λ *tend vers l'infini,* u_λ *converge, en tout point de* E, *vers un élément* u *de* $\mathscr{L}(E, F)$ *qui vérifie les relations* (1.10) *et qui s'annule sur* $\mathscr{N}(r)$.

Démonstration. L'implication (b)$\Rightarrow$(a) est immédiate. Les relations (1.10) entraînent en effet

$$r \circ r^* = s \circ u \circ r^* = s \circ s^*.$$

Passons à prouver la deuxième assertion du lemme. La relation

$$(s^*(h) | s^*(h)) = (h | q(h))$$

montre que l'on a $\mathscr{N}(q) \subset \mathscr{N}(s^*)$, c'est-à-dire $\mathscr{I}(s) \subset \overline{\mathscr{I}(q)}$.

Par conséquent, si l'on désigne par p la projection orthogonale de H sur $\overline{\mathscr{I}(q)}$, on peut écrire

$$p \circ s = s.$$

En remplaçant s par r, on trouve également

$$p \circ r = r.$$

Remarquons maintenant que la relation $r \circ r^* = q$ entraîne

$$(1.13) \qquad u_\lambda \circ r^* = \lambda s^* \circ j_\lambda \circ q = s^* \circ (I - j_\lambda).$$

En outre, lorsque λ tend vers l'infini, $I - j_\lambda$ converge vers p en tout point de H (voir Lemme (1.4)). Il en résulte, pour tout élément h de H,

$$(1.14) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} u_\lambda \circ r^*(h) = s^* \circ p(h) = (p \circ s)^*(h) = s^*(h).$$

Il est clair, d'autre part, que u_λ est nul sur $\mathscr{N}(r)$. Il suffit donc, pour prouver la relation $\|u_\lambda\| \leqq 1$ et la convergence du u_λ en tout point de E, de vérifier que l'on a

$$|u_\lambda \circ r^*(h)| \leqq |r^*(h)|$$

pour tout élément h de H.

Or, cette relation peut se mettre, grâce à (1.13) et (1.11), sous chacune des deux formes suivantes:

$$(s^* \circ (I - j_\lambda)(h) | s^* \circ (I - j_\lambda)(h)) \leqq (r^*(h) | r^*(h)),$$
$$(h | (I - j_\lambda) \circ q \circ (I - j_\lambda)(h)) \leqq (h | q(h)).$$

Elle équivaut donc à la propriété de l'opérateur

$$q-(I-j_\lambda)\circ q\circ(I-j_\lambda)$$

d'être positif: propriété, celle-ci, que l'on démontre aisément à l'aide de la relation $I-j_\lambda=\lambda j_\lambda\circ q=\lambda q\circ j_\lambda$.

On a ainsi prouvé que, lorsque λ tend vers l'infini, u_λ converge, en tout point de E, vers un opérateur u appartenant à $\mathscr{L}(E,F)$ (et nul sur $\mathscr{N}(r)$).

D'après (1.14), cet opérateur vérifie la relation $u\circ r^*=s^*$, qui n'est rien d'autre que la forme transposée de la seconde des égalités (1.10).

De façon analogue, en partant de la relation

$$s\circ u_\lambda=\lambda q\circ j_\lambda\circ r=(I-j_\lambda)\circ r,$$

on trouve que u vérifie aussi la première des égalités (1.10):

$$s\circ u=p\circ r=r. \quad \square$$

Le lemme qu'on vient de démontrer peut être complété par la proposition suivante:

(1.15) *Etant donnés un élément r de $\mathscr{L}(E,H)$ et un élément s de $\mathscr{L}(F,H)$, liés par la relation $r\circ r^*=s\circ s^*$, considérons un élément u de $\mathscr{L}(E,F)$ vérifiant les relations* (1.10) *et s'annulant sur $\mathscr{N}(r)$.*

L'opérateur $u\circ u^*$ coïncide alors avec la projection orthogonale de F sur le sous-espace

$$\mathscr{N}(s)^\perp=\overline{\mathscr{I}(s^*)}. \tag{1.16}$$

Démonstration. La relation $r=s\circ u$ entraîne l'inclusion $\mathscr{N}(u)\subset\mathscr{N}(r)$. Puisque l'inclusion opposée est vraie par hypothèse, on a l'égalité

$$\mathscr{N}(u)=\mathscr{N}(r).$$

En outre, les relations

$$u\circ r^*=s^*, \qquad (s^*(h)|s^*(h))=(r^*(h)|r^*(h))$$

montrent que l'opérateur u applique isométriquement le sous-espace

$$\mathscr{N}(r)^\perp=\overline{\mathscr{I}(r^*)}$$

sur le sous-espace (1.16). Il en résulte

$$\mathscr{I}(u)=\mathscr{N}(s)^\perp,$$

et par conséquent

$$\mathscr{N}(s)=\mathscr{N}(u^*). \tag{1.17}$$

Il suffit alors de remarquer que l'opérateur $u \circ u^*$ s'annule sur le sous-espace (1.17) et qu'il coïncide avec l'identité sur le sous-espace (1.16) (à cause de la relation $u \circ u^* \circ s^* = u \circ r^* = s^*$). □

(1.18) **Corollaire.** *Soient r un élément de $\mathscr{L}(E, H)$ et s un élément de $\mathscr{L}(F, H)$, liés par la relation $r \circ r^* = s \circ s^*$.*

On a alors $\mathscr{I}(r) = \mathscr{I}(s)$.

Soient x, y deux opérateurs linéaires non-bornés de H dans G, dont les domaines contiennent l'image commune de r et de s.

(a) *Si les opérateurs $x \circ r$, $y \circ r$ sont continus, il en est de même des opérateurs $x \circ s$, $y \circ s$, et l'on a alors*

$$(y \circ r) \circ (x \circ r)^* = (y \circ s) \circ (x \circ s)^*.$$

(b) *Si les opérateurs $x \circ r$, $y \circ r$ sont de Hilbert-Schmidt, il en est de même des opérateurs $x \circ s$, $y \circ s$, et l'on a alors*

$$(y \circ r \mid x \circ r)_{\mathscr{L}_2(E, G)} = (y \circ s \mid x \circ s)_{\mathscr{L}_2(F, G)}.$$

Démonstration. Il existe, en vertu de (1.9) (2), un élément u de $\mathscr{L}(E, F)$ vérifiant les relations (1.10) et s'annulant sur $\mathscr{N}(r)$, donc tel (d'après (1.15)) que l'opérateur $u \circ u^*$ coïncide avec la projection orthogonale de F sur le sous-espace (1.16).

Les relations (1.10) montrent que l'on a $\mathscr{I}(r) = \mathscr{I}(s)$.

Elles permettent en outre d'écrire

$$x \circ r = (x \circ s) \circ u, \qquad x \circ s = (x \circ r) \circ u^*.$$

A partir de ces égalités, on voit que, pour que $x \circ r$ soit continu, il faut et il suffit que $x \circ s$ soit continu.

Si maintenant on suppose que les opérateurs $x \circ r$, $y \circ r$ (donc aussi les opérateurs $x \circ s$, $y \circ s$) sont continus, on peut écrire

$$\begin{aligned}(y \circ r) \circ (x \circ r)^* &= (y \circ s \circ u) \circ (x \circ s \circ u)^* \\ &= (y \circ s) \circ u \circ u^* \circ (x \circ s)^* \\ &= (y \circ s) \circ (x \circ s)^*.\end{aligned}$$

L'assertion (a) est ainsi démontrée. Il en résulte aussitôt l'assertion (b) (voir (0.4)). □

2. L'espace des processus intégrables par rapport à une martingale de carré intégrable

Comme nous l'avons déjà rappelé dans l'introduction, le premier pas de la théorie de Métivier consiste à associer, à toute martingale M de $\mathscr{M}^2(H)$, un certain espace de Hilbert $L^*(M; H, G)$. Les éléments de cet espace sont des applications de $]\!]0, \infty[\![$ dans l'ensemble des opérateurs linéaires non-bornés de H dans G. Le sous-espace Λ^2 des éléments de L^* qui sont «intégrables par rapport à M» est défini ensuite comme étant l'adhérence, dans L^*, de l'espace $\mathscr{E}(\mathscr{L}(H, G))$ des processus prévisibles élémentaires à valeurs dans $\mathscr{L}(H, G)$.

Nous démontrerons que cette adhérence coïncide en fait avec l'espace L^* tout entier. Pour cette raison, nous désignerons directement par Λ^2 l'espace L^* de Métivier. En outre, nous donnerons, de cet espace, une définition en peu plus souple que celle de Métivier. (Pour l'équivalence des deux définitions, voir la remarque (2.7) ci-dessous.)

Dans toute la suite de ce paragraphe, on considère un élément M fixé dans $\mathscr{M}^2(H)$, et l'on désigne par μ la mesure de Doléans du processus $M \otimes M$ (à valeurs dans $\mathscr{L}_1(H)$).

(2.1) **Définition.** Un processus prévisible R, à valeurs dans $\mathscr{L}_2(E, H)$, sera dit un *processus de Métivier* pour M si le processus prévisible $R \circ R^*$ (à valeurs dans $\mathscr{L}_1(H)$) est une version de la densité de μ par rapport à $|\mu|$.

Le processus de Métivier R sera dit *canonique* s'il est à valeurs dans l'espace $\mathscr{L}_2(H) = \mathscr{L}_2(H, H)$ et si chacune de ses valeurs est un opérateur positif et autoadjoint.

On peut toujours construire, pour la martingale M, un processus de Métivier canonique. Il suffit en effet de choisir une version Q de la densité de μ par rapport à $|\mu|$, de telle façon que chacune des valeurs de Q soit un élément de $\mathscr{L}_1(H)$ positif et autoadjoint, et de poser ensuite $R = Q^{1/2}$. (On a alors $\|R\|_2^2 = \|Q\|_1 = 1$ presque partout pour la mesure $|\mu|$.)

En outre, il est clair que deux processus de Métivier canoniques pour M sont équivalents pour la mesure $|\mu|$.

(2.2) **Définition.** Soit R un processus de Métivier pour M, à valeurs dans $\mathscr{L}_2(E, H)$, et soit X une application de $]\!]0, \infty[\![$ dans l'ensemble des opérateurs linéaires non-bornés de H dans G.

Nous dirons que R est *compatible* avec X (par rapport à la martingale M) si $X \circ R$ est un processus prévisible, à valeurs dans $\mathscr{L}_2(E, G)$, vérifiant la relation

$$\int \|X \circ R\|_2^2 \, d|\mu| < +\infty. \tag{2.3}$$

(2.4) *Remarque.* Dans les hypothèses de la définition précédente, soit A une partie prévisible de $]\!]0, \infty[\![$, de complémentaire négligeable pour la mesure $|\mu|$. Si R est un processus de Métivier pour M, compatible avec X, il en est de même du processus $I_A R$ (qui coïncide avec R sur A et qui est nul ailleurs).

(2.5) **Définition.** Soit X une application de $]\!]0, \infty[\![$ dans l'ensemble des opérateurs linéaires non-bornés de H dans G.

On dira que X est *intégrable* par rapport à M s'il existe un processus de Métivier pour M, qui soit compatible avec X (au sens de (2.2)).

L'ensemble des applications X de ce type sera désigné par $\Lambda^2(M; H, G)$ ou par $\Lambda^2(\mu; H, G)$.

(2.6) **Proposition.** *Soit X un élément de $\Lambda^2(M; H, G)$ et soit R un processus de Métivier quelconque pour M, à valeurs dans $\mathscr{L}_2(E, H)$.*

Il existe alors une partie prévisible A de $]\!]0, \infty[\![$, de complémentaire négligeable pour la mesure $|\mu|$, telle que le processus $I_A R$ soit compatible avec X.

Démonstration. Puisque X est un élément de $\Lambda^2(M; H, G)$, il existe, pour la martingale M, un processus de Métivier compatible avec X: soit S un tel processus, que l'on supposera à valeurs dans $\mathscr{L}_2(F, H)$.

(a) Supposons d'abord que la relation $R \circ R^* = S \circ S^*$ soit vérifiée *partout*, et montrons que le processus R est alors compatible avec X.

Remarquons, à cet effet, qu'il existe, en vertu de (1.9) (2), un processus U fortement prévisible[1], à valeurs dans $\mathscr{L}(E, F)$, tel que l'on ait

$$R = S \circ U, \qquad S = R \circ U^*,$$

et par conséquent

$$X \circ R = (X \circ S) \circ U, \qquad X \circ S = (X \circ R) \circ U^*.$$

Il en résulte que $X \circ R$ est un processus prévisible, à valeurs dans $\mathscr{L}_2(E, G)$, et que l'on a (d'après (1.9) (1)):

$$(X \circ R) \circ (X \circ R)^* = (X \circ S) \circ (X \circ S)^*.$$

La compatibilité de S avec X entraîne alors celle de R.

(b) Dans le cas général, il suffit de se ramener au cas précédent en considérant les processus $I_A R, I_A S$, où A désigne l'ensemble $\{R \circ R^* = S \circ S^*\}$ (prévisible et de complémentaire négligeable pour la mesure $|\mu|$). $\square$

(2.7) *Remarque.* La proposition précédente entraîne notamment qu'étant donné un élément X de $\Lambda^2(M; H, G)$, on peut toujours trouver, pour la martingale M, un processus de Métivier canonique $R = Q^{1/2}$ qui soit compatible avec X.

Cela prouve que notre espace $\Lambda^2(M; H, G)$ coïncide avec l'espace L^* introduit par Métivier.

(2.8) **Théorème.**

(a) *Soit X, Y un couple d'éléments de $\Lambda^2(M; H, G)$. On peut alors choisir, pour la martingale M, un processus de Métivier R qui soit compatible à la fois avec X et avec Y.*

En outre, la quantité

$$(X \mid Y) = \int \operatorname{tr}[(Y \circ R) \circ (X \circ R)^*] \, d|\mu| \tag{2.9}$$

ne dépend pas du choix de R.

(b) *L'espace $\Lambda^2(M; H, G)$ est un espace vectoriel, sur lequel la formule* (2.9) *définit un produit scalaire.*

Muni de ce produit, $\Lambda^2(M; H, G)$ devient un espace de Hilbert, pourvu que l'on identifie deux éléments équivalents pour la mesure $|\mu|$.

Démonstration. L'existence de R résulte immédiatement de la proposition précédente et de la remarque (2.4).

Pour prouver que la quantité (2.9) ne dépend pas du choix de R, considérons deux processus de Métivier R, S, à valeurs dans $\mathscr{L}_2(E, H)$, $\mathscr{L}_2(F, H)$ respectivement, compatibles à la fois avec X et avec Y.

---

[1] (en tant que limite d'une suite simplement convergente de processus fortement prévisibles)

Sans diminuer la généralité, nous pourrons supposer que la relation $R \circ R^* = S \circ S^*$ soit vérifiée partout. La conclusion résulte alors de (1.18).

Enfin, pour l'assertion (b), voir [8], (où le produit scalaire est défini comme ci-dessus, mais à l'aide d'un processus de Métivier canonique $R = Q^{1/2}$). □

Remarque. La relation (2.9) donne en particulier, pour tout élément X de $\Lambda^2(M; H, G)$,

$$(X | X) = \int \operatorname{tr}[(X \circ R) \circ (X \circ R)^*] \, d|\mu| = \int \| X \circ R \|_2^2 \, d|\mu|.$$

Nous nous proposons maintenant de démontrer le résultat annoncé au début du paragraphe:

(2.10) **Théorème.** *L'espace $\mathscr{E}(\mathscr{L}_2(H, G))$ des processus prévisibles élémentaires à valeurs dans $\mathscr{L}_2(H, G)$ est partout dense dans l'espace de Hilbert $\Lambda^2(M; H, G)$.*

Il résulte de [8], 14.5, que si $R = Q^{1/2}$ est compatible avec un processus prévisible X à valeurs dans $\mathscr{L}_2(H, G)$, alors X appartient à l'adhérence de $\mathscr{E}(\mathscr{L}_2(H, G))$ dans $\Lambda^2(M; H, G)$. (Une vérification directe d'ailleurs serait plus facile que la preuve du théorème de [8].) Le théorème (2.10) apparaît donc comme un corollaire de la proposition suivante:

(2.11) **Proposition.** *Soit X un élément quelconque de $\Lambda^2(M; H, G)$, et soit R un processus de Métivier canonique pour M, compatible avec X.*

Posons, pour tout scalaire $\lambda > 0$,

$$J_\lambda(t, \omega) = (I + \lambda R(t, \omega))^{-1}, \qquad X_\lambda = \lambda X \circ R \circ J_\lambda.$$

On a alors les conclusions suivantes:

(a) *Pour tout λ, X_λ est un processus prévisible, à valeurs dans $\mathscr{L}_2(H, G)$, vérifiant la relation $\| X_\lambda \circ R \|_2 \leqq \| X \circ R \|_2$ (donc compatible avec R).*

(b) *On a*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int \| X \circ R - X_\lambda \circ R \|_2^2 \, d|\mu| = 0.$$

Autrement dit: lorsque λ tend vers l'infini, X_λ converge vers X dans l'espace $\Lambda^2(M; H, G)$.

Démonstration. Fixons (t, ω) et posons

$$x = X(t, \omega), \qquad r = R(t, \omega), \qquad j_\lambda = J_\lambda(t, \omega).$$

On a alors

$$X_\lambda(t, \omega) = \lambda (x \circ r) \circ j_\lambda \in \mathscr{L}_2(H, G),$$
$$X_\lambda \circ R(t, \omega) = \lambda (x \circ r) \circ j_\lambda \circ r = (x \circ r) \circ (I - j_\lambda).$$

L'assertion (a) découle donc de la première assertion du Corollaire (1.5) (appliqué en prenant $u = x \circ r$ et en tenant compte de l'inclusion évidente $\mathscr{N}(r) \subset \mathscr{N}(x \circ r)$).

Pour prouver l'assertion (b), il suffit d'appliquer la deuxième assertion de (1.5) et le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée. □

3. L'orthogonalité forte, le processus $\langle\!\langle M, N \rangle\!\rangle$ et l'inégalité de Kunita-Watanabe

Nous nous proposons maintenant de construire, pour tout couple M, N de martingales hilbertiennes de carré intégrable, un compensateur prévisible du processus $M \otimes N$ (compensateur que l'on désignera par $\langle\!\langle M, N \rangle\!\rangle$).

Nous parviendrons à cette construction à l'aide de la notion d'orthogonalité forte.

Commençons par rappeler qu'étant donné un élément M de $\mathcal{M}^2(H)$, on définit une isométrie $X \mapsto X \cdot M$ de $\Lambda^2(M; H, G)$ dans $\mathcal{M}^2(G)$: exactement comme dans le cas réel, cette isométrie peut être caractérisée comme étant la seule application linéaire continue qui coïncide sur $\mathscr{E}(\mathscr{L}_2(H, G))$ avec l'intégrale stochastique élémentaire.

(3.1) **Proposition.** *Soit M un élément de $\mathcal{M}^2(H)$, et N élément de $\mathcal{M}^2(G)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Le processus $M \otimes N$ (à valeurs dans $\mathscr{L}_1(H, G)$) est une martingale.*

(b) *Dans l'espace de Hilbert $\mathcal{M}^2(G)$, l'élément N est orthogonal à tout élément de la forme $X \cdot M$, avec $X \in \Lambda^2(M; H, G)$.*

Démonstration. Nous savons que toute forme linéaire continue sur $\mathscr{L}_1(H, G)$ est du type $u \mapsto \operatorname{tr}(u \circ v^*)$, avec v élément de $\mathscr{L}(H, G)$.

La condition (a) est donc vérifiée si et seulement si, pour tout élément v de $\mathscr{L}(H, G)$, le processus réel

$$L = \operatorname{tr}[(M \otimes N) \circ v^*] = \operatorname{tr}[v(M) \otimes N]$$

est une martingale, ce qui se traduit par la relation:

$$E[L_T] = 0 \qquad \text{pour tout temps d'arrêt } T.$$

On a, d'autre part,

$$\begin{aligned} E[L_T] &= \int (v(M_T(\omega)) | N_T(\omega))_G \, P(d\omega) \\ &= \int (v(M_T(\omega)) | N_\infty(\omega))_G \, P(d\omega) \\ &= ((I_{]\!]0, T]\!]} v) \cdot M | N)_{\mathcal{M}^2(G)}. \end{aligned}$$

La condition précédente est donc remplie si et seulement si la martingale N est orthogonale, dans l'espace de Hilbert $\mathcal{M}^2(G)$, à toute martingale du type $(I_{]\!]0, T]\!]} v) \cdot M$. Cette condition d'orthogonalité équivaut évidemment à la condition (b). □

Exactement comme dans le cas réel, lorsque les conditions équivalentes (a), (b) de la proposition précédente sont remplies, on dit que les deux martingales M, N sont *fortement orthogonales* (cf. [11]).

En outre, on démontre (cf. [11]) qu' étant donné un couple quelconque M, N, avec $M \in \mathcal{M}^2(H)$ et $N \in \mathcal{M}^2(G)$, on a toujours une *décomposition orthogonale* de N par rapport à M, c'est-à-dire une décomposition de N de la forme

(3.2) $$N = Z \cdot M + L,$$

où Z est un élément de $\Lambda^2(M; H, G)$ et L est une martingale de $\mathcal{M}^2(G)$, fortement orthogonale à M.

On s'intéresse maintenant à la construction d'un compensateur prévisible pour le processus $M \otimes N$. La décomposition (3.2) montre que ce processus est la somme du processus $M \otimes (Z \cdot M)$ et de la martingale $M \otimes L$: le problème est donc ramené à la recherche d'un compensateur prévisible pour le processus $M \otimes (Z \cdot M)$. Ce dernier problème est résolu, avec une formule explicite, par le théorème suivant, qui concerne un cas même un peu plus général (à savoir, celui d'un processus de la forme $(X \cdot M) \otimes (Y \cdot M)$):

(3.3) **Théorème.** *Soient M un élément de $\mathcal{M}^2(H)$, X un élément de $\Lambda^2(M; H, G)$, Y un élément de $\Lambda^2(M; H, F)$.*

Désignons par μ la mesure de Doléans de $M \otimes M$, et choisissons, pour la martingale M, un processus de Métivier R, qui soit compatible à la fois avec X et avec Y.

Alors le processus $(X \cdot M) \otimes (Y \cdot M)$ admet comme mesure de Doléans la mesure $[(Y \circ R) \circ (X \circ R)^*] \cdot |\mu|$; autrement dit, il admet comme compensateur prévisible le processus $[(Y \circ R) \circ (X \circ R)^*] \cdot \langle M, M \rangle$.

Démonstration. Il s'agit de prouver que l'on a

$$E[(X \cdot M)_T \otimes (Y \cdot M)_T] = \int_{]\!]0, T]\!]} (Y \circ R) \circ (X \circ R)^* \, d|\mu|$$

pour tout temps d'arrêt T. Or ceci est immédiat lorsque X, Y sont des processus prévisibles élémentaires. Pour étendre la conclusion au cas général, il suffit d'utiliser un argument de continuité. □

Grâce au théorème que l'on vient de démontrer (et aux considérations qui le précèdent), on peut affirmer qu'étant données une martingale M de $\mathcal{M}^2(H)$ et une martingale N de $\mathcal{M}^2(G)$, le processus $M \otimes N$, à valeurs dans $\mathcal{L}_1(H, G)$, admet toujours une mesure de Doléans, donc aussi un compensateur prévisible. Nous désignerons par $\langle\!\langle M, N \rangle\!\rangle$ un tel compensateur. En outre, nous désignerons par $|\langle M, N \rangle|$ le processus réel, nul en 0, croissant et continu à droite, caractérisé (à indistinguabilité près) par les deux propriétés suivantes:

(a) $|\langle M, N \rangle|$ admet comme mesure de Doléans la variation totale de la mesure de Doléans de $M \otimes N$.

(b) La restriction de $|\langle M, N \rangle|$ à $]\!]0, \infty[\![$ est un processus réel prévisible.

Avec ces notations, on peut écrire, dans les hypothèses du théorème précédent,

$$\langle\!\langle X \cdot M, Y \cdot M \rangle\!\rangle = [(Y \circ R) \circ (X \circ R)^*] \cdot \langle M, M \rangle, \tag{3.4}$$

$$|\langle X \cdot M, Y \cdot M \rangle| = \|(Y \circ R) \circ (X \circ R)^*\|_1 \cdot \langle M, M \rangle. \tag{3.5}$$

En outre, l'orthogonalité forte de deux martingales M, N peut se traduire par la relation $\langle\!\langle M, N \rangle\!\rangle = 0$.

Nous nous proposons maintenant de démontrer la «propriéte associative» de l'intégrale stochastique. A cet effet, nous commencerons par démontrer le lemme suivant:

(3.6) **Lemme.** *Soient M un élément de $\mathcal{M}^2(H)$, X un élément de $\Lambda^2(M; H, G)$, Y une application de $]\!]0, \infty[\![$ dans l'ensemble des opérateurs linéaires non-bornés de G dans F.*

Les conditions suivantes sont alors équivalentes:

(a) $Y \in \Lambda^2(X \cdot M; G, F)$.

(b) $Y \circ X \in \Lambda^2(M; H, F)$.

En outre, si ces conditions sont remplies, la norme de Y dans $\Lambda^2(X \cdot M; G, F)$ coïncide avec celle de $Y \circ X$ dans $\Lambda^2(M; H, F)$.

Démonstration. Désignons par μ la mesure de Doléans de $M \otimes M$, par v celle de $(X \cdot M) \otimes (X \cdot M)$. Choisissons en outre, pour la martingale M, un processus de Métivier R, à valeurs dans $\mathcal{L}_2(E, H)$, qui soit compatible avec X. On a alors, grâce au théorème précédent,

$$v = [(X \circ R) \circ (X \circ R)^*] \cdot |\mu|,$$

donc aussi

$$|v| = \| X \circ R \|_2^2 \cdot |\mu|.$$

Il en résulte

$$v = (S \circ S^*) \cdot |v|,$$

où S désigne le processus prévisible, à valeurs dans $\mathcal{L}_2(E, G)$, qui est nul sur l'ensemble $\{X \circ R = 0\}$ et qui coïncide ailleurs avec $\| X \circ R \|_2^{-1} (X \circ R)$. Ce processus est donc un processus de Métivier pour la martingale $X \cdot M$.

Si la condition (a) est remplie, on peut supposer, grâce à (2.6), que S soit compatible avec Y (par rapport à la martingale $X \cdot$ M). On voit alors que R est compatible avec $Y \circ X$ (par rapport à la martingale M) et que l'on a

$$\int \| Y \circ X \circ R \|_2^2 \, d|\mu| = \int \| Y \circ S \|_2^2 \, d|v|.$$

Réciproquement, si la condition (b) est remplie, on peut supposer que R soit compatible avec $Y \circ X$ (par rapport à la martingale M). On voit alors que S est compatible avec Y (par rapport à la martingale $X \cdot M$).

Le lemme est ainsi démontré. □

Il est facile maintenant d'obtenir le théorème suivant:

(3.7) **Théorème.** *Soit M un élément de $\mathcal{M}^2(H)$. Pour tout élément X de $\Lambda^2(M; H, G)$ et tout élément Y de $\Lambda^2(X \cdot M; G, F)$, on a*

$$Y \cdot (X \cdot M) = (Y \circ X) \cdot M. \tag{3.8}$$

Démonstration. Il résulte du lemme précédent que, pour tout X fixé dans $\Lambda^2(M; H, G)$, l'application linéaire

$$Y \mapsto (Y \circ X) \cdot M$$

de $\Lambda^2(X \cdot M; G, F)$ dans $\mathscr{M}^2(F)$ est une isométrie. Pour prouver que cette isométrie coïncide avec l'intégrale stochastique

$$Y \mapsto Y \cdot (X \cdot M),$$

il suffit de vérifier que la coïncidence a lieu sur l'espace $\mathscr{E}(\mathscr{L}(G, F))$ des processus prévisibles élémentaires. Fixons un tel processus Y, et considérons les deux applications linéaires continues

$$X \mapsto Y \cdot (X \cdot M), \qquad X \mapsto (Y \circ X) \cdot M$$

de $\Lambda^2(M; H, G)$ dans $\mathscr{M}^2(F)$. Pour prouver qu'elles coïncident, il suffit de vérifier que la coïncidence a lieu sur l'espace $\mathscr{E}(\mathscr{L}(H, G))$.

En d'autres termes, on est ramené à vérifier l'égalité (3.8) dans le cas où X est un élément de $\mathscr{E}(\mathscr{L}(H, G))$ et Y un élément de $\mathscr{E}(\mathscr{L}(G, F))$. Puisque ceci est immédiat, le théorème est démontré. $\square$

Il en résulte les corollaires suivants:

(3.9) *Soient M un élément de $\mathscr{M}^2(H)$, N un élément de $\mathscr{M}^2(G)$, X un élément de $\Lambda^2(M; H, E)$, Y un élément de $\Lambda^2(N; G, F)$.*

Si les martingales M, N sont fortement orthogonales, il en est de même des martingales $X \cdot M$, $Y \cdot N$.

(3.10) *Soient M un élément de $\mathscr{M}^2(H)$, N un élément de $\mathscr{M}^2(G)$, et considérons la décomposition orthogonale* (3.2) *de N par rapport à M. On a alors*

$$\langle\!\langle N, N \rangle\!\rangle = \langle\!\langle Z \cdot M, Z \cdot M \rangle\!\rangle + \langle\!\langle L, L \rangle\!\rangle.$$

(3.11) *Dans les hypothèses de* (3.9), *considérons la décomposition orthogonale* (3.2) *de N par rapport à M. Choisissons en outre, pour la martingale M, un processus de Métivier R, compatible avec Z. On a alors*

$$\langle\!\langle X \cdot M, Y \cdot N \rangle\!\rangle = [(Y \circ Z) \circ R \circ (X \circ R)^*] \cdot \langle M, M \rangle.$$

Il est facile maintenant d'obtenir l'analogue hilbertien de l'inégalité de Kunita-Watanabe du cas réel:

(3.12) **Théorème.** *Soit M un élément de $\mathscr{M}^2(H)$ et soit N un élément de $\mathscr{M}^2(G)$. On a alors, pour tout couple X, Y de processus mesurables positifs,*

$$\int X Y \, d|\langle M, N \rangle| \leqq \left(\int X^2 \, d\langle M, M \rangle\right)^{1/2} \left(\int Y^2 \, d\langle N, N \rangle\right)^{1/2}.$$

Démonstration. Considérons la décomposition orthogonale de N par rapport à M:

$$N = Z \cdot M + L.$$

Choisissons en outre, pour la martingale M, un processus de Métivier canonique $R = Q^{1/2}$, compatible avec Z.

On a alors, en vertu de (3.10) et (3.4),

$$\begin{aligned}\langle\!\langle N, N\rangle\!\rangle &= \langle\!\langle Z\cdot M, Z\cdot M\rangle\!\rangle + \langle\!\langle L, L\rangle\!\rangle\\ &= [(Z\circ R)\circ(Z\circ R)^*]\cdot\langle M, M\rangle + \langle\!\langle L, L\rangle\!\rangle,\\ \langle\!\langle M, N\rangle\!\rangle &= \langle\!\langle M, Z\cdot M\rangle\!\rangle = [(Z\circ R)\circ R]\cdot\langle M, M\rangle,\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\langle N, N\rangle &= \|Z\circ R\|_2^2\cdot\langle M, M\rangle + \langle L, L\rangle,\\ |\langle M, N\rangle| &= \|(Z\circ R)\circ R\|_1\cdot\langle M, M\rangle.\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\int XY\,d|\langle M, N\rangle| &= \int XY\,\|(Z\circ R)\circ R\|_1\,d\langle M, M\rangle\\ &\leqq \int XY\,\|Z\circ R\|_2\,d\langle M, M\rangle\\ &\leqq \left(\int X^2\,d\langle M, M\rangle\right)^{1/2}\left(\int Y^2\,\|Z\circ R\|_2^2\,d\langle M, M\rangle\right)^{1/2}\\ &\leqq \left(\int X^2\,d\langle M, M\rangle\right)^{1/2}\left(\int Y^2\,d\langle N, N\rangle\right)^{1/2}. \quad \square\end{aligned}$$

4. Distributivité de l'intégrale stochastique

Dans ce paragraphe nous nous proposons de démontrer, pour l'intégrale stochastique relative à une martingale hilbertienne de carré intégrable, la propriété de distributivité suivante: $X\cdot(M_1+M_2) = X\cdot M_1 + X\cdot M_2$.

Nous traiterons d'abord le cas particulier où les martingales M_1, M_2 sont fortement orthogonales:

(4.1) **Théorème.** *Soit $M = M_1 + M_2$, où M_1, M_2 sont deux martingales de $\mathscr{M}^2(H)$, fortement orthogonales. On a alors*

$$\Lambda^2(M; H, G) = \Lambda^2(M_1; H, G) \cap \Lambda^2(M_2; H, G). \tag{4.2}$$

En outre, por tout élément X de $\Lambda^2(M; H, G)$, on a

$$X\cdot M = X\cdot M_1 + X\cdot M_2. \tag{4.3}$$

Démonstration. L'hypothèse d'orthogonalité forte entraîne les relations

$$\begin{aligned}\langle\!\langle M, M\rangle\!\rangle &= \langle\!\langle M_1, M_1\rangle\!\rangle + \langle\!\langle M_2, M_2\rangle\!\rangle,\\ \langle M, M\rangle &= \langle M_1, M_1\rangle + \langle M_2, M_2\rangle.\end{aligned}$$

En d'autres termes, si l'on désigne par μ la mesure de Doléans du processus $M\otimes M$, et par μ_i celle du processus $M_i\otimes M_i$, on peut écrire

$$\mu = \mu_1 + \mu_2, \qquad |\mu| = |\mu_1| + |\mu_2|.$$

Pour chaque indice $i = 1, 2$, désignons par f_i un processus réel prévisible, à valeurs dans $[0, 1]$, tel que l'on ait $|\mu_i| = f_i^2\cdot|\mu|$. Choisissons en outre, pour la martingale M_i, un processus de Métivier R_i, à valeurs dans $\mathscr{L}_2(E_i, H)$. Grâce à (2.4), on pourra supposer que R_i soit nul sur l'ensemble prévisible $\{f_i=0\}$ (négligeable pour la mesure $|\mu_i|$). La relation

$$\mu_i=(R_i \circ R_i^*)\cdot|\mu_i|=f_i^2(R_i \circ R_i^*)\cdot|\mu|=(f_i R_i)\circ(f_i R_i)^* \cdot|\mu|$$

montre que l'on a (voir (0.9))

$$\begin{aligned}\mu=\mu_1+\mu_2 &=[(f_1 R_1)\circ(f_1 R_1)^*+(f_2 R_2)\circ(f_2 R_2)^*]\cdot|\mu|\\ &=(f_1 R_1 \oplus f_2 R_2)\circ(f_1 R_1 \oplus f_2 R_2)^* \cdot|\mu|.\end{aligned}$$

Autrement dit, le processus

$$R=f_1 R_1 \oplus f_2 R_2$$

est un processus de Métivier pour la martingale M.

Soit maintenant X une application de $]\!]0, \infty[\![$ dans l'ensemble des opérateurs linéaires non-bornés de H dans G. On voit alors facilement que, pour que $X \circ R$ soit un processus prévisible à valeurs dans $\mathscr{L}_2(E_1 \times E_2, G)$, il faut et il suffit que, pour chaque indice $i=1,2$, $f_i(X \circ R_i)$ (ou, ce qui revient au même, $X \circ R_i$) soit un processus prévisible à valeurs dans $\mathscr{L}_2(E_i, G)$. En outre, si ces conditions sont remplies, on a (voir (0.10))

$$\|X \circ R\|_2^2=f_1^2\ \|X \circ R_1\|_2^2+f_2^2\ \|X \circ R_2\|_2^2.$$

Par conséquent, le processus R est compatible avec X, par rapport à la martingale M, si et seulement si, pour chaque indice $i=1,2$, le processus R_i est compatible avec X, par rapport à la martingale M_i. En outre, si ces conditions sont remplies, on a

(4.4) $$\|X\|^2_{\Lambda^2(M;H,G)}=\|X\|^2_{\Lambda^2(M_1;H,G)}+\|X\|^2_{\Lambda^2(M_2;H,G)}.$$

En vertu de (2.6), la relation (4.2) est ainsi démontrée.

Il reste à prouver l'égalité (4.3). Il suffit pour cela de remarquer que l'application linéaire $X \mapsto X \cdot M_1+X \cdot M_2$ de $\Lambda^2(M; H, G)$ dans $\mathscr{M}^2(G)$ est continue (en vertu de (4.4)) et qu'elle coïncide avec l'intégrale stochastique $X \mapsto X \cdot M$ sur l'espace $\mathscr{E}(\mathscr{L}(H, G))$. $\square$

Voilà maintenant la propriété de distributivité dans le cas général:

(4.5) **Théorème.** *Soit $M=M_1+M_2$, où M_1, M_2 sont deux martingales de $\mathscr{M}^2(H)$. Tout élément X de $\Lambda^2(M_1; H, G) \cap \Lambda^2(M_2; H, G)$ appartient alors à $\Lambda^2(M; H, G)$ et vérifie l'égalité* (4.3).

Démonstration. Considérons la décomposition orthogonale

$$M_2=Z \cdot M_1+L,$$

où Z est un élément de $\Lambda^2(M_1; H, H)$ et L est une martingale de $\mathscr{M}^2(H)$, fortement orthogonale à M_1. On peut alors écrire, en appliquant plusieurs fois le théorème précédent et les résultats (3.6), (3.7):

$$\begin{aligned} X\cdot M_1 + X\cdot M_2 &= X\cdot M_1 + X\cdot (Z\cdot M_1 + L) \\ &= X\cdot M_1 + X\cdot (Z\cdot M_1) + X\cdot L \\ &= X\cdot M_1 + (X\circ Z)\cdot M_1 + X\cdot L \\ &= (X\circ (I+Z))\cdot M_1 + X\cdot L \\ &= X\cdot (I+Z)\cdot M_1 + X\cdot L \\ &= X\cdot [(I+Z)\cdot M_1 + L] \\ &= X\cdot M. \quad \square \end{aligned}$$

5. Application à un théorème de représentation

Si M est une martingale de $\mathscr{M}^2(H)$, l'image de $\Lambda^2(M; H, G)$ par l'isométrie $X \mapsto X\cdot M$ sera désignée par $\mathscr{M}^2(M; H, G)$. Il s'agit évidemment d'un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{M}^2(G)$. Dans le cas où G est égal à $\mathbb{R}$, on peut lui donner une caractérisation très simple:

(5.1) **Proposition.** *Soit M une martingale de $\mathscr{M}^2(H)$. L'espace $\mathscr{M}^2(M; H, \mathbb{R})$ est alors le plus petit sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{M}^2(\mathbb{R})$ contenant les martingales de la forme*

(5.2) $$(l\circ M)^{|T} = l\circ (M^{|T}) = (l I_{]\!]0,T]\!]})\cdot M,$$

avec l forme linéaire continue sur H, et T temps d'arrêt.

Démonstration. Il suffit en effet de remarquer qu'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}^2(\mathbb{R})$ contenant toutes les martingales de la forme (5.2) contient aussi les martingales de la forme $X\cdot M$, avec X élément de $\mathscr{E}(\mathscr{L}(H, \mathbb{R}))$. $\square$

Comme exemple d'application des résultats sur la distributivité de l'intégrale stochastique obtenus au paragraphe précédent, nous exposerons maintenant une démonstration élémentaire d'un théorème de représentation de Métivier-Gal'tchouk (voir [6], Th. 3.2; [10], Th. 2, p. 459).

(5.3) **Théorème.** *Soient M une martingale de $\mathscr{M}^2(H)$ et N une martingale de $\mathscr{M}^2(G)$. Les conditions suivantes sont alors équivalentes:*

(a) *Il existe un élément Z de $\Lambda^2(M; H, G)$, tel que l'on ait $N = Z\cdot M$.*

(b) *On a $\mathscr{M}^2(N; G, F) \subset \mathscr{M}^2(M; H, F)$ pour tout F (espace de Hilbert réel, séparable).*

(c) *On a $\mathscr{M}^2(N; G, \mathbb{R}) \subset \mathscr{M}^2(M; H, \mathbb{R})$.*

Démonstration. L'implication (a)$\Rightarrow$(b) est immédiate: la relation $N = Z\cdot M$ entraîne en effet, pour tout élément Y de $\Lambda^2(N; G, F)$,

$$Y\cdot N = Y\cdot (Z\cdot M) = (Y\circ Z)\cdot M$$

(voir (3.7)). Puisque l'implication (b)⇒(c) est évidente, il ne reste qu'à démontrer l'implication (c)⇒(a). Considérons, à cet effet, la décomposition orthogonale

$$N = Z \cdot M + L,$$

où Z est un élément de $\Lambda^2(M; H, G)$ et L est une martingale de $\mathscr{M}^2(G)$, fortement orthogonale à M. L'hypothèse (c) entraîne, pour tout élément Y de $\Lambda^2(N; G, \mathbb{R})$, l'existence d'un élément X de $\Lambda^2(M; H, \mathbb{R})$ vérifiant la relation $X \cdot M = Y \cdot N$. En vertu de (4.1), (3.7), cette relation peut se mettre sous chacune des formes suivantes:

$$\begin{aligned} X \cdot M &= Y \cdot (Z \cdot M) + Y \cdot L = (Y \circ Z) \cdot M + Y \cdot L, \\ Y \cdot L &= (X - Y \circ Z) \cdot M. \end{aligned}$$

Elle entraîne donc $Y \cdot L = 0$ (grâce à l'orthogonalité forte du couple L, M). Comme cette conclusion est valable, en particulier, pour tout élément Y de $\mathscr{E}(\mathscr{L}(G, \mathbb{R}))$, elle montre que l'on a $L = 0$, c'est-à-dire $N = Z \cdot M$. Le théorème est ainsi démontré. □

Bibliographie

1. Asperti, C.: Sur l'intégration stochastique par rapport à une martingale hilbertienne de carré intégrable. C.R. Acad. Sc. Paris, Série I **304**, 241–244 (1987)
2. Brézis, H.: Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Paris: Masson 1983
3. Köthe, G.: Topological vector spaces II. Berlin Heidelberg New York: Springer 1980
4. Letta, G.: Martingales et intégration stochastique. Pisa: Scuola Normale Superiore 1984
5. Métivier, M.: Reelle und vektorwertige Quasimartingale und die Theorie der stochastischen Integration. Berlin Heidelberg New York: Springer 1977
6. Métivier, M.: Stochastic Integration with respect to Hilbert-valued martingales, representation theorems and infinite dimensional filtering. In: Measure Theory Applications to Stochastic Analysis, pp. 13–25. Berlin Heidelberg New York: Springer 1978
7. Métivier, M.: Semimartingales. Berlin New York: de Gruyter 1982
8. Métivier, M., Pellaumail, J.: Stochastic integration. New York: Academic Press 1980
9. Métivier, M., Pistone, G.: Une formule d'isométrie pour l'intégrale stochastique hilbertienne et équations d'évolution linéaires stochastiques. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., **33**, 1–18 (1975)
10. Meyer, P.-A.: Notes sur les intégrales stochastiques I. Intégrales hilbertiennes. In: Séminaire de Probabilités XI, pp. 446–462. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
11. Ouvrard, J.Y.: Représentation de martingales vectorielles de carré intégrable à valeurs dans des espaces de Hilbert réels séparables. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **33**, 195–208 (1975)

Received June 23, 1986; in revised form August 8, 1988