Probab. Th. Rel. Fields 71, 183–229 (1986)

Probability Theory and Related Fields

Étude asymptotique de certains mouvements browniens complexes avec drift

J.F. Le Gall et M. Yor[1]

Laboratoire de Calcul des Probabilités, Université P. et M. Curie, 4, Place Jussieu, F-75230 Paris (5[e]), France

Introduction

Soit $Z=(Z_t, t\geqq 0)$ mouvement Brownien complexe issu de z_0. F. Spitzer ([19], 1958) a montré que si $(\phi_t^1, t\geqq 0)$ désigne une détermination continue de l'argument de $\{Z_u, u\leqq t\}$ autour de $z_1\in\mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$, alors:

$$(0.\text{a}) \qquad \frac{2}{\log t}\phi_t^1 \xrightarrow[t\to\infty]{(\text{loi})} C_1.$$

où C_1 désigne une variable de Cauchy, de paramètre 1.

J. Pitman et M. Yor ([17a, b], 1984) ont étendu le résultat de Spitzer en montrant la convergence en loi de:

$$(0.\text{b}) \qquad \frac{2}{\log t}(\phi_t^1, \ldots, \phi_t^n) \qquad (t\to\infty)$$

où $(\phi_t^i, t\geqq 0)$ est une détermination continue de l'argument de $\{Z_u, u\leqq t\}$ autour de z_i, les points $(z_1, \ldots, z_n)$ étant tous distincts, et distincts de z_0. La distribution asymptotique de (0.b) possède des propriétés remarquables: par exemple, si l'on note μ cette distribution asymptotique, et $(W^1, \ldots, W^n)$ un vecteur aléatoire ayant pour loi μ, $\sum_{i=1}^n \lambda_i W^i$ est une variable de Cauchy de paramètre 1, dès que $\lambda_i\geqq 0$, pour tout i, et $\Sigma_i \lambda_i = 1$; il est peut-être encore plus remarquable que μ ne dépend pas de la configuration des n points $(z_1, \ldots, z_n)$.

Il nous a semblé intéressant d'étudier la convergence en loi de (0.b), Z désignant maintenant un mouvement Brownien complexe avec drift, c'est-à-dire la solution de:

$$(0.\text{c}) \qquad dZ_t = d\Gamma_t + b(Z_t)\,dt, \qquad Z_0 = z_0,$$

---

[1] La recherche de cet auteur a été réalisée en partie avec l'aide de NSF Grant MCS 82-02552

avec b satisfaisant des hypothèses convenables, et (Γ_t) mouvement Brownien complexe. Le résultat obtenu ci-dessous pour la distribution limite de (0.b) dans ce cadre permet en particulier de bien comprendre le rôle des propriétés d'isotropie du mouvement Brownien complexe en ce qui concerne le fait que μ, dans le cas Brownien, ne dépend pas de la configuration des n points $(z_1, \dots, z_n)$.

De façon précise, sous l'hypothèse:

$$\text{(0.d)} \qquad \int_0^\infty dr\, b_i^*(r) < \infty, \qquad \text{où } b_i^*(r) = \sup_{0 \leqq \theta < 2\pi} |b(z_i + r e^{i\theta})| \, (1 \leqq i \leqq n),$$

on obtient comme distribution limite de

$$\text{(0.b)} \qquad \frac{2}{\log t} (\phi_t^1, \dots, \phi_t^n) \qquad (t \to \infty)$$

la loi du vecteur:

$$\text{(0.e)} \qquad (\Gamma_\sigma + \alpha_j L_\sigma \cdot C_j + 2 \langle k_j, v_j \rangle L_\sigma;\ 1 \leqq j \leqq n)$$

où $C_1, \dots, C_n$ sont n variables de Cauchy de paramètre 1,

Γ est un mouvement Brownien réel,

B est un mouvement Brownien réfléchi,

$\sigma = \inf\{t \geqq 0 \colon B_t = 1\}$, et L_σ est le temps local en 0 de B au temps σ.

$\Gamma, B, C_1, \dots, C_n$ sont indépendants.

Il reste à indiquer ce que sont les constantes α_j et $\langle k_j, v_j \rangle$; nous en donnons tout d'abord une description analytique: notons $R_t^j = |Z_t - z_j|$ et $H_t^j = \int_0^t \frac{ds}{(R_s^j)^2}$, et introduisons les processus (ρ_t^j) et (θ_t^j) définis par:

$$\log R_t^j = \rho_{H_t^j}^j; \qquad \phi_t^j = \theta_{H_t^j}^j.$$

On montre aisément (voir le paragraphe 1) l'existence de deux fonctions $h_j, k_j \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ qui s'expriment en fonction de b, permettant d'écrire le processus (ρ_t^j, θ_t^j) comme solution du système d'équations:

$$\text{(0.f)} \qquad \begin{cases} \rho_t^j = \rho_0^j + \beta_t^j + \int_0^t h_j(\rho_s^j + i\,\theta_s^j)\, ds \\ \theta_t^j = \theta_0^j + \gamma_t^j + \int_0^t k_j(\rho_s^j + i\,\theta_s^j)\, ds \end{cases}$$

où (β^j, γ^j) est un mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Sous l'hypothèse (0.d), le processus (ρ^j, θ^j) considéré comme prenant ses valeurs dans le cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, est récurrent au sens de Harris, et admet pour mesure invariante:

$$\text{(0.g)} \qquad v_j(d\lambda \times d\theta) = \exp\left(-2 \int_\lambda^\infty du \int_0^{2\pi} \delta_j(u, d\gamma)\, h^j(u + i\gamma)\right) d\lambda\, \delta_j(\lambda, d\theta),$$

où $\delta_j(\lambda, d\theta)$ est un noyau markovien sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi[$.

Finalement, la constante α_j est définie par:

$$\alpha_j = \exp\left(-2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^{2\pi} \delta_j(\lambda, d\gamma)\, h_j(\lambda + i\gamma)\right), \tag{0.h}$$

et $\langle k_j, v_j \rangle$ désigne l'intégrale de k_j relativement à dv_j; les constantes α_j et $\langle k_j, v_j \rangle$ sont donc définies à l'aide des invariants liés aux propriétés de récurrence du processus Z.

On retrouvera, dans notre méthode de démonstration, les principaux points de la méthode utilisée par Pitman-Yor [17]; par exemple, si $(\tilde{\phi}_t^j)$ est la partie martingale de (ϕ_t^j), on décompose $(\tilde{\phi}_t^j)$ en somme d'un «petit angle» $\int_0^t d\tilde{\phi}_s^j 1_{(R_s^j \leqq 1)}$, et d'un «grand angle» $\int_0^t d\tilde{\phi}_s^j 1_{(R_s^j \geqq 1)}$, et, en fait, en ce qui concerne la convergence de (0.b) vers (0.e), la contribution-toujours avec la normalisation $\left(\frac{\log t}{2}\right)$ - des «petits angles» est $\alpha_j L_\sigma \cdot C_j$, celle des «grands angles» est Γ_σ, et enfin, celle de la partie à variation bornée de (ϕ_t^j) est $\langle k_j, v_j \rangle L_\sigma$.

Les arguments essentiels de la démonstration de Pitman-Yor [17], à savoir le théorème de Knight sur les martingales continues orthogonales, et le théorème ergodique pour les fonctionnelles additives intégrables du processus Z, sont encore sous-jacents en différents points de notre démonstration Toutefois, celle-ci diffère de façon assez notable de celle faite en [17]: d'une part, on ne suppose pas que les disques $D_j = \{z\colon |z - z_j| \leqq 1\}$ sont disjoints, et l'on développe pour cela une version asymptotique du théorème de Knight; d'autre part, au lieu de remplacer le temps t par $T_{\sqrt{t}} \equiv \inf\{u\colon |Z_u| = \sqrt{t}\}$ comme dans Pitman-Yor [17], on étudie de façon précise la convergence en loi de

$$\{(\rho^j)_t^{(c)};\quad (\theta^j)_t^{(c)};\quad t \geqq 0,\quad 1 \leqq j \leqq n\}$$

lorsque $c \to \infty$, avec la notation: $X_t^{(c)} \equiv \frac{1}{c} X_{c^2 t}$ $(t \geqq 0)$; puis, pour terminer la démonstration de la convergence en loi de (0.b) vers (0.e), on utilise principalement la méthode de Laplace (c'est-à-dire $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ quand $p \to \infty$, si f est une fonction définie sur un espace de mesure finie et $\|f\|_p$ désigne la norme L^p de f sur cet espace); cette dernière partie de la démonstration est à rapprocher des arguments de Durrett [5] et Yor [25] dans l'étude du nombre de tours du mouvement Brownien complexe autour d'un point.

Avant de passer à l'examen des autres points de notre travail, indiquons que l'étude du nombre de tours autour d'un point a également été faite pour certaines diffusions planes, qui ont un comportement asymptotique très différent de celui du mouvement Brownien plan. En particulier, A. Friedman et M. Pinsky ([6], [7]) montrent que la limite p.s. de ϕ_t^1/t existe, lorsque $t \to \infty$, sous des hypothèses qui impliquent en particulier que le processus s'enroule asymptotiquement autour du point z_1.

Outre l'étude asymptotique de $(\phi_t^1, \dots, \phi_t^n)$ pour Z, mouvement Brownien avec drift, le présent article comprend une étude de la vitesse d'approche d'un nombre fini de points $\{z_1, \dots, z_n\}$ par le processus $(Z_u, u \geqq 0)$.

De façon précise, si l'on note $I_t^j = \inf_{s \leq t} |Z_s - z_j|$, on a:

$$\text{(0.k)} \qquad \frac{-2}{\log t}(\log I_t^j;\ j=1,2,\dots,n) \xrightarrow[(t\to\infty)]{\text{(loi)}} \left(\alpha_j \frac{e}{e_j};\ j=1,2,\dots,n\right)$$

où $(e, e_1, \dots, e_n)$ sont $(n+1)$ variables exponentielles, de paramètre 1, indépendantes, et les constantes α_j sont données par (0.h). On déduit ensuite aisément, d'un renforcement de (0.k), la convergence en loi de

$$\text{(0.k')} \qquad \frac{1}{|\log r|}(\log T_r^j,\ 1 \leq j \leq n), \qquad \text{lorsque } r \to 0, \quad \text{où} \quad T_r^j = \inf\{t : |Z_t - z_j| < r\}.$$

Ces résultats nous ont été inspirés, dans le cas du mouvement Brownien, par l'étude des petites valeurs de $I_t \equiv \inf_{s \leq t} |Z_s|$ qui figure au début de l'article de Spitzer [19]. A notre connaissance, les résultats multidimensionnels (0.k) et (0.k′) sont nouveaux, même dans le cadre Brownien, où cependant le résultat pour $n=1$ est implicite dans Itô-Mc Kean ([11], p. 133, Problem 4, et p. 231, Problem 4). Ces résultats donnent aussi une nouvelle interprétation des coefficients (α_j), qui vérifient:

$$\text{(0.l)} \qquad P(T_r^j < \inf\{T_r^i;\ 1 \leq i \leq n,\ i \neq j\}) \xrightarrow[r\to 0]{} \frac{\alpha_j}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}.$$

Ainsi, α_j mesure la façon dont le processus est attiré par le point z_j, relativement aux autres points.

De même que dans Pitman-Yor [17], nous étudions en outre les résultats de convergence en loi des angles $(\phi^1_{\cdot}, \dots, \phi^n_{\cdot})$, et des infimum $(I^1_{\cdot}, \dots, I^n_{\cdot})$ lorsque l'on remplace le temps t par $a(t)$, l'inverse au temps t d'une fonctionnelle additive intégrable. Les résultats obtenus s'interprètent de façon naturelle en termes du comportement asymptotique des nombres de tours (par exemple) effectués par une diffusion à valeurs sur la sphère autour de différents points de la sphère; le passage du plan à la sphère - et inversement - se faisant bien entendu au moyen d'une projection stéréographique. Cette partie du travail est à rapprocher de l'article de Lyons - Mc Kean [15], où l'étude asymptotique des nombres de tours pour le mouvement Brownien complexe, aux temps inverses d'une fonctionnelle additive intégrable, est faite directement sur la sphère.

Pour terminer cette introduction, soulignons qu'il nous semble maintenant que l'article de Pitman-Yor [17] et le présent travail sont bien loin d'épuiser toute la richesse des différentes questions sur le mouvement Brownien plan abordées par Spitzer [19]. Une autre partie du travail de Spitzer permet à Le Gall ([28]) de développer l'étude de la saucisse de Wiener dans le plan et d'en déduire certains résultats sur la mesure de Hausdorff des points multiples du mouvement Brownien plan.

Nous remercions vivement Jim Pitman qui nous a suggéré, après une lecture détaillée de ce travail, de nombreuses améliorations importantes de notre rédaction, tant du point de vue mathématique que typographique.

Le second auteur remercie également Jim Pitman et l'Université de Berkeley pour leur hospitalité pendant les mois de Juillet-Août 1982/83/84.

Plan de l'article

1. Formules de passage en coordonnées polaires
2. Existence et propriétés des mesures invariantes
3. Étude asymptotique de (ρ, θ)
4. Une version asymptotique du théorème de Knight
5. Application aux nombres de tours
6. Étude de la vitesse d'approche d'un nombre fini de points
7. Étude asymptotique de certaines diffusions sur la sphère

Quelques notations. Soit X une semi-martingale continue. Il existe [26] une version de la famille des temps locaux de X qui, considérée comme fonction de la variable d'espace, admet en tout point (a, t) une limite à droite et une limite à gauche, notées respectivement $L_t^{a+}(X)$ et $L_t^{a-}(X)$. Le temps local symétrique de X est défini par $L_t^a(X) = \frac{1}{2}(L_t^{a+}(X) + L_t^{a-}(X))$. Nous utiliserons sous différentes formes la formule d'Itô-Tanaka: soit f une fonction dont la dérivée seconde est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$, et f'_d, f'_g les dérivées respectivement à droite et à gauche de f; alors:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \tfrac{1}{2}(f'_d + f'_g)(X_s)\, dX_s + \tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f''(da)\, L_t^a(X).$$

La formule de densité de temps d'occupation s'écrit, pour toute fonction borélienne bornée f:

$$\int_0^t f(X_s)\, d\langle X \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} f(a)\, L_t^a(X)\, da.$$

Enfin, on utilisera fréquemment la notation: $T(X) = \inf\{s \colon X_s = 1\}$.

1. Formules de passage en coordonnées polaires

Nous supposons donné un processus continu Z, à valeurs dans $\mathbb{C}$, solution de l'équation différentielle stochastique:

$$dZ_t = d\Gamma_t + b(Z_t)\, dt, \tag{1.a}$$

où Γ désigne un mouvement brownien plan et la fonction $b\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est mesurable et bornée sur les compacts.

Il est bien connu (voir [20]) qu'il existe des solutions de (1.a) et qu'il y a unicité en loi de ces solutions. On en déduit que toute solution de (1.a) est un processus de Markov homogène.

Soit $z_0 = x_0 + i y_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(Z_0 = z_0) = 0$. Les hypothèses sur b et le théorème de Girsanov entraînent que P-p.s. Z ne visite pas le point z_0. Nous pouvons définir:

$$R_t = |Z_t - z_0| \qquad \text{et} \quad \phi_t = \operatorname{Arg}(Z_t - z_0),$$

$\operatorname{Arg}(Z_t - z_0)$ désignant une détermination continue de l'argument de $Z_t - z_0$. Une telle détermination est complèment définie par sa valeur en $t=0$. Pour fixer les idées, nous supposerons ϕ_0 à valeurs dans $[0; 2\pi[$.

Par analogie avec le cas brownien ($b \equiv 0$), on introduit le changement de temps lié au processus croissant: $H_t = \int_0^t \frac{ds}{R_s^2}$, et l'on définit deux nouveaux processus ρ et θ par:

$$\log(R_t) = \rho_{H_t}; \qquad \phi_t = \theta_{H_t}.$$

Notons $Z_t = X_t + i Y_t$, $\Gamma_t = \Gamma_t^1 + i \Gamma_t^2$ et $b = b_1 + i b_2$, où $X, Y, \Gamma^1, \Gamma^2, b_1, b_2$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a d'abord:

$$\log(R_t) = \log(R_0) + \int_0^t \frac{(X_s - x_0)\, d\Gamma_s^1 + (Y_s - y_0)\, d\Gamma_s^2}{R_s^2}$$
$$+ \int_0^t \frac{(X_s - x_0)\, b_1(Z_s) + (Y_s - y_0)\, b_2(Z_s)}{R_s^2}\, ds$$

$$\phi_t = \phi_0 + \int_0^t \frac{(X_s - x_0)\, d\Gamma_s^2 - (Y_s - y_0)\, d\Gamma_s^1}{R_s^2} + \int_0^t \frac{(X_s - x_0)\, b_2(Z_s) - (Y_s - y_0)\, b_1(Z_s)}{R_s^2}\, ds$$

Soit τ l'inverse de H: $\tau_t = \inf\{u; H_u > t\}$. Notons:

$$\beta_t = \int_0^{\tau_t} \frac{(X_s - x_0)\, d\Gamma_s^1 + (Y_s - y_0)\, d\Gamma_s^2}{R_s^2}; \qquad \gamma_t = \int_0^{\tau_t} \frac{(X_s - x_0)\, d\Gamma_s^2 - (Y_s - y_0)\, d\Gamma_s^1}{R_s^2}.$$

Le couple (β, γ) est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et on a:

$$\rho_t = \log(R_{\tau_t}) = \rho_0 + \beta_t + \int_0^{\tau_t} \frac{(X_s - x_0)\, b_1(Z_s) + (Y_s - y_0)\, b_2(Z_s)}{R_s^2}\, ds$$
$$\theta_t = \phi_{\tau_t} = \phi_0 + \gamma_t + \int_0^{\tau_t} \frac{(X_s - x_0)\, b_2(Z_s) - (Y_s - y_0)\, b_1(Z_s)}{R_s^2}\, ds$$

Introduisons les deux fonctions $h^\#, k^\#: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définies par:

$$h^\#(x + iy) = (x - x_0)\, b_1(x + iy) + (y - y_0)\, b_2(x + iy)$$
$$k^\#(x + iy) = (x - x_0)\, b_2(x + iy) - (y - y_0)\, b_1(x + iy).$$

Remarquons que $h^\#$ représente la composante radiale du drift b tandis que $k^\#$ est la composante orthogonale au rayon. On obtient:

$$\rho_t = \rho_0 + \beta_t + \int_0^{\tau_t} \frac{h^\#(Z_s)}{R_s^2}\, ds$$
$$\theta_t = \theta_0 + \gamma_t + \int_0^{\tau_t} \frac{k^\#(Z_s)}{R_s^2}\, ds.$$

En remarquant que $Z_{\tau_s} = \exp(\rho_s + i\theta_s)$ et en notant $h(z) = h^\#(\exp(z))$, $k(z) = k^\#(\exp(z))$, on trouve finalement:

$$(1.b)\qquad \begin{cases} \rho_t=\rho_0+\beta_t+\int_0^t h(\rho_s+i\theta_s)\,ds \\ \theta_t=\theta_0+\gamma_t+\int_0^t k(\rho_s+i\theta_s)\,ds. \end{cases}$$

Dans le cas où b est la fonction nulle, la représentation en skew product du mouvement brownien complexe découle des formules (1.b). Dans le cas général, (1.b) est un système différentiel stochastique liant les deux processus ρ et θ. Pour un certain nombre de questions et en particulier pour étudier le comportement asymptotique de ρ, il est intéressant de voir le couple (ρ, θ) comme un processus à valeurs sur le cylindre $G=\mathbb{R}\times(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ (h et k admettent la période $2i\pi$). On s'est ainsi ramené d'un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{C}$ à un processus de Markov à valeurs sur le cylindre G, qui du point de vue du comportement asymptotique sera plus facile à étudier. Nous verrons dans les parties suivantes comment passer de résultats portant sur le couple (ρ, θ) aux résultats correspondants pour Z.

2. Existence et propriétés des mesures invariantes

Cette partie est consacrée à l'étude des propriétés de récurrence des processus Z et (ρ, θ). Nous supposerons que b satisfait la condition suivante:

$$(2.a)\qquad \int_0^\infty b^*(r)\,dr<\infty, \qquad \text{où } b^*(r)=\sup_{0\leq\theta<2\pi}|b(z_0+r e^{i\theta})|$$

On peut traduire l'hypothèse (2.a) en termes des fonctions h et k; on obtient:

$$\text{si } h^*(u)=\sup_{0\leq\theta<2\pi}|h(u+i\theta)|, \qquad \text{et } k^*(u)=\sup_{0\leq\theta<2\pi}|k(u+i\theta)|,$$

$$(2.b)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}(h^*(u)+k^*(u))\,du<\infty.$$

Nous allons voir que (2.a), ou (2.b) entraîne la récurrence du processus Z. Hashminskii ([9]) montre la récurrence de Z sous des hypothèses plus générales que (2.a), mais en supposant que b est assez régulière (au moins de classe C^2). Plutôt que d'utiliser les résultats de Hashminskii, nous donnons ci-dessous une démonstration directe. On remarque d'abord que le processus ρ est récurrent; c'est une conséquence du lemme de comparaison suivant:

Lemme 2.1. *Soient ρ^+et ρ^- les processus définis de façon unique par:*

$$\rho_t^+=\rho_0+\beta_t+\int_0^t h^*(\rho_s^+)\,ds$$

$$\rho_t^-=\rho_0+\beta_t-\int_0^t h^*(\rho_s^-)\,ds$$

*Alors, $P-$*p.s.: *$\rho_t^-\leq\rho_t\leq\rho_t^+$ pour tout $t\geq 0$.*

Preuve. Montrons que $\rho_t^+ \geqq \rho_t$. On utilise la méthode de Zvonkin ([27]) pour supprimer la partie à variation finie. On pose pour tout réel x:

$$f(x)=\exp\left(-2\int_0^x h^*(u)\,du\right)$$

$$F(x)=\int_0^x f(y)\,dy.$$

Soient $\eta_t=F(\rho_t)$; $\eta_t^+=F(\rho_t^+)$.

On trouve:

$$\eta_t=F(\rho_0)+\int_0^t f\circ F^{-1}(\eta_s)\,d\beta_s+\int_0^t f(\rho_s)(h(\rho_s+i\theta_s)-h^*(\rho_s))\,ds$$

$$\eta_t^+=F(\rho_0)+\int_0^t f\circ F^{-1}(\eta_s^+)\,d\beta_s.$$

D'après [14], on a pour tout $t\geqq 0$: $L_t^0(\eta-\eta^+)=0$. Cela entraîne, en notant $x_+=\sup(x,0)$:

$$E[(\eta_t-\eta_t^+)_+]=E\left[\int_0^t 1_{(\eta_s>\eta_s^+)}f(\rho_s)(h(\rho_s+i\theta_s)-h^*(\rho_s))\,ds\right]\leqq 0$$

d'où $\eta_t\leqq\eta_t^+$ et aussi $\rho_t\leqq\rho_t^+$. □

Les processus ρ^+ et ρ^- étant récurrents, ρ l'est aussi. En utilisant les relations (1.b) et le fait que h et k sont bornées sur les compacts, on déduit immédiatement que le couple (ρ,θ) considéré comme processus à valeurs sur G, est récurrent. Finalement, le processus Z est lui aussi récurrent.

A l'aide du théorème de Girsanov, Stroock-Varadhan ([20]) montrent que Z est fortement fellérien. D'après les résultats d'Azéma-Duflo-Revuz ([1]), on en déduit que Z est récurrent au sens de Harris. Il existe alors une mesure invariante, unique à un facteur multiplicatif près.

Le même raisonnement s'applique au processus (ρ,θ). D'autre part Z et (ρ,θ) sont liés par la relation:

$$Z_t-z_0=\exp(\rho_{H_t}+i\theta_{H_t})\qquad\text{où: } H_t=\inf\left\{u\colon\int_0^u \exp(2\rho_s)\,ds>t\right\}.\tag{2.c}$$

Il en résulte que si ν est une mesure invariante pour (ρ,θ), on peut lui associer une mesure μ invariante pour Z, définie par:

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)\,\mu(dz)=\int_G f(z_0+\exp(\lambda+i\omega))\exp(2\lambda)\,\nu(d\lambda\,d\omega),\tag{2.d}$$

formule qui explicite la bijection existant entre les mesures invariantes pour (ρ,θ) et les mesures invariantes pour Z.

Soit ν une mesure invariante pour (ρ,θ). On peut désintégrer ν en:

$$\nu(d\lambda\times d\omega)=m(d\lambda)\,\delta(\lambda,d\omega)$$

avec pour tout λ, $\delta(\lambda,\mathrm{d}\omega)$ probabilité sur $[0,2\pi]$.

Nous allons voir qu'on peut expliciter m en termes du noyau $\delta(\lambda, d\omega)$ et de la fonction h. Soit f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que f' soit à support compact. (1.b) entraîne:

$$f(\rho_t) = f(\rho_0) + \int_0^t f'(\rho_s)\, d\beta_s + \int_0^t (f'(\rho_s)\, h(\rho_s + i\theta_s) + \tfrac{1}{2} f''(\rho_s))\, ds$$

L'invariance de ν entraîne:

$$E_\nu \left[\int_0^t (f'(\rho_s)\, h(\rho_s + i\theta_s) + \tfrac{1}{2} f''(\rho_s))\, ds \right] = 0, \qquad \text{i.e.:}$$

$$\int_{\mathbb{R}} m(d\lambda)(f'(\lambda) \int_0^{2\pi} h(\lambda + i\omega)\, \delta(\lambda, d\omega) + \tfrac{1}{2} f''(\lambda)) = 0.$$

Notons $\tilde{h}(\lambda) = \int_0^{2\pi} h(\lambda + i\omega)\, \delta(\lambda, d\omega)$. On voit que m satisfait, au sens des distributions, l'équation différentielle:

$$\tilde{h} \cdot m - \tfrac{1}{2} m' = 0$$

et donc: $m(d\lambda) = m(\lambda)\, d\lambda$, avec: $m(\lambda) = K \cdot \exp\left(-2 \int_\lambda^\infty \tilde{h}(u)\, du\right)$. En revenant à ν, on trouve

$$\nu(d\lambda \times d\omega) = K \cdot \exp\left(-2 \int_\lambda^\infty du \int_0^{2\pi} \delta(u, d\omega)\, h(u + i\omega)\right) d\lambda\, \delta(\lambda, d\omega).$$

La constante K traduit le fait que ν n'est définie qu'à un facteur multiplicatif près. En revenant à (2.d), on obtient l'expression d'une mesure invariante pour Z. Résumons les résultats obtenus dans la

Proposition 2.2. *Les processus (ρ, θ) et Z sont récurrents au sens de Harris. Il existe un noyau markovien $\delta(\lambda, d\omega)$ sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi[$ tel que:*

(i) *Toute mesure ν invariante pour (ρ, θ) s'écrit;*

$$\text{(2.e)} \qquad \nu(d\lambda \times d\omega) = K \cdot \exp\left(-2 \int_\lambda^\infty du \int_0^{2\pi} \delta(u, d\omega)\, h(u + i\omega)\right) d\lambda\, \delta(\lambda, d\omega).$$

(ii) *Toute mesure μ invariante pour Z s'écrit, en coordonnées polaires, avec point de base z_0:*

$$\text{(2.f)} \quad \mu(dr \times d\omega) = K \cdot r \exp\left(-2 \int_r^\infty x\, dx \int_0^{2\pi} \delta(\log x, d\omega)\, h(\log x + i\omega)\right) dr\, \delta(\log r, d\omega)$$

Il sera important pour la suite de se fixer une mesure invariante pour (ρ, θ) (et donc pour Z grâce à (2.d)). Dans le reste de cet article, nous supposerons que ν et μ sont les mesures définies par (2.e) et (2.f) en prenant $K = 1$. Cela revient à imposer:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} m(\lambda) = 1$$

ou encore, en notant $\tilde{\mu}(dr) = \int_0^{2\pi} \mu(dr, d\omega)$:

(2.g)
$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r}\frac{d\tilde{\mu}}{dr} = 1.$$

A ce stade, il est intéressant d'étudier ce qui se passe quand on change le point de base z_0. Soit donc $\hat{z}_0$ un autre point de $\mathbb{C}$ tel que $P[Z_0 = \hat{z}_0] = 0$ et que l'hypothèse (2.a) avec $\hat{z}_0$ à la place de z_0 soit toujours vérifiée.

Toute l'étude précédente reste valable: il faut bien sûr remplacer h par $\hat{h}$, (ρ, θ) par $(\hat{\rho}, \hat{\theta})$; on obtient une mesure $\hat{v}$ invariante pour $(\hat{\rho}, \hat{\theta})$, qui s'exprime en termes de $\hat{h}$ et d'un noyau $\hat{\delta}(\lambda, d\omega)$, et une mesure $\hat{\mu}$ invariante pour Z. $\hat{v}$ n'a a priori rien à voir avec v; en revanche, nous savons déjà que $\hat{\mu}$ doit être un multiple de μ. En fait, (2.g) montre que $\hat{\mu} = \mu$.

Nous introduisons maintenant une constante qui jouera un grand rôle dans tous nos théorèmes limites: on note

(2.h)
$$\alpha = \exp\left(-2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^{2\pi} \delta(\lambda, d\omega)\, h(\lambda + i\omega)\right)$$

α dépend évidemment du point de base, mais non de notre choix de la mesure invariante.

Avant de terminer ce paragraphe, nous rappelons brièvement les théorèmes ergodiques pour les processus récurrents au sens de Harris, tels qu'ils sont établis dans [1]. Soit A une fonctionnelle additive positive par exemple du processus Z. On peut lui associer une mesure μ_A définie par:

(2.i)
$$\mu_A(f) = E_\mu\left[\int_0^1 f(Z_s)\, dA_s\right]$$

pour toute fonction $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$.

On dit que A est intégrable si μ_A est finie, ce qui équivaut à $E_\mu[A_1] < \infty$. Si A est de signe quelconque, on dit que A est intégrable si A est différence de deux fonctionnelles additives positives intégrables. (2.i) permet encore de définir μ_A qui est alors une mesure bornée sur $\mathbb{R}$.

Soient maintenant A et B deux fonctionnelles additives intégrables de Z telles que $\mu_B(1) > 0$. On a:

(2.j)
$$\frac{A_t}{B_t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\mu_A(1)}{\mu_B(1)}$$

la convergence ayant lieu P_z p.s. pour tout complexe z.

Les résultats analogues sont vrais pour le processus (ρ, θ).

Remarque. Dans toute cette partie, nous n'avons pas vraiment utilisé l'hypothèse (2.b) mais seulement $\int_{-\infty}^{\infty} h^*(u)\, du < \infty$.

Les résultats obtenus plus haut ne font pas intervenir l'hypothèse sur k^*. Cependant cette hypothèse nous sera utile dans les parties suivantes.

3. Étude asymptotique de (ρ, θ)

Notre premier objectif est d'étudier la loi asymptotique du nombre de tours de Z autour de z_0. Par analogie avec le cas brownien, on considère:

$$\frac{2}{\log t}\phi_t = \frac{2}{\log t}\theta_{H_t} = \theta^{(c)}_{(H_t/c^2)}$$

où on note $c = \frac{1}{2}\log t$, et $\theta^{(c)}$ est le processus obtenu à partir de θ par «scaling» de rapport c, i.e. $\theta^{(c)}_t = \frac{1}{c}\theta_{c^2 t}$ (cette notation sera fréquemment utilisée dans la suite).

On note de même: $\rho^{(c)}_t = \frac{1}{c}\rho_{c^2 t}$. On montre assez facilement (voir lemme 3.4) que:

$$\frac{1}{c^2} H_t - T(\rho^{(c)}) \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} 0$$

(rappelons que l'on note $T(\rho^{(c)}) = \inf\{u: \rho^{(c)}_u = 1\}$)

d'où
$$\frac{1}{c}\phi_t - \theta^{(c)}_{T(\rho^{(c)})} \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} 0$$

Si donc nous savons démontrer un théorème de convergence en loi pour la famille de processus $(\theta^{(c)}, \rho^{(c)})$, quand c tend vers ∞, nous en déduirons la loi limite de $\frac{2}{\log t}\phi_t$. En particulier, dans le cas brownien, pour tout c donné, $\rho^{(c)}$ et $\theta^{(c)}$ sont deux mouvements browniens indépendants, et la loi limite est une loi de Cauchy.

La partie difficile de notre étude sera l'obtention de la loi limite de $\rho^{(c)}$. Nous commençons par quelques rappels sur un processus introduit par Itô-Mc Kean ([11]) et étudié plus récemment par Walsh ([22]) et Harrison et Shepp ([8]): pour tout réel $a > 0$, nous appellerons *skew brownien motion de paramètre* a toute solution de l'équation stochastique:

$$X_t = B_t + \left(\frac{1-a}{1+a}\right) L^0_t(X). \tag{3.a}$$

où B désigne un mouvement brownien réel.

On peut (voir [8]) ramener (3.a) à une équation différentielle stochastique de type usuel pour laquelle il y a existence et unicité trajectorielle des solutions. Le comportement d'une solution X de (3.a) peut être décrit de la façon suivante: lorsque le processus X n'est pas en 0, il se comporte comme un mouvement brownien; lorsqu'il arrive en 0, il passe au-dessus et au-dessous de 0 avec probabilités respectives $\frac{1}{1+a}$ et $\frac{a}{1+a}$ (le mouvement brownien correspond au cas $a = 1$).

Walsh a caractérisé les skew brownian motions comme les seules diffusions sur $\mathbb{R}$ dont la valeur absolue soit un mouvement brownien réfléchi.

Les skew brownian motions apparaissent dans l'étude du comportement asymptotique de certaines diffusions sur $\mathbb{R}$. Le théorème suivant est dû à Rosenkrantz ([18]; voir aussi [14] pour une démonstration utilisant le calcul stochastique):

Théorème 3.1. *Supposons que X soit solution de l'équation différentielle stochastique:*

$$dX_t = dB_t + f(X_t)\,dt \tag{3.b}$$

où B est un mouvement brownien réel et où la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\,du < \infty.$$

Posons, pour $c>0$, $X_t^{(c)} = \frac{1}{c} X_{c^2 t}$. Alors, $X^{(c)}$ converge en loi, quand c tend vers $+\infty$, vers le skew brownian motion de paramètre

$$a = \exp\left(-2 \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du\right). \tag{3.c}$$

Montrons comment l'étude de la convergence en loi des $\rho^{(c)}$ est liée au théorème 3.1. Supposons pour un instant que la composante de drift b ne dépende que la distance au point de base, ce qui revient à dire que $h(x+iy)$ ne dépend que de x. En revenant à (1.b) et en utilisant l'hypothèse (2.b) on voit que $\rho^{(c)}$ converge en loi vers le skew brownian motion de paramètre α donné par (2.h) (remarquer que dans ce cas particulier (2.h) et (3.c) fournissent la même expression).

Dans le cas général, le théorème 3.1 ne suffit évidemment pas pour montrer la convergence en loi de $\rho^{(c)}$. Il nous faudra montrer un analogue du théorème 3.1 pour le cas où le drift n'est plus de la forme $f(X_t)\,dt$ mais dépend d'un second processus (θ_t dans (1.b)). Nous aurons besoin d'estimations sur les moments des temps locaux des $\rho^{(c)}$, qui nous seront fournies par le lemme suivant. Auparavant, introduisons une dernière notation: U et V étant deux variables aléatoires, nous écrirons $U \ll V$ pour dire qu'il existe une variable aléatoire V' ayant même loi que V et telle que $U \leqq V'$.

Lemme 3.2. *Supposons que U satisfait l'équation:*

$$U_t = U_0 + B_t + \int_0^t f(s, U_s, \omega)\,ds \tag{3.d}$$

où B est un mouvement brownien réel, et f satisfait l'hypothèse: $|f(s,x,\omega)| \leqq f^*(x)$ pour tous s, x, ω, avec $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(u)\,du < \infty$.
Pour tout réel a, posons:

$$f^a(x) = \begin{cases} \inf(-f^*(x),\ -f^*(2x-a)) & si\ x \geqq a \\ \sup(f^*(x),\ f^*(2x-a)) & si\ x < a \end{cases}$$

Soit U^a le processus défini par:

$$U_t^a = U_0 + B_t + \int_0^t f^a(U_s^a)\, ds \tag{3.e}$$

Alors:

$$L_t^a(U) \leqslant L_t^a(U^a) \qquad \textit{pour tout } t.$$

Remarque. L'intérêt du lemme 3.2 réside dans le fait qu'il est facile d'obtenir des majorations pour les moments des temps locaux des processus U^a (ce qui n'est a priori pas le cas pour U). En effet, en utilisant la méthode de Zvonkin (voir la preuve du lemme 2.1), on montre facilement qu'il existe des constantes K et K' ne dépendant que de $\int_{\mathbb{R}} f^*(u)\, du$ et telles que, Γ désignant un mouvement brownien issu de U_0:

$$L_t^a(U^a) \leqslant K L_{K't}^a(\Gamma) \text{ pour tous } a, t.$$

Preuve du lemme. On traite seulement le cas $a=0$. Notons $V_t = |U_t|$ et $V_t^0 = |U_t^0|$. On a:

$$V_t = |U_0| + \int_0^t \operatorname{sgn}(U_s)\, dB_s + \int_0^t \operatorname{sgn}(U_s) f(s, U_s, \omega)\, ds + L_t^0(U)$$

$$V_t^0 = |U_0| + \int_0^t \operatorname{sgn}(U_s^0)\, dB_s + \int_0^t \operatorname{sgn}(U_s^0) f^0(U_s^0)\, ds + L_t^0(U^0).$$

Posons $\Gamma_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(U_s)\, dB_s$ et $\Gamma_t^0 = \int_0^t \operatorname{sgn}(U_s^0)\, dB_s$.

$$V_t = |U_0| + \Gamma_t + \int_0^t \operatorname{sgn}(U_s) f(s, U_s, \omega)\, ds + L_t^0(V)$$

$$V_t^0 = |U_0| + \Gamma_t^0 - \int_0^t f^0(V_s^0)\, ds + L_t^0(V^0).$$

D'après les résultats d'unicité en loi pour le problème de réflexion (voir Veretennikov [21]), on sait que V^0 a même loi que le processus V' défini par:

$$V_t' = |U_0| + \Gamma_t - \int_0^t f^0(V_s')\, ds + L_t^0(V').$$

Par définition de f^0, on a:

$$\operatorname{sgn}(x) f(s, x, \omega) \geqq -f^0(x) \qquad \text{pour tous } s, x, \omega.$$

On va en déduire que $V \geqq V'$. La démarche est tout à fait analogue à celle de la preuve du lemme 2.1. On pose, pour tout réel x:

$$g(x) = \exp\left(2 \int_0^x f^0(y)\, dy\right)$$

$$G(x) = \int_0^x g(u)\, du$$

$$W_t = G(V_t) \qquad \text{et } W_t' = G(V_t').$$

On trouve finalement:

$$W_t = G(|U_0|) + \int_0^t g \circ G^{-1}(W_s)\, d\Gamma_s + A_t + L_t^0(W)$$

$$W'_t = G(|U_0|) + \int_0^t g \circ G^{-1}(W'_s)\, d\Gamma_s + L_t^0(W').$$

A_t désigne ici le processus croissant défini par:

$$A_t = \int_0^t g(V_s)(\operatorname{sgn}(U_s) f(s, U_s, \omega) + f^0(U_s))\, ds.$$

On sait (voir [14]) que $L_t^0(W' - W) = 0$.

La formule de Tanaka entraîne alors:

$$E[(W'_t - W_t)_+] \leqq 0$$

d'où: $W'_t \leqq W_t$ p.s.; $V'_t \leqq V_t$ p.s.

En particulier: $L_t^0(V') \geqq L_t^0(V)$, et donc: $L_t^0(V^0) \geqslant L_t^0(V)$. □

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe. Rappelons que dans la partie 2 nous avons introduit la constante α définie par:

$$\alpha = \exp\left(-2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^{2\pi} \delta(\lambda, d\omega)\, h(\lambda + i\omega)\right).$$

On pose aussi $\alpha^+ = \exp\left(-2 \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{2\pi} \delta(\lambda, d\omega)\, h(\lambda + i\omega)\right)$.

Théorème 3.3. *Quand c tend vers $+\infty$, le processus $(\rho^{(c)}, L^0(\rho^{(c)}))$ converge en loi vers $(U, \alpha^+ L^{0+}(U))$, où U est un skew Brownian motion de paramètre α.*

Preuve. 1ère étape. On montre d'abord que la famille des lois des processus $(\rho^{(c)}, L^0(\rho^{(c)}))$ est tendue. On remarque pour cela que $\rho^{(c)}$ vérifie l'équation:

$$\rho_t^{(c)} = \frac{\rho_0}{c} + \beta_t^{(c)} + \int_0^t c\, h(c(\rho_s^{(c)} + i\theta_s^{(c)}))\, ds \tag{3.f}$$

où $\beta_t^{(c)} = \frac{1}{c} \beta_{c^2 t}$.

On peut appliquer à chaque $\rho^{(c)}$ le lemme 3.2 en prenant:

$$f(s, x, \omega) = c\, h(c(x + i\theta_s^{(c)}(\omega)))$$
$$f^*(x) = c\, h^*(c x).$$

On remarque que $\int_{\mathbb{R}} f^*(u)\, du$ ne dépend pas de c. D'après la remarque qui suit le lemme 3.2, il existe des constantes K et K' ne dépendant pas de c et telles que, si Γ est un mouvement brownien issu de $\frac{\rho_0}{c}$:

$$L_t^a(\rho^{(c)}) \leqslant K\, L_{K' t}^a(\Gamma) \text{ pour tous } a, t.$$

Pour tout $p \geqq 1$, il existe donc une constante K_p indépendante de c et telle que:

$$E[(L_t^a(\rho^{(c)}))^p] \leqq K_p t^{\frac{p}{2}} \quad \text{pour tous } a, t.$$

En fait, on obtient même

$$E[(L_t^a(\rho^{(c)}) - L_s^a(\rho^{(c)}))^p] \leqq K_p (t-s)^{\frac{p}{2}} \quad \text{pour tous } a, s, t. \tag{3.g}$$

En utilisant la formule de densité de temps d'occupation, on trouve qu'il existe pour chaque $p \geqq 1$ des constantes K'_p, K''_p telles que:

$$\begin{aligned} E[|\rho_t^{(c)} - \rho_s^{(c)}|^p] &\leqq K'_p \left(|t-s|^{\frac{p}{2}} + E\left[\left| \int_s^t c\,h(c(\rho_u^{(c)} + i\,\theta_u^{(c)}))\,du \right|^p \right] \right) \\ &\leqq K'_p \left(|t-s|^{\frac{p}{2}} + E\left[\left(\int_{\mathbb{R}} c\,h^*(c\,a)\,da (L_t^a(\rho^{(c)}) - L_s^a(\rho^{(c)})) \right)^p \right] \right) \\ &\leqq K''_p |t-s|^{\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

Il en résulte que la famille des lois des processus $(\rho^{(c)}, L^0(\rho^{(c)}))$ est tendue.

2ème étape. Soit maintenant (U, V) un couple de processus, dont la loi est une valeur d'adhérence de la famille des lois de $(\rho^{(c)}, L^0(\rho^{(c)}))$. Nous devons montrer que U est un skew brownian motion de paramètre α et $V = \alpha^+ L^{0+}(U)$.

Nous allons utiliser la caractérisation du skew brownian motion comme solution d'un problème de martingales (voir Walsh [22]). Tout d'abord, montrons que pour toute fonction f de classe C^2 à support compact sur $\mathbb{R}$, telle que $f'(0) = 0$, $f(U_t) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(U_s)\,ds$ est une martingale.

On écrit, d'après (3.f):

$$f(\rho_t^{(c)}) = f\left(\frac{\rho_0}{c}\right) + \int_0^t f'(\rho_s^{(c)})\,d\beta_s^{(c)} + \int_0^t f'(\rho_s^{(c)})\,c\,h(c(\rho_s^{(c)} + i\,\theta_s^{(c)}))\,ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''(\rho_s^{(c)})\,ds.$$

Or:

$$\begin{aligned} E\left[\left| \int_s^t f'(\rho_u^{(c)})\,c\,h(c(\rho_u^{(c)} + i\,\theta_u^{(c)}))\,du \right| \right] &\leqq \int_{\mathbb{R}} |f'(a)|\,c\,h^*(c\,a)\,da\,K_1 (t-s)^{1/2} \\ &\leqq \left(\int_{\mathbb{R}} \left| f'\left(\frac{b}{c}\right) \right| h^*(b)\,db \right) K_1 (t-s)^{1/2}. \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée entraîne:

$$E\left[\left| \int_s^t f'(\rho_u^{(c)})\,c\,h(c(\rho_u^{(c)} + i\,\theta_u^{(c)}))\,du \right| \right] \xrightarrow[c \to \infty]{} 0.$$

On en déduit aisément que $f(U_t) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(U_s)\,ds$ est une martingale.

Ceci montre que U est un mouvement brownien «en dehors de 0». Il reste à préciser le comportement de U en 0. Pour cela on utilise à nouveau la méthode de Zvonkin en posant:

$$g(x)=\exp\left(-2\int_{-\infty}^{x}\tilde{h}(\lambda)\,d\lambda\right)\left(\text{rappelons que } \tilde{h}(\lambda)=\int_0^{2\pi}\delta(\lambda,d\omega)\,h(\lambda+i\omega)\right)$$

et $G(x)=\int_0^x g(y)\,dy$.

On note aussi: $g_c(x)=g(cx)$; $G^{(c)}(x)=\frac{1}{c}G(cx)$.

Alors:

$$G^{(c)}(\rho_t^{(c)})=G^{(c)}\left(\frac{\rho_0}{c}\right)+\int_0^t g_c\circ(G^{(c)})^{-1}(\rho_s^{(c)})\,d\beta_s^{(c)}$$
$$+\int_0^t g_c\circ(G^{(c)})^{-1}(\rho_s^{(c)})(c\,h(c(\rho_s^{(c)}+i\theta_s^{(c)}))-c\,\tilde{h}(c\,\rho_s^{(c)}))\,ds. \tag{3.h}$$

Posons: $g_\infty(x)=1_{]-\infty,0]}(x)+\alpha\,1_{]0,\infty[}(x)$

$$G^\infty(x)=\int_0^x g_\infty(y)\,dy.$$

On a: $G^{(c)}\xrightarrow[c\to\infty]{}G^\infty$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$.

On va montrer que $G^\infty(U)$ est une martingale. Au vu de (3.h), il suffit de montrer:

$$E\left[\left|\int_0^t g_c\circ(G^{(c)})^{-1}(\rho_s^{(c)})(c\,h(c(\rho_s^{(c)}+i\theta_s^{(c)}))-c\,\tilde{h}(c\,\rho_s^{(c)}))\,ds\right|\right]\xrightarrow[c\to\infty]{}0$$

ce qui équivaut encore à:

$$\frac{1}{c}E\left[\left|\int_0^{c^2t} g\circ G^{-1}(\rho_s)(h(\rho_s+i\theta_s)-\tilde{h}(\rho_s))\,ds\right|\right]\xrightarrow[c\to\infty]{}0 \tag{3.i}$$

Pour montrer (3.i) nous utilisons les résultats sur les fonctionnelles additives rappelés à la fin de la partie 2. Posons:

$$\Delta_t=\int_0^t g\circ G^{-1}(\rho_s)(h(\rho_s+i\theta_s)-\tilde{h}(\rho_s))\,ds$$

Δ est une fonctionnelle additive du couple (ρ,θ).

De (2.e) on déduit que Δ est intégrable et que $\nu_\Delta(1)=0$. Soit maintenant f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, intégrable, et majorant $2g\circ G^{-1}\cdot h^*$. Posons:

$$F_t=\int_0^t f(\rho_s)\,ds,$$

qui est également une fonctionnelle additive intégrable du couple (ρ,θ). De (2.j), on déduit:

$$\varepsilon_t \equiv \frac{\Delta_t}{F_t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

De plus, on a: $|\varepsilon_t| \leqq 1$ et, d'autre part; $\frac{1}{\sqrt{t}}\Delta_t = \varepsilon_t \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} F_t$.

Or (3.g) entraîne facilement que la famille des variables $\frac{1}{\sqrt{t}} F_t$ est uniformément intégrable (même bornée dans tous les L^p). On en déduit:

$$E\left[\frac{1}{\sqrt{t}}|\Delta_t|\right] \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

On obtient ainsi (3.i). En résumé, on a montré:
- $G^\infty(U)$ est une martingale;
- pour toute fonction f de classe C^2 à support compact telle que $f'(0)=0$, $f(U_t) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(U_s)\,ds$ est une martingale.

D'après Walsh ([22]), cela entraîne que U est un skew brownian motion de paramètre α.

Il reste à voir que $V = \alpha^+ L^{0+}(U)$. (3.h) entraîne:

$$|G^{(c)}(\rho_t^{(c)})| - g(0)\, L_t^0(\rho^{(c)}) = M_t^{(c)} + V_t^{(c)} \tag{3.j}$$

$M^{(c)}$ est ici une martingale et $V^{(c)}$ est le processus à variation finie défini par:

$$V_t^{(c)} = \int_0^t \operatorname{sgn}(\rho_s^{(c)})\, g_c \circ (G^{(c)})^{-1}(\rho_s^{(c)})(ch(c(\rho_s^{(c)} + i\,\theta_s^{(c)})) - c\tilde{h}(c\,\rho_s^{(c)}))\,ds.$$

Le même argument que pour (3.i) montre:

$$E[|V_t^{(c)}|] \xrightarrow[c\to\infty]{} 0 \tag{3.k}$$

(3.j) et (3.k) entraînent que $|G^\infty(U)| - g(0)\,V$ est une martingale d'où, comme on sait déjà que U est un skew brownian motion de paramètre α:

$$V_t = \frac{1}{g(0)} L_t^0(G^\infty(U)) = \frac{\alpha}{g(0)} L^{0+}(U),$$

et donc le résultat voulu puisque $\alpha = g(0)\,\alpha^+$. □

Remarque. Le théorème 3.3 n'est pas vraiment un résultat relatif au processus Z mais plutôt à une classe de diffusions sur le cylindre G, de façon précise aux processus (ρ, θ) solutions de systèmes de la forme (1.b) où h satisfait l'hypothèse (2.b) (l'hypothèse sur k ne sert pas ici). Cette remarque vaut pour la plupart des résultats de cette partie, en particulier le théorème sur le comportement asymptotique des fonctionnelles additives (théorème 3.5). En fait, on peut dire que l'étude des diffusions sur $\mathbb{C}$ solutions d'équations du type (1.a) passe par l'étude des diffusions sur G solutions d'équations du type (1.b). Une démarche analogue avait déjà été adoptée par Kasahara et Kotani [12] qui, pour démontrer des résultats relatifs au mouvement brownien complexe, avaient d'abord étudié le mouvement brownien sur le cylindre. Dans notre situation, il importe de pouvoir passer de résultats relatifs à (ρ, θ) aux résultats correspondants pour Z. Le lemme suivant-déjà annoncé au début de cette partie-fournit la clé de ce passage.

Lemme 3.4. *Notons* $c=\frac{1}{2}\log t$. *Alors* $\frac{1}{c^2} H_t - T(\rho^{(c)}) \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} 0.$

Preuve.

$$\frac{1}{c^2} H_t = \frac{1}{c^2} \int_0^t \frac{ds}{R_s^2} = \frac{1}{c^2} \inf\left\{u: \int_0^u \exp(2\rho_s)\, ds > t\right\} = \inf\left\{u: c^2 \int_0^u \exp(2c\rho_s^{(c)})\, ds > t\right\}.$$

D'où:

$$\frac{1}{c^2} H_t = \inf\left\{u: \frac{1}{2c} \log\left(\int_0^u \exp(2c\rho_s^{(c)})\, ds\right) > 1 - \frac{\log c}{c}\right\}. \tag{3.l}$$

Or, si f est une fonction continue sur un intervalle $[0; T]$, on a, pour tout u tel que $0<u\leqq T$:

$$\frac{1}{2\lambda} \log\left(\int_0^u \exp(2\lambda f(s))\, ds\right) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \sup_{0<s<u} (f(s)),$$

et la convergence est uniforme quand u décrit un intervalle $[\varepsilon; T]$ $(\varepsilon>0)$. De plus, la vitesse de convergence ne dépend que du module de continuité de la fonction f sur $[0; T]$.

Cette dernière remarque et le fait que la famille des lois des $\rho^{(c)}$ est tendue entraînent que:

$$\frac{1}{2c} \log\left(\int_0^u \exp(2c\rho_s^{(c)})\, ds\right) - \sup_{0\leqq s\leqq u} (\rho_s^{(c)}) \xrightarrow[c\to\infty]{(P)} 0. \tag{3.m}$$

La convergence est même uniforme quand u décrit un intervalle $[\varepsilon; T]$. Le lemme est alors une conséquence facile de (3.l) et (3.m). □

Nous énonçons maintenant un théorème sur le comportement asymptotique des fonctionnelles additives des processus (ρ, θ) et Z. Pour (ρ, θ), notre résultat sera une conséquence assez facile du théorème 3.3. Ensuite, nous utiliserons le lemme 3.4 pour passer au processus Z.

Théorème 3.5. (i) *Soit A une fonctionnelle additive intégrable du couple (ρ, θ). Alors:*

$$\frac{1}{\sqrt{t}} A_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} \nu_A(1) \cdot \frac{2}{1+\alpha} |N|$$

où N est une variable normale centrée réduite.

(ii) *Soit B une fonctionnelle additive intégrable du processus Z. Alors:*

$$\frac{2}{\log t} B_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} \mu_B(1)\cdot \mathfrak{e}$$

où $\mathfrak{e}$ est une variable exponentielle de paramètre 2.

Preuve. D'après (2.j), il suffit de démontrer (i) et (ii) pour une fonctionnelle additive particulière.

(i) On prend: $A_t = L_t^0(\rho)$. Alors:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} A_t = L_1^0(\rho^{(\sqrt{t})}).$$

Le théorème 3.3 montre que:

$$L_1^0(\rho^{(c)}) \xrightarrow[c\to\infty]{\text{(loi)}} \frac{\alpha}{g(0)} \frac{2}{1+\alpha} L_1^0(|U|)$$

$\left(\text{noter que } L^{0+}(U) = \frac{2}{1+\alpha} L^0(U)\right)$.

D'où:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} A_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} \frac{\alpha}{g(0)} \frac{2}{1+\alpha} L_1^0(|U|).$$

$|U|$ étant un mouvement brownien réfléchi, l'identité en loi: $L_1^0(|U|) = |N|$ est bien connue, et, pour conclure, il suffit de montrer que:

$$\nu_A(1) = \frac{\alpha}{g(0)}.$$

Nous allons montrer plus généralement que, si $A^a = L^a(\rho)$:

(3.n) $$\nu_{A^a}(1) = \frac{\alpha}{g(a)}, \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

Tout d'abord, soit f une fonction continue positive, à support compact sur $\mathbb{R}$. Posons

$$A_t = \int_0^t f(\rho_s)\, ds.$$

D'après (2.e), on a:

(3.o) $$\nu_{A^f}(1) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\alpha}{g(x)} dx$$

et, d'autre part, d'après la formule de densité de temps d'occupation

(3.p) $$\nu_{A^f}(1) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \nu_{A^x}(1)\, dx.$$

En utilisant la continuité du temps local en la variable d'espace, on vérifie que l'application $x \to \nu_{A^x}(1)$ est continue. Alors (3.o) et (3.p) entraînent (3.n) ce qui termine la preuve de (i).

(ii) On prend $B_t = L_t^1(R)$. Alors:

$$\frac{2}{\log t} B_t = \frac{2}{\log t} L_t^1(R) = \frac{2}{\log t} L_{H_t}^0(\rho) = L_{(H_t/c^2)}^0(\rho^{(c)}).$$

Le lemme (3.4) entraîne:

$$\frac{2}{\log t} B_t - L_{T(\rho^{(c)})}^0(\rho^{(c)}) \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} 0$$

d'où, en utilisant le théorème 3.3 et en notant U un skew brownian motion de paramètre α:

$$\frac{2}{\log t} B_t \xrightarrow{(\text{loi})} \frac{\alpha}{g(0)} L_{T(U)}^{0+}(U).$$

On sait bien que $L_{T(U)}^{0+}(U)$ a une loi exponentielle de paramètre 2.

Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\mu_B(1) = \frac{\alpha}{g(0)}$. Pour cela, on procède exactement comme pour (i): on pose pour tout $r > 0$:

$$B_t^r = \frac{1}{r} L_t^r(R), \qquad \text{et on montre que } \mu_{B^r}(1) = \frac{\alpha}{g(r)}.$$

Remarques. La constante α apparaît dans l'expression de la loi limite dans (i), mais non dans (ii): ceci était d'ailleurs prévisible, puisque (ii) est un résultat sur les fonctionnelles additives du processus Z et ne dépend donc pas du point de base, alors que α en dépend.

Le théorème 3.5 est à rapprocher des théorèmes 1.1 et 3.1 de Kasahara-Kotani ([12]). (Remarquer cependant que Kasahara et Kotani montrent des théorèmes de convergence pour certains *processus* associés aux fonctionnelles additives).

En application des théorèmes 3.3 et 3.5, nous allons maintenant établir le résultat annoncé au début de cette partie, à savoir l'analogue pour le processus Z du théorème de Spitzer ([19]) sur la loi asymptotique du nombre de tours du mouvement brownien complexe. On note pour toute fonction f ν-intégrable:

$$\langle f, \nu \rangle = \int f(x)\, \nu(dx).$$

Corollaire 3.6. (i)

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \theta_t \xrightarrow[t\to\infty]{(\text{loi})} N + \langle k, \nu \rangle \frac{2}{1+\alpha} L_1^0(B)$$

où N est une variable gaussienne centrée réduite et B un mouvement brownien réel issu de 0, indépendant de N.

$$\text{(ii)} \quad \frac{2}{\log t} \phi_t \xrightarrow[t\to\infty]{(\text{loi})} \Gamma_{T^\infty} + \alpha L_{T^\infty}^0(B^\infty)\, C_1 + 2 \langle k, \nu \rangle L_{T^\infty}^0(B^\infty)$$

où Γ est un mouvement brownien réel issu de 0, C_1 une variable de Cauchy de paramètre 1, B^∞ un mouvement brownien réfléchi issu de 0, $T^\infty \equiv T(B^\infty)$ et Γ, C_1 et B^∞ sont indépendants.

Preuve. 1) On écrit d'après (1.b):

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\theta_t=\frac{1}{\sqrt{t}}\theta_0+\frac{1}{\sqrt{t}}\gamma_t+\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t k(\rho_s+i\theta_s)\,ds.$$

Le thèorème 3.5 (i) entraîne:

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t k(\rho_s+i\theta_s)\,ds \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} \langle k,\nu\rangle \frac{2}{1+\alpha} L_1^0(B).$$

(i) en résulte (l'indépendance de N et B est une conséquence de l'indépendance des mouvements browniens β et γ).

2) Posons $c=\frac{\log t}{2}$. On a:

$$\frac{1}{c}\phi_t=\frac{1}{c}\theta_{H_t}=\theta^{(c)}\left(\frac{1}{c^2}H_t\right)$$

d'où:

$$\frac{1}{c}\phi_t=\theta_0^{(c)}+\gamma^{(c)}\left(\frac{1}{c^2}H_t\right)+\int_0^{\frac{1}{c^2}H_t} c\,k(c(\rho_s^{(c)}+i\theta_s^{(c)}))\,ds \tag{3.q}$$

Or, en reprenant les notations de la partie 1:

$$\int_0^{\frac{1}{c^2}H_t} c\,k(c(\rho_s^{(c)}+i\theta_s^{(c)}))\,ds=\frac{1}{c}\int_0^t \frac{k^{\#}(Z_s)}{|Z_s-z_0|^2}\,ds.$$

Le théorème 3.5 (ii) entraîne:

$$\frac{1}{c}\int_0^t \frac{k^{\#}(Z_s)}{|Z_s-z_0|^2}\,ds \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} \left(\int_{\mathbb{C}} \frac{k^{\#}(z)}{|z-z_0|^2}\,\mu(dz)\right) \mathrm{e}.$$

On sait aussi que: $\int_{\mathbb{C}} \frac{k^{\#}(z)}{|z-z_0|^2}\,\mu(dz)=\langle k,\nu\rangle$. En fait, la preuve du théorème 3.5 montre qu'on a plus précisément, avec $c=\frac{\log t}{2}$:

$$\left(\rho^{(c)},\int_0^{\frac{1}{c^2}H_t} c\,k(c(\rho_s^{(c)}+i\theta_s^{(c)}))\,ds\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} (U,\langle k,\nu\rangle\, L_{T(U)}^{0+}(U))$$

où U est un skew brownian motion de paramètre α et $T(U)=\inf\{t\colon U_t=1\}$. (3.q) et le lemme 3.4 entraînent:

$$\frac{1}{c}\phi_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} \Gamma_{T(U)}+\langle k,\nu\rangle\, L_{T(U)}^{0+}(U) \tag{3.r}$$

où Γ est un mouvement brownien indépendant de U, issu de 0.

Le fait que la loi limite dans (3.r) soit la même que celle de l'énoncé du théorème résulte de considérations simples sur le skew brownian motion. On note B^{∞} le mouvement brownien réfléchi obtenu en «supprimant» les excursions négatives de U, c'est-à-dire:

$$B_t^\infty = U\left(\inf\left\{s;\int_0^s 1_{(U_v>0)}\,dv>t\right\}\right)$$
$$T^\infty \equiv T(B^\infty).$$

On a alors:

$$L^{0+}_{T(U)}(U) = L^{0+}_{T^\infty}(B^\infty) = 2\,L^0_{T^\infty}(B^\infty)$$
$$T(U) = T^\infty + \int_0^{T(U)} 1_{(U_s<0)}\,ds = T^\infty + \inf\{t\colon W_t = -\alpha\,L^0_{T^\infty}(B^\infty)\}$$

où W désigne le mouvement brownien de Dubins-Schwartz associé à la partie martingale de U_-.

W et B^∞ sont indépendants et on peut trouver deux mouvements browniens Γ' et Γ'' indépendants tels que:

$$\begin{aligned}\Gamma(T(U)) &= \Gamma'(T^\infty) + \Gamma''(\inf\{t\colon W_t = -\alpha L^0_{T^\infty}(B^\infty)\})\\ &= \Gamma'(T^\infty) + \alpha L^0_{T^\infty}(B^\infty)\,C_1. \quad \square\end{aligned}$$

Remarques. 1) Un théorème de convergence en loi pour la famille de processus $(\rho^{(c)}, \theta^{(c)})$ découle facilement des résultats précédents. On a:

$$(\rho^{(c)}, \theta^{(c)}) \xrightarrow[c\to\infty]{(\text{loi})} (U, V)$$

où (U, V) est solution du système suivant:

$$U_t = B_t + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} L_t^0(U)$$
$$V_t = \Gamma_t + \langle k, v\rangle\, L_t^0(U).$$

B et Γ étant deux mouvements browniens indépendants.

On peut bien sûr déduire le corollaire 3.6 de ce résultat.

2) Le corollaire 3.6 nous donne la loi asymptotique de $\frac{2}{\log t}\phi_t$. On aurait pu également utiliser le lemme 3.4 pour montrer que:

$$\frac{2}{\log t}\log R_t \xrightarrow{(P)} 1.$$

Ce résultat qui est évident pour le mouvement brownien complexe s'obtient ici en écrivant, avec $c = \frac{\log t}{2}$:

$$\frac{2}{\log t}\log R_t = \frac{1}{c}\rho(H_t) = \rho^{(c)}\left(\frac{1}{c^2}H_t\right) \xrightarrow[t\to\infty]{(\text{loi})} U_{T(U)} \equiv 1.$$

3) Pour décrire la loi limite de $\frac{2}{\log t}\phi_t$, il suffit de connaitre la loi jointe de $(\Gamma(T^\infty),\ L^0_{T^\infty}(B^\infty))$. Nous renvoyons à Pitman et Yor ([17]) pour diverses

considérations sur cette loi, qui est caractérisée par sa transformée de Laplace-Fourier:

$$E[\exp(-a\,L^0_{T^\infty}(B^\infty)+i\,v\,\Gamma(T^\infty))]=\frac{1}{\operatorname{ch} v+\left(\frac{a}{v}\right)\operatorname{sh} v}.$$

4) Dans le cas où Z est un mouvement brownien plan, on trouve pour loi limite de $\frac{2}{\log t}\phi_t$ la loi de:

$$\Gamma(T^\infty)+L^0_{T^\infty}(B^\infty)\,C_1. \tag{3.s}$$

Cette loi limite est aussi une loi de Cauchy de paramètre 1. Cependant, la décomposition (3.s) est intéressante dans la mesure où elle fait apparaître la décomposition en «grand angle» et «petit angle». On montre en effet (voir Messulam-Yor [16]), toujours dans le cas du mouvement brownien plan, que, si a et b sont deux réels strictement positifs:

$$\frac{2}{\log t}\left(\int_0^t d\phi_s\,1_{(R_s<a)},\int_0^t d\phi_s\,1_{(R_s>b)}\right)\xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}}(L_{T^\infty}(B^\infty)\,C_1,\Gamma(T^\infty)). \tag{3.t}$$

Le premier terme dans (3.s) apparaît donc comme la loi limite du «grand angle», i.e. du nombre de tours effectués à l'extérieur d'un disque de centre z_0 (et de rayon arbitraire), et le second terme comme la loi limite du «petit angle».

Dans le cas général, la loi limite n'est pas donnée par (3.s), et (3.t) n'est plus vérifiée. On peut cependant interpréter chacun des trois termes qui apparaissent dans la loi limite de $\frac{2}{\log t}\phi_t$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{a\to 0\\ b\to\infty}}&\left(\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\log t}\left(\int_0^t d\phi_s\,1_{(R_s<a)},\int_0^t d\phi_s\,1_{(a<R_s<b)},\int_0^t d\phi_s\,1_{(R_s>b)}\right)\right)\\ &=(\alpha\,L^0_{T^\infty}(B^\infty)\,C_1,2\langle k,v\rangle\,L^0_{T^\infty}(B^\infty),\Gamma_{T^\infty})\end{aligned} \tag{3.u}$$

(il va de soi qu'il s'agit de limites en loi).

On voit qu'on a toujours un terme correspondant au petit angle et un terme correspondant au grand angle mais qu'il s'introduit un terme supplémentaire qui correspond à un angle intermédiaire entre grand angle et petit angle. La démonstration de (3.u) ne pose pas de difficultés en utilisant les techniques qui nous ont déjà servi à montrer le corollaire 3.6.

Notre objectif suivant est d'étendre au processus Z les résultats de Pitman et Yor ([17a, b]) sur la loi asymptotique des nombres de tours autour de n points du plan. Pour cela, il est important (voir [17a, b]) de bien séparer petit angle et grand angle: on voit déjà sur (3.u) que la loi limite du petit angle fait apparaître la constante α, donc dépend du point de base z_0, ce qui n'est pas le cas pour le grand angle. En fait, on pourrait, à partir de (3.u), deviner assez facilement la loi asymptotique des nombres de tours autour de n points; la justification rigoureuse de ce raisonnement demande quelques résultats auxiliaires que nous allons établir dans la partie 4; ces résultats ont d'ailleurs de l'intérêt en eux mêmes et nous serviront plusieurs fois dans la suite.

4. Une version asymptotique du théorème de Knight

(4.1) Soit M une martingale continue telle que $M_0=0$ et $\langle M\rangle_\infty=\infty$. Dubins-Schwartz ([4]) et Dambis ([3]) ont montré de façon indépendante que si $m(\cdot)$ est l'inverse continu à droite de $\langle M\rangle$, le processus B défini par $B_t=M_{m(t)}$ est un mouvement brownien. Nous dirons que B est le mouvement brownien associé à M. On a: $M_t=B_{\langle M\rangle_t}$.

Knight ([13]) a montré que si M et N sont deux martingales continues orthogonales (i.e. $\langle M,N\rangle=0$) leurs mouvements browniens associés sont indépendants. Ce résultat s'étend à n martingales continues orthogonales.

Nous aurons besoin d'une version asymptotique du théorème de Knight: nous ne supposerons plus $\langle M,N\rangle=0$, mais seulement que $\langle M,N\rangle$ est «petit» devant $\langle M\rangle$ et $\langle N\rangle$. Il est alors en général faux que les mouvements browniens B et Γ associés à M et N soient indépendants. En revanche, on peut montrer la propriété d'indépendance asymptotique suivante de B et Γ: le couple $(B^{(c)},\Gamma^{(c)})$ converge en loi, quand c tend vers $+\infty$, vers le couple formé de deux mouvements browniens indépendants.

L'énoncé suivant nous a été suggéré par N. Varopoulos (communication personnelle).

Théorème 4.1. *Soient M et N deux martingales continues, nulles en 0, telles que $\langle M\rangle_\infty=\langle N\rangle_\infty=+\infty$. On note B et Γ les mouvements browniens associés à M et N et pour tout $c>0$:*

$$B_t^{(c)}=\frac{1}{c}B_{c^2t}\quad ;\quad \Gamma_t^{(c)}=\frac{1}{c}\Gamma_{c^2t}.$$

Supposons qu'il existe un processus $A(t)$ tel que:

$$\text{(4.a)}\qquad \frac{1}{t}\langle M\rangle_{A(t)}\xrightarrow[t\to\infty]{(P)}+\infty;$$

$$\text{(4.b)}\qquad \frac{1}{t}\int_0^{A(t)}|d\langle M,N\rangle|_s\xrightarrow[t\to\infty]{(P)}0.$$

Alors, le couple $(B^{(c)},\Gamma^{(c)})$ converge en loi, quand c tend vers $+\infty$, vers un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Preuve. Comme la famille des lois de $(B^{(c)},\Gamma^{(c)})$ est tendue, il suffit de montrer la convergence des marginales de rang fini. Pour cela, on prend deux fonctions f,g bornées et appartenant à $L^2(\mathbb{R}_+,dx)$. On remarque qu'on a, par exemple:

$$\int_0^\infty f(u)\,dB_u^{(c)}=\frac{1}{c}\int_0^\infty f\left(\frac{1}{c^2}\langle M\rangle_u\right)dM_u.$$

Posons, pour $c>0$ fixé et pour tout $s\geqq 0$:

$$\mathscr{U}_s^{(c)}=\exp\left(\frac{i}{c}\,U_s^{(c)}+\frac{1}{2c^2}\langle U^{(c)}\rangle_s\right)$$

avec

$$U_s^{(c)}=\int_0^s\left\{f\left(\frac{1}{c^2}\langle M\rangle_u\right)dM_u+g\left(\frac{1}{c^2}\langle N\rangle_u\right)dN_u\right\},$$

et donc:

$$\langle U^{(c)}\rangle_s=\int_0^s d\langle M\rangle_u f^2\left(\frac{1}{c^2}\langle M\rangle_u\right)+\int_0^s d\langle N\rangle_u g^2\left(\frac{1}{c^2}\langle N\rangle_u\right)$$
$$+2\int_0^s d\langle M,N\rangle_u f\left(\frac{1}{c^2}\langle M\rangle_u\right)g\left(\frac{1}{c^2}\langle N\rangle_u\right).$$

Chaque $\mathscr{U}^{(c)}$ est une martingale uniformément bornée. L'égalité $E[\mathscr{U}_\infty^{(c)}]=1$ peut être réécrite sous la forme:

$$E\left[\exp\left(i(\int f(u)\,dB_u^{(c)}+\int g(u)\,d\Gamma_u^{(c)})+\frac{1}{c^2}\int_0^\infty d\langle M,N\rangle_s f\left(\frac{1}{c^2}\langle M\rangle_s\right)g\left(\frac{1}{c^2}\langle N\rangle_s\right)\right)\right]$$
$$=\exp\left(-\tfrac{1}{2}\int_0^\infty (f^2+g^2)(u)\,du\right).$$

Pour en déduire la convergence en loi des marginales de rang fini de $B^{(c)}$ et $\Gamma^{(c)}$, il suffit de montrer que:

$$\exp\left(\frac{1}{c}\int_0^\infty d\langle M,N\rangle_s f\left(\frac{1}{c}\langle M\rangle_s\right)g\left(\frac{1}{c}\langle N\rangle_s\right)\right)\xrightarrow[c\to\infty]{L^1(P)} 1.$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cette expression est majorée par $\exp(\|f\|_2\,\|g\|_2)$; d'autre part, elle converge en probabilité vers 1 puisque:

$$\left|\frac{1}{c}\int_0^\infty d\langle M,N\rangle_s f\left(\frac{1}{c}\langle M\rangle_s\right)g\left(\frac{1}{c}\langle N\rangle_s\right)\right|\leqq\frac{1}{c}\int_0^{A(c)}|d\langle M,N\rangle_s|\,\|f\|_\infty\,\|g\|_\infty$$
$$+\frac{1}{c}\left(\int_{A(c)} d\langle M\rangle_s f^2\left(\frac{1}{c}\langle M\rangle_s\right)\right)^{1/2}\left(\int_{A(c)}^\infty d\langle N\rangle_s g^2\left(\frac{1}{c}\langle N\rangle_s\right)\right)^{1/2}.$$

Les deux termes de cette dernière somme convergent vers 0, le second étant égal, après changement de variables, à:

$$\left(\int_{\frac{1}{c}\langle M\rangle_{A(c)}}^\infty dv\,f^2(v)\right)^{1/2}\left(\int_{\frac{1}{c}\langle N\rangle_{A(c)}} dv\,g^2(v)\right)^{1/2}.\quad\square$$

Le théorème 4.1 s'étend de façon immédiate au cas de p martingales continues, avec pour loi limite celle d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Quand la conclusion du théorème 4.1 est vérifiée, nous dirons que les mouvements browniens B et Γ sont asymptotiquement indépendants. De même, nous dirons que B et Γ sont asymptotiquement identiques quand le couple $(B^{(c)}, \Gamma^{(c)})$ converge en loi vers le couple (β, β) où β est un mouvement brownien réel. Nous aurons besoin de conditions suffisantes portant sur deux martingales continues M et N pour que leurs mouvements browniens associés soient asymptotiquement identiques.

Théorème 4.2. *Reprenons les notations du théorème* 4.1 *et supposons maintenant qu'il existe un changement de temps R (i.e. un processus croissant tel que pour tout $u \geqq 0$, $R(u)$ soit un temps d'arrêt) tel que:*

(i) $\frac{1}{u}\langle M\rangle_{R(u)} \xrightarrow[u\to\infty]{(P)} 1$; $\frac{1}{u}\langle N\rangle_{R(u)} \xrightarrow[u\to\infty]{(P)} 1$

et:

(ii) $\frac{1}{u}\langle M-N\rangle_{R(u)} \xrightarrow[u\to\infty]{(P)} 0.$

Alors, les deux mouvements browniens B et Γ sont asymptotiquement identiques, i.e.: pour tout $n>0$:

$$\sup_{u\leqq n} |B_u^{(c)} - \Gamma_u^{(c)}| \xrightarrow[c\to\infty]{(P)} 0.$$

Preuve du théorème 4.2. Comme pour le théorème 4.1, on se ramène à montrer que, pour tout $u \geqq 0$:

$$B_u^{(c)} - \Gamma_u^{(c)} \xrightarrow[c\to\infty]{(P)} 0.$$

Cela équivaut encore à:

$$\frac{1}{\sqrt{u}}(B_u - \Gamma_u) \xrightarrow[u\to\infty]{(P)} 0. \tag{4.d}$$

On a: $B_u = M_{m(u)}$ et $\Gamma_u = N_{n(u)}$, les processus $m(\cdot)$ et $n(\cdot)$ désignant respectivement les inverses continus à droite des processus croissants $\langle M\rangle$ et $\langle N\rangle$.

D'autre part:

$$\frac{1}{\sqrt{u}}|B_u - \Gamma_u| \leqq \frac{1}{\sqrt{u}}|M_{m(u)} - M_{R(u)}| + \frac{1}{\sqrt{u}}|M_{R(u)} - N_{R(u)}| + \frac{1}{\sqrt{u}}|N_{R(u)} - N_{n(u)}|.$$

D'après les inégalités de distribution de Burkholder-Gundy (voir [2]), il suffit, pour montrer (4.d), de vérifier la convergence en probabilité vers 0 de chacune des trois expressions suivantes:

$$\frac{1}{u}|\langle M\rangle_{m(u)} - \langle M\rangle_{R(u)}|; \quad \frac{1}{u}\langle M-N\rangle_{R(u)}; \quad \frac{1}{u}|\langle N\rangle_{R(u)} - \langle N\rangle_{n(u)}|.$$

Or cela résulte précisément des hypothèses (i) et (ii) du théorème (noter que $\langle M\rangle_{m(u)} = \langle N\rangle_{n(u)} = u$). $\square$

La proposition suivante précise le choix du changement de temps R ci-dessus, lorsqu'il existe:

Proposition 4.3. *Notons* $m(u)=\inf\{s: \langle M\rangle_s>u\}$; $n(u)=\inf\{s: \langle N\rangle_s>u\}$. *Les hypothèses du théorème* (4.2) *sont vérifiées si, et seulement si, on a:*

$$\frac{1}{u}\langle M-N\rangle_{m(u)\vee n(u)} \xrightarrow[(u\to\infty)]{(P)} 0. \tag{4.c}$$

Démonstration. 1) Lorsque la condition (4.c) est satisfaite, on peut prendre $R(u)=m(u)\vee n(u)$: en effet, il suffit de vérifier, par symétrie: $\frac{1}{u}\langle M\rangle_{n(u)} \xrightarrow[(u\to\infty)]{(P)} 1$. Or. l'inégalité de Minkowski entraîne:

$$\left|\left(\frac{1}{u}\langle M\rangle_{n(u)}\right)^{1/2}-1\right| \leqq \left(\frac{1}{u}\langle M-N\rangle_{n(u)}\right)^{1/2} \xrightarrow[u\to\infty]{(P)} 0.$$

2) La condition (4.c) est nécessaire:

toujours par symétrie, il suffit de vérifier que (i) et (ii) impliquent:

$$\frac{1}{u}\langle M-N\rangle_{m(u)\vee n(u)} \xrightarrow[(u\to\infty)]{(P)} 0. \tag{4.c'}$$

Montrons tout d'abord que, pour tout $\varepsilon\in]0,1[$, on a, en posant $u_\varepsilon=\dfrac{u}{1-\varepsilon}$:

$$P(m(u)>R(u_\varepsilon))\leqq\varepsilon, \quad \text{pour } u\geqq N_\varepsilon. \tag{4.c''}$$

Or, on a:

$$P(m(u)>R(u_\varepsilon))\leqq P(\langle M\rangle_{R(u_\varepsilon)}\leqq u)=P\left(\frac{1}{u_\varepsilon}\langle M\rangle_{R(u_\varepsilon)}\leqq 1-\varepsilon\right)\leqq\varepsilon,$$

pour $u\geqq N_\varepsilon$, d'après (i).

(4.c') découle maintenant de (4.c''):

$$P\left(\frac{1}{u}\langle M-N\rangle_{m(u)}>\varepsilon\right)\leqq P(m(u)\leqq R(u_\varepsilon);\ \frac{1}{u}\langle M-N\rangle_{m(u)}>\varepsilon)+P(m(u)>R(u_\varepsilon))$$

$$\leqq P\left(\frac{1}{u}\langle M-N\rangle_{R(u_\varepsilon)}>\varepsilon\right)+\varepsilon\leqq 2\varepsilon \quad \text{pour } u\geqq N''_\varepsilon, \text{ d'après}$$

(ii). □

(4.2) Nous allons maintenant appliquer les résultats ci-dessus à l'étude du processus Z. Dans toute la suite, nous ne considérerons plus un seul point de base z_0, mais n points distincts $z_1, z_2, \dots, z_n$. Nous supposerons toujours l'hypothèse (2.a) satisfaite pour chacun de ces points. On introduit alors pour chaque point z_j $(j=1\dots n)$ les mêmes processus, mesures, fonctions et constantes qui ont été introduits pour le point de base z_0, l'emploi de l'indice j signifiant qu'il s'agit du processus (respectivement de la mesure, fonction ou constante) relatif au point z_j: par exemple, R^j est le rayon calculé à partir du point de base z_j. On obtient en particulier n mesures v_j, chaque v_j étant invariante pour le couple (ρ^j, θ^j), et n constantes α_j données par (2.h). En revanche, la mesure μ est la même pour tous les points z_j (voir les remarques après la proposition 2.2).

Nous cherchons à déterminer la loi limite de:

$$\frac{2}{\log t}(\phi_t^1, \phi_t^2, \ldots, \phi_t^n).$$

Par analogie avec ce que nous avons fait pour un seul point de base, nous étudions d'abord le comportement quand c tend vers $+\infty$ de:

$$(\rho^{1,(c)}, \rho^{2,(c)}, \ldots, \rho^{n,(c)})$$

où on note, pour tout $t \geqq 0$: $\rho_t^{j,(c)} = \frac{1}{c} \rho_{c^2 t}^j$.

Quitte à extraire une suite convergente, on peut supposer:

$$(\rho^{1,(c)}, \rho^{2,(c)}, \ldots, \rho^{n,(c)}) \xrightarrow{\text{(loi)}} (U_1, U_2, \ldots, U_n).$$

Nous savons déjà que chaque U_j est un skew brownian motion de paramètre α_j.

Il reste à préciser les liens entre les U_j. En pensant aux résultats de Pitman et Yor ([17]) sur les petits angles et grands angles du mouvement brownien plan, on peut conjecturer que les U^j ont même partie positive (dans un sens que nous préciserons plus loin) et des parties négatives indépendantes. Cela revient à dire que, d'une part les mouvements browniens associés aux parties martingales des ρ_-^j $(j=1 \ldots n)$ sont asymptotiquement indépendants, d'autre part les mouvements browniens associés aux parties martingales des ρ_+^j $(j=1 \ldots n)$ sont asymptotiquement identiques. Nous utiliserons les théorèmes 4.1 et 4.2 pour montrer ces derniers résultats.

Auparavant, introduisons quelques notations supplémentaires: pour tout $j=1 \ldots n$, soit $\hat{\rho}^j$ (resp. $\check{\rho}^j, \hat{\theta}^j, \check{\theta}^j$) le mouvement brownien associé à la partie martingale de ρ_-^j $\left(\text{resp. } \rho_+^j, \int_0^t 1_{(\rho_s^j<0)} d\theta_s^j, \int_0^t 1_{(\rho_s^j>0)} d\theta_s^j\right)$. Remarquons que $\hat{\rho}^j$ (resp. $\check{\rho}^j, \hat{\theta}^j, \check{\theta}^j$) est aussi le mouvement brownien associé à la partie martingale de $(\log R^j)_-$ $\left(\text{resp. } (\log R^j)_+, \int_0^t 1_{(R_s^j<1)} d\phi_s^j, \int_0^t 1_{(R_s^j>1)} d\phi_s^j\right)$.

On a par exemple:

$$\hat{\rho}_t^j = \beta^j \left(\inf\left\{u: \int_0^u 1_{(\rho_s^j<0)} ds > t\right\}\right), \qquad \hat{\theta}_t^j = \gamma^j \left(\inf\left\{u: \int_0^u 1_{(\rho_s^j<0)} ds > t\right\}\right),$$

où β^j et γ^j sont définis de la même manière que β et γ dans la partie 1.

Théorème 4.4.

$$((\hat{\rho}^{j,(c)}, \check{\rho}^{j,(c)}, \hat{\theta}^{j,(c)}, \check{\theta}^{j,(c)});\ 1 \leqq j \leqq n) \xrightarrow[c\to\infty]{\text{(loi)}} ((\hat{\rho}^{j,\infty}, \check{\rho}^{\infty}, \hat{\theta}^{j,\infty}, \check{\theta}^{\infty});\ 1 \leqq j \leqq n)$$

où $(\hat{\rho}^{j,\infty},\ 1 \leqq j \leqq n)$, $\check{\rho}^{\infty}$, $(\hat{\theta}^{j,\infty};\ 1 \leqq j \leqq n)$, $\check{\theta}^{\infty}$ *sont* $2n+2$ *mouvements browniens réels indépendants issus de* 0.

Preuve. Le théorème de Knight montre que, pour j fixé, les quatre processus $\hat{\rho}^j, \check{\rho}^j, \hat{\theta}^j, \check{\theta}^j$ sont indépendants.

On remarque ensuite que les mouvements browniens $(\check{\rho}^i, 1 \leqq i \leqq n)$ sont asymptotiquement identiques. En effet soit, pour $1 \leqq i \leqq n$, $\check{M}^i$ la partie martingale de $(\log R^i)_+$; $\check{\rho}^i$ est alors le mouvement brownien associé à $\check{M}^i$. On peut appliquer la proposition 4.3 au couple $(\check{M}^i, \check{M}^j)$ pour $i \neq j$: puisque $\check{M}^i$ et $\check{M}^j$ jouent ici des rôles symétriques, il suffit de vérifier:

$$\frac{1}{u} \langle \check{M}^i - \check{M}^j \rangle_{m(u)} \xrightarrow[u \to \infty]{(P)} 0 \tag{4.e}$$

où m est l'inverse continu à droite de $\langle \check{M}^i \rangle$.

En revenant aux formules de la partie 1, on voit que pour tout $t \geqq 0$:

$$\langle \check{M}^i - \check{M}^j \rangle_t = \int_0^t \frac{|z_i - z_j|^2}{|Z_s - z_i|^2 \, |Z_s - z_j|^2} 1_{(R_s^i > 1)} 1_{(R_s^j > 1)} ds.$$

On a donc:

$$\langle \check{M}^i - \check{M}^j \rangle_t = \int_0^t f(Z_s) ds \qquad \text{avec } f \in L^1(\mathbb{C}, \mu)$$

(2.j) entraîne:

$$\frac{\langle \check{M}^i - \check{M}^j \rangle_t}{\langle \check{M}^i \rangle_t} \xrightarrow[t \to \infty]{\text{p.s.}} 0. \tag{4.f}$$

(4.e) est une conséquence immédiate de (4.f) (on voit même qu'il y a convergence p.s. dans (4.e)). La proposition 4.3 montre alors que $\check{\rho}^i$ et $\check{\rho}^j$ sont asymptotiquement identiques. On vérifie de même que les mouvements browniens $(\check{\theta}^i, 1 \leqq i \leqq n)$ sont asymptotiquement identiques.

Il nous reste à montrer que les $2n+2$ mouvements browniens $\check{\rho}^1, (\hat{\rho}^i, 1 \leqq i \leqq n)$, $\check{\theta}^1, (\hat{\theta}^i, 1 \leqq i \leqq n)$ sont asymptotiquement indépendants. Pour cela, nous utilisons le théorème 4.1 ou plus précisément l'extension du théorème 4.1 au cas de p martingales continues. $\check{\rho}^1$ est le mouvement brownien associé à $\check{M}^1$; pour $1 \leqq i \leqq n$, $\hat{\rho}^i$ est le mouvement brownien associé à la partie martingale $\hat{M}^i$ de $(\log R^i)_-$ et on a les représentations analogues pour $\check{\theta}^1$ et les $\hat{\theta}^i$. Il faut vérifier les hypothèses (4.a) et (4.b) pour chacun des couples de martingales continues qui interviennent. Nous le ferons pour les couples $(\hat{M}^i, \hat{M}^j)$ (avec $i \neq j$) et $(\check{M}^1, \hat{M}^i)$ et nous laisserons au lecteur le soin de mener à bien les autres vérifications.

Fixons ε avec $0 < \varepsilon < 1$ et posons:

$$r(t) = (\log t)^{1+\varepsilon}.$$

On a:

$$\langle \hat{M}^i \rangle_t = \int_0^t \frac{ds}{(R_s^i)^2} 1_{(R_s^i < 1)}.$$

Le raisonnement de la preuve du lemme 3.4 montre que:

$$\frac{4}{(\log t)^2} \langle \hat{M}^i \rangle_t \xrightarrow[t \to \infty]{(\text{loi})} \cdot$$

On en déduit: $\frac{1}{r(t)}\langle\hat{M}^i\rangle_t \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} \infty$.

De même: $\frac{1}{r(t)}\langle\check{M}^1\rangle_t \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} \infty$.

On remarque ensuite que:

$$\langle\hat{M}^i,\hat{M}^j\rangle_t=\int_0^t \frac{(Z_s-z_i)\cdot(Z_s-z_j)}{|Z_s-z_i|^2\,|Z_s-z_j|^2}1_{(R_s^i<1)}1_{(R_s^j<1)}ds.$$

Donc: $\langle\hat{M}^i,\hat{M}^j\rangle_t=\int_0^t f(Z_s)\,ds$ avec $f\in L^1(\mathbb{C},\mu)$. Le théorème 3.5 entraîne:

$$\frac{1}{r(t)}\int_0^t |d\langle\hat{M}^i,\hat{M}^j\rangle_s| \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} 0$$

et de même:

$$\frac{1}{r(t)}\int_0^t |d\langle\check{M}^1,\hat{M}^i\rangle_s| \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} 0.$$

En prenant pour A l'inverse de r, on voit que les hypothèses (4.a), (4.b) sont satisfaites pour les couples $(\hat{M}^i,\hat{M}^j)$ et $(\check{M}^1,\hat{M}^i)$. □

5. Applications aux nombres de tours

(5.1) Nous commençons cette partie par un théorème de convergence en loi suffisamment général pour nous permettre de traiter les nombres de tours autour de plusieurs points (un peu comme le théorème 3.3 était l'outil essentiel pour le cas d'un seul point). Ce résultat nous permettra aussi d'étudier les nombres de tours aux temps inverses d'une fonctionnelle additive intégrable, problème dont l'analogue dans le cas du mouvement brownien plan a été étudié par Lyons-Mc Kean ([15]) et Pitman-Yor ([17]). Nous considérons donc une fonctionnelle additive intégrable positive du processus Z, que nous notons A et qui reste fixée dans toute cette partie; nous notons $a(\cdot)$ l'inverse continu à droite de A.

Nous conservons les notations introduites à la fin de la partie 4. En particulier, pour tout $j=1\dots n$, $\hat{\theta}^j$ (resp. $\check{\theta}^j$) est le mouvement brownien associé à la partie martingale de

$$\int_0^t 1_{(R_s^j<1)}\,d\phi_s^j\ \left(\text{resp. } \int_0^t 1_{(R_s^j>1)}\,d\phi_s^j\right).$$

Pour tout $j=1\dots n$, nous notons A^j la partie à variation finie de ϕ^j:

$$A_t^j=\int_0^t \frac{k_j^{\#}(Z_s)}{(R_s^j)^2}\,ds.$$

Enfin, si B est une fonctionnelle additive intégrable du processus Z, nour notons $|\mu_B|=\mu_B(1)$. On a en particulier:

(5.a) $$|\mu_{A^j}| = \int_{\mathbb{C}} \frac{k_j^{\#}(z)}{|z-z_j|^2} d\mu(z) = \langle k_j, v_j \rangle.$$

Nous énonçons maintenant le résultat général de convergence en loi qui joue un rôle fondamental dans cette partie et la suivante. L'énoncé de ce théorème fait intervenir un processus n-dimensionnel noté $(U^1, \dots, U^n)$ possédant les deux propriétés suivantes:

(a) pour tout $j=1,\dots,n$, U^j est un skew brownian motion de paramètre α_j, issu de 0.

(b) si $\hat{U}^j$, resp. $\check{U}^j$, désigne le mouvement brownien associé à la partie martingale de $(U^j)_-$, resp. $(U^j)_+$, alors:
- d'une part, $\check{U}^1 = \check{U}^2 = \dots = \check{U}^n$,
- d'autre part, les processus $\hat{U}^j$ sont indépendants et sont indépendants de $\check{U}^1$.

L'existence d'un tel processus, qui découlera du théorème suivant, peut aussi être établie directement. On vérifie aisément que les deux propriétés ci-dessus suffisent à caractériser la loi de $(U^1, \dots, U^n)$.

Théorème 5.1.

$$\left(\frac{1}{c} A_{e^{2c}}, \left(\left(\rho^{j,(c)}, \hat{\theta}^{j,(c)}, \check{\theta}^{j,(c)}, \frac{1}{c^2} H^j_{e^{2c}}, \frac{1}{c^2} H^j_{a(c)}\right); 1 \leqq j \leqq n\right)\right)$$

$$\Big\downarrow \text{(loi)} \quad c \to \infty$$

$$(|\mu_A| L^{0+}_{T^1}(U^1), ((U^j, V^j, W, T^j, \inf\{s: |\mu_A| L^{0+}_s(U^j) > 1\}); 1 \leqq j \leqq n))$$

où $(U^1, \dots, U^n)$ est un processus n-dimensionnel vérifiant les propriétés (a) et (b) ci-dessus, $V^1, \dots, V^n, W$ sont $n+1$ mouvements browniens indépendants et indépendants de $(U^1, \dots, U^n)$, enfin, pour $j=1,\dots,n$:

$$T^j = T(U^j) = \inf\{s \geqq 0; U^j_s = 1\}.$$

Preuve. Nous avons déjà réuni la plupart des éléments qui permettent de démontrer le théorème 5.1. Ainsi la partie «convergence de processus» est une conséquence presque immédiate des théorèmes 3.3 et 4.4. Tout d'abord, le théorème 3.3 montre que pour $j=1\dots n$:

$$\rho^{j,(c)} \xrightarrow{\text{(loi)}} U^j$$

où U^j est un skew brownian motion de paramètre α_j.

Un argument de tension nous permet de supposer:

$$((\rho^{j,(c)}, \hat{\theta}^{j,(c)}, \check{\theta}^{j,(c)}); 1 \leqq j \leqq n) \xrightarrow[c\to\infty]{\text{(loi)}} ((U^j, V^j, W^j); 1 \leqq j \leqq n).$$

Il nous reste à étudier les rapports entre ces processus. Le théorème 4.4 montre d'abord que $W^1 = W^2 = \dots = W^n = W$, d'une part, et que $V^1, V^2, \dots, V^n$ sont indépendants et indépendants de W d'autre part.

De plus, notons $\check{U}^j$ (resp. $\hat{U}^j$) le mouvement brownien associé à la partie martingale de $(U^j)_+$ (resp. $(U^j)_-$). Toujours du théorème 4.4, nous déduisons que $\check{U}^1=\check{U}^2=\ldots=\check{U}^n$ et que $\hat{U}^1,\ldots,\hat{U}^n$ sont indépendants et indépendants de $\check{U}^1$. Enfin le même théorème nous montre que $U^1,\ldots,U^n$ sont indépendants de $V^1,\ldots,V^n,W$. Il est ici important de remarquer que la tribu engendrée par U^j l'est aussi par le couple $(\hat{U}^j,\check{U}^j)$: pour le voir, on utilise les mêmes arguments que Jeulin [29] (lemme I.0.2) ou Pitman et Yor [17b] (theorem 5.1 (ii)). Passons maintenant à la partie «convergence de variables aléatoires»; commençons par:

$$\frac{1}{c}A_{e^{2c}}\xrightarrow[c\to\infty]{\text{(loi)}}|\mu_A|\,L^{0+}_{T^1}(U^1). \tag{5.b}$$

Il suffit de reprendre presque mot pour mot la preuve du théorème 3.5 (ii). Remarquons qu'on peut remplacer $L^{0+}_{T^1}(U^1)$ par $L^{0+}_{T^j}(U^j)$ pour tout $j=1\ldots n$, puisque les U^j ont même partie positive. On voit d'autre part sur la preuve du théorème 3.5 que la convergence (5.b) a lieu conjointement avec les convergences de processus démontrées plus haut.

Pour démontrer:

$$\frac{1}{c^2}H^j_{e^{2c}}\xrightarrow[c\to\infty]{\text{(loi)}}T^j, \tag{5.c}$$

il suffit d'utiliser le lemme 3.4, qui montre aussi que la convergence (5.c) a lieu conjointement avec les convergences de processus.

Il reste à montrer:

$$\frac{1}{c^2}H^j_{a(c)}\xrightarrow[c\to\infty]{\text{(loi)}}\inf\{s\colon|\mu_A|\,L^{0+}_s(U^j)>1\}. \tag{5.d}$$

Nous allons établir (5.d) pour un j fixé (et nous supprimons donc partout l'indice j); on a:

$$\frac{1}{c^2}H_{a(c)}=\frac{1}{c^2}\inf\{u\colon\tau_u>a(c)\}=\frac{1}{c^2}\inf\{u\colon A_{\tau_u}>c\}$$

d'où:

$$\frac{1}{c^2}H_{a(c)}=\inf\left\{u\colon\frac{1}{c}A(\tau_{c^2u})>1\right\}.$$

On remarque alors, avec la notation $g(x)=\exp\left(-2\int\limits_{-\infty}^{x}\tilde{h}(y)\,dy\right)$:

$$\frac{1}{c}A(\tau_{c^2u})-|\mu_A|\frac{g(0)}{\alpha}L^0_u(\rho^{(c)})\xrightarrow[c\to\infty]{(P)}0. \tag{5.e}$$

En effet, (2.j) entraîne:

$$\frac{1}{L^1_t(R)}\left(A_t-|\mu_A|\frac{g(0)}{\alpha}L^1_t(R)\right)\xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}}0. \tag{5.f}$$

D'autre part, on a:

$$\text{(5.g)} \qquad \frac{1}{c} L^1\, \tau_{c^2 u}(R) = L_u^0(\rho^{(c)}) \xrightarrow[c \to \infty]{\text{(loi)}}.$$

(5.f) et (5.g) entraînent aisément (5.e). De (5.e), on déduit:

$$\text{(5.h)} \qquad \frac{1}{c^2} H_{a(c)} - \inf\left\{u : |\mu_A| \frac{g(0)}{\alpha} L_u^0(\rho^{(c)}) > 1\right\} \xrightarrow[u \to \infty]{(P)} 0$$

(5.d) est maintenant une conséquence facile de (5.h) et du théorème 3.3. De plus (5.h) montre bien que la convergence (5.d) a lieu conjointement avec les convergences de processus. □

(5.2) Nous allons maintenant appliquer le théorème 5.1 à l'étude asymptotique des nombres de tours. Commençons par le théorème «à temps constants» qui est la généralisation du corollaire 3.6 (ii).

Corollaire 5.2.

$$\frac{2}{\log t}(\phi_t^j;\, 1 \leqq j \leqq n) \xrightarrow[t \to \infty]{\text{(loi)}} (\Gamma(T^\infty) + \alpha_j L_{T^\infty}^0(B^\infty)\, C_j + 2\langle k_j, v_j\rangle L_{T^\infty}^0(B^\infty);\, 1 \leqq j \leqq n)$$

où: $C_1, \ldots, C_n$ sont n variables de Cauchy de paramètre 1,

Γ est un mouvement brownien réel,

B^∞ est un mouvement brownien réfléchi,

$T^\infty = \inf(t \geqq 0 \colon B_t^\infty = 1\}$,

$\Gamma, B^\infty, C_1, \ldots, C_n$ sont indépendants.

Preuve. On pose: $c = \frac{\log t}{2}$. Alors: $\frac{2}{\log t} \phi_t^j = \theta^{j,(c)}\left(\frac{1}{c^2} H_{e^{2c}}^j\right)$. D'autre part:

$$\theta^{j,(c)}\left(\frac{1}{c^2} H_t^j\right) = \frac{1}{c}\theta_0^j + \hat{\theta}^{j,(c)}\left(\int_0^{\frac{1}{c^2}H_t^j} 1_{(\rho_u^{j,(c)} < 0)}\, du\right) + \check{\theta}^{j,(c)}\left(\int_0^{\frac{1}{c^2}H_t^j} 1_{(\rho_u^{j,(c)} > 0)}\, du\right) + \frac{1}{c} A_t^j.$$

En appliquant le théorème 5.1, on trouve:

$$\frac{2}{\log t}(\phi_t^j;\, 1 \leqq j \leqq n) \xrightarrow[t \to \infty]{\text{(loi)}} W\left(\int_0^{T^j} 1_{(U_s^j > 0)}\, ds\right) + V^j\left(\int_0^{T^j} 1_{(U_s^j < 0)}\, ds\right)$$
$$+ |\mu_{A^j}|\, L_{T^1}^{0+}(U^1);\, 1 \leqq j \leqq n).$$

Le fait que la loi limite ainsi obtenue soit la même que celle de l'énoncé du corollaire résulte des mêmes considérations que celles qui terminent la preuve du corollaire 3.6 (ii): B^∞ est le mouvement brownien réfléchi qu'on obtient par changement de temps de $(U^1)_+$ (ou de n'importe quel $(U^j)_+$); le fait que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ soient indépendantes résulte de l'indépendance des V^j d'une part et des parties négatives des U^j d'autre part; enfin on prend simplement $\Gamma = W$. □

Corollaire 5.3.

$$\frac{1}{t}(\phi^j_{a(t)};\, 1 \leqq j \leqq n) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} \left(\frac{\alpha_j}{2|\mu_A|}\, C^j + \frac{1}{2|\mu_A|}\, C^* + \frac{\langle k_j, v_j\rangle}{|\mu_A|};\, 1 \leqq j \leqq n\right)$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$, C^* sont $n+1$ variables de Cauchy indépendantes de paramètre 1.

Preuve. On a:

$$\frac{1}{t}\,\phi^j_{a(t)} = \theta^{j,(t)}\left(\frac{1}{t^2}\, H^j_{a(t)}\right)$$

$$= \frac{1}{t}\,\theta^j_0 + \hat{\theta}^{j,(t)}\left(\int_0^{\frac{1}{t^2}H^j_{a(t)}} 1_{(\rho^{j,(t)}_u < 0)}\, du\right) + \check{\theta}^{j,(t)}\left(\int_0^{\frac{1}{t^2}H^j_{a(t)}} 1_{(\rho^{j,(t)}_u > 0)}\, du\right) + \frac{1}{t}\, A^j_{a(t)}$$

(2.j) entraîne: $\frac{1}{t}\, A^j_{a(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} \frac{|\mu_{Aj}|}{|\mu_A|}$. Du théorème 5.1, on déduit:

$$\frac{1}{t}(\phi^j_{a(t)}\colon 1 \leqq j \leqq n) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} \left(V^j\left(\int_0^{\sigma^j} 1_{(U^j_s < 0)}\, ds\right) + W\left(\int_0^{\sigma^j} 1_{(U^j_s > 0)}\, ds\right) + \frac{|\mu_{Aj}|}{|\mu_A|};\, 1 \leqq j \leqq n\right)$$

où on a posé: $\sigma^j = \inf\left\{u\colon L^{0+}_u(U^j) = \frac{1}{|\mu_A|}\right\}$.

On termine en remarquant que l'on a, avec les notations de la preuve du théorème 5.1, pour tout $j = 1 \ldots n$:

$$\int_0^{\sigma^j} 1_{(U^j_s < 0)}\, ds = \inf\left\{s\colon\ \hat{U}^j_s = \frac{-\alpha_j}{2|\mu_A|}\right\}$$

$$\int_0^{\sigma^j} 1_{(U^j_s > 0)}\, ds = \inf\left\{s\colon\ \check{U}^j_s = \frac{-1}{2|\mu_A|}\right\}. \quad \square$$

Remarques. 1) Les corollaires 5.2 et 5.3 sont la généralisation pour notre processus Z des théorèmes 2 et 3 obtenus par Pitman-Yor ([17a]) pour le mouvement brownien plan. Il est assez remarquable que les lois limites soient essentiellement les mêmes dans les deux situations. Ainsi, pour le théorème «à temps constants», la partie «grand angle» est la même, la partie «petit angle» est la même au facteur multiplicatif α_j près; la seule différence importante est l'apparition d'un «angle intermédiaire» qui n'existait pas dans le cas purement brownien; cet angle intermédiaire s'exprime d'ailleurs très simplement puisqu'il coïncide à constante multiplicative près avec la variable exponentielle limite des fonctionnelles additives intégrables. On peut faire les mêmes remarques pour le théorème «à temps inverses d'une fonctionnelle additive intégrable». La situation est même encore plus simple dans ce cas puisque la contribution de l'angle intermédiaire se réduit alors à l'addition d'une constante.

2) Comme le remarquent déjà Pitman et Yor, on obtient des lois limites très différentes selon la famille de temps aléatoires, croissant vers $+\infty$, que l'on considère. Ainsi, la loi limite pour le théorème à temps constants est sensiblement plus compliquée que pour le théorème à temps inverses d'une fonctionnelle additive. La complexité de cette loi limite est liée au caractère

aléatoire de la distribution asymptotique, lorsque $t\to\infty$, d'une fonctionnelle additive intégrable (A_t) donnée. Notons également que le théorème à temps constants privilégie le point à l'infini (car: $|Z_t| \xrightarrow{(P)} \infty$, ce qui n'est évidemment pas le cas pour $|Z_{a(t)}|$).

D'ailleurs, l'étude à temps constants est équivalente à l'étude aux temps T_r définis pour tout $r>0$ par: $T_r = \inf\{t/|Z_t|>r\}$, comme le montre la «pinching method» de Williams [24].

Nous verrons dans la partie 7 que le problème analogue sur la sphère (où il n'y a plus de «point à l'infini») se ramène à l'étude, sur le plan, aux temps inverses d'une fonctionnelle additive intégrable.

On pourrait imaginer de faire intervenir d'autre familles de temps aléatoires, qui fourniraient de nouvelles lois limites. Si, par exemple, nous voulons privilégier, au lieu du point à l'infini, l'un des points z_j, nous introduirons les temps d'arrêt définis, pour tout $r>0$, et pour tout $j=1\dots n$ par:

$$T_r^j = \inf\{t;\, |Z_t - z_j| < r\}.$$

En utilisant le théorème 5.1 on montre tout aussi facilement que pour le corollaire 5.2 que:

$$\frac{1}{|\log r|}(\phi^j_{T_r^1};\, 1\leqq j\leqq n) \xrightarrow[r\to 0]{(\mathrm{loi})} \Big(\Gamma_{T^\infty} + \frac{1}{\alpha_1} L^0_{T^\infty}(B^\infty)\, C^* + \frac{2\langle k_1, v_1\rangle}{\alpha_1} L^0_{T^\infty}(B^\infty),$$
$$\Big(\frac{\alpha_j}{\alpha_1} L^0_{T^\infty}(B^\infty)\, C_j + \frac{1}{\alpha_1} L^0_{T^\infty}(B^\infty)\, C^* + \frac{2\langle k_j, v_j\rangle}{\alpha_1} L^0_{T^\infty}(B^\infty);\, 2\leqq j\leqq n\Big)\Big)$$

où $\Gamma, B^\infty, T^\infty$ sont définis comme dans le corollaire 5.2 et où $C_2,\dots,C_n, C^*$ sont n variables de Cauchy indépendantes.

(Remarquons que B^∞ s'interprète maintenant comme le mouvement brownien réfléchi obtenu par changement de temps de $(U^1)_-$).

3) Les énoncés des corollaires 5.2 et 5.3 font apparaître pour chaque point z_j les deux constantes α_j et $\langle k_j, v_j\rangle$. Les constantes $\langle k_j, v_j\rangle$ peuvent s'exprimer, à l'aide de (5.a), comme intégrales par rapport à la seule mesure μ. D'une certaine façon, elles sont étroitement liées à l'étude asymptotique des nombres de tours. En revanche, les constantes α_j ont une signification plus générale: on peut dire que α_j décrit la façon dont le processus Z s'approche de z_j, avant de s'éloigner vers l'infini. Précisément on a, pour tout $j=1\dots n$:

$$P[T^j_{\frac{1}{r}} < T_r] \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{\alpha_j}{1+\alpha_j}. \tag{5.j}$$

En effet, il suffit, pour montrer (5.j), d'utiliser le théorème 3.3 pour remarquer que:

$$P[T^j_{\frac{1}{r}} < T_r] \xrightarrow[r\to\infty]{} P[\inf\{s\colon U^j_s = -1\} < \inf\{s\colon U^j_s = 1\}]$$

(5.j) découle alors des propriétés bien connues du skew brownian motion. On peut aussi interpréter α_j à partir des temps d'occupation du processus Z. En utilisant le théorème ergodique, on voit en effet que pour tous i,j:

(5.k)
$$\frac{\alpha_i}{\alpha_j}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t 1_{(|Z_s-z_i|<\varepsilon)}\,ds}{\int_0^t 1_{(|Z_s-z_j|<\varepsilon)}\,ds}\right).$$

En résumé, plus α_j est grand et plus le point z_j «attire» le processus Z, cela se voit d'ailleurs directement sur l'expression de α_j: si le drift b a tendance à ramener le processus vers z_j, la constante α_j sera grande.

Tous ces résultats, et en particulier (5.j) seront approfondis dans la partie 6.

6. Étude de la vitesse d'approche des points

(6.1) A la fin de la partie précédente, nous avons introduit les temps d'arrêt définis pour tout $r>0$ et pour tout $j=1\dots n$ par:

$$T_r^j=\inf\{t\colon |Z_t-z_j|<r\}.$$

Nous nous proposons dans cette partie d'étudier le comportement asymptotique de $(T_r^1,\dots,T_r^n)$ quand r tend vers 0. Au lieu d'étudier les nombres de tours du processus Z autour des points $z_1,\dots,z_n$, nous voulons maintenant savoir à quelle vitesse Z s'approche de ces mêmes points. En fait, les deux problèmes sont très liés: nous verrons que le théorème 5.1 qui nous a déjà beaucoup servi pour les nombres de tours sera l'outil essentiel pour l'étude des T_r^j.

On peut ramener l'étude des T_r^j à celle des processus I_t^j définis pour tout $j=1\dots n$ et pour tout $t\geqq 0$ par:

$$I_t^j=\inf(|Z_s-z_j|;\ s\leqq t).$$

On a en effet l'identité, pour tous $t\geqq 0$, $r>0$ et $j=1\dots n$:

(6.a)
$$\{I_t^j>r\}=\{T_r^j>t\}\quad \text{p.s.}$$

Nous établirons d'abord les résultats portant sur les processus I^j et, à l'aide de (6.a), nous en déduirons ceux qui concernent les T_r^j.

(6.2) Certains de nos résultats feront intervenir un processus étudié par S. Watanabe ([23]), que nous allons décrire brièvement: soit B un mouvement brownien réel issu de 0, l son temps local en 0 et soient, pour tout $t\geqq 0$:

$$l^{-1}(t)=\inf\{s\geqq 0\colon l_s>t\};\qquad S(t)=\sup(|B_s|;s\leqq t).$$

Posons, pour tout $t\geqq 0$: $M(t)=S(l^{-1}(t))$.

Watanabe ([23]) a remarqué que M est un processus de Markov homogène, fellerien. Son semi-groupe $P_t(x,dy)$ est donné par:

pour toute fonction borélienne $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$,

$$\text{(6.b)}\quad \begin{cases} P_t f(x) = f(x)\, e^{-\frac{t}{x}} + \int\limits_x^\infty \frac{t}{y^2} e^{-\frac{t}{y}} f(y)\, dy, & \text{pour } x>0 \\ P_t f(0) = \int\limits_0^\infty \frac{t}{y^2} e^{-\frac{t}{y}} f(y)\, dy, & \text{pour } t>0;\ = f(0), \quad \text{pour } t=0. \end{cases}$$

Les formules (6.b) montrent en particulier que $M(1)$ suit la loi de $\frac{1}{\mathrm{e}}$, où e est une variable exponentielle de paramètre 1.

Le processus M possède une importante propriété d'homogénéïté, évidente sur la définition:

$$\text{(6.c)}\qquad \text{pour tout } \lambda>0\colon\ (M(\lambda t);\, t\geqq 0) \overset{\text{(loi)}}{=} (\lambda M(t);\, t\geqq 0).$$

(6.3) A l'aide des préliminaires ci-dessus, nous pouvons maintenant énoncer et démontrer les résultats de cette partie.

Théorème 6.1.

$$\frac{-2}{\log t}(\log I_t^j;\, 1\leqq j\leqq n) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} \left(\alpha_j \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}_j};\, 1\leqq j\leqq n\right)$$

où $\mathrm{e}, \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ *sont* $n+1$ *variables exponentielles de paramètre* 1, *indépendantes.*

Preuve. Posons $c = \frac{\log t}{2}$. On a, pour tout $j = 1 \ldots n$:

$$-\frac{1}{c}\log I_t^j = \sup\left(-\rho_s^{j,(c)};\, s \leqq \frac{H_t^j}{c^2}\right).$$

Le théorème 5.1 entraîne:

$$\text{(6.d)}\qquad -\frac{1}{c}(\log I_t^j;\, 1\leqq j\leqq n) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} (\sup\{(U_s^j)_-;\, s\leqq T(U^j)\};\, 1\leqq j\leqq n)$$

Posons pour $j = 1 \ldots n$ et $u \geqq 0$:

$$M^j(u) = \sup\{(U_s^j)_-;\, L_s^{0-}(U^j) \leqq 2u\}.$$

Les M^j sont n processus de Watanabe indépendants et indépendants de $\check{U}^1 = \check{U}^2 = \ldots = \check{U}^n$ (ce processus est introduit dans la démonstration du théorème (5.1)). Notons:

$$\mathrm{e} = \tfrac{1}{2} L_{T(U^1)}^{0+}(U^1) = \ldots = \tfrac{1}{2} L_{T(U^n)}^{0+}(U^n).$$

On peut réécrire (6.d) sous la forme:

$$\text{(6.e)}\qquad -\frac{1}{c}(\log I_t^j)_{j=1\ldots n} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}} (M^j(\alpha_j\, \mathrm{e}))_{j=1\ldots n}.$$

La démonstration est terminée, grâce à la propriété d'homogénéïté (6.c). □

Corollaire 6.2.

$$\frac{1}{2|\log r|}(\log T_r^j;\ 1 \leqq j \leqq n) \xrightarrow[r \to 0]{\text{(loi)}} \left(M\left(\frac{1}{\alpha_j}\mathfrak{e}_j\right);\ 1 \leqq j \leqq n\right)$$

où M est un processus de Watanabe et $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ sont n variables exponentielles de paramètre 1 *indépendantes et indépendantes de M.*

Preuve. Soient $u_1, \ldots, u_n$ n réels strictement positifs. On remarque que d'après (6.a), pour $r > 0$ et $t = \frac{1}{r^2}$:

$$\text{(6.f)} \qquad \left(\frac{1}{2|\log r|}\log T_r^j > u_j;\ 1 \leqq j \leqq n\right) = \left(\frac{-2}{\log t}\log I^j(t^{u_j}) < 1;\ 1 \leqq j \leqq n\right).$$

Une légère modification de la preuve du théorème 6.1 montre que:

$$\text{(6.g)} \qquad \left(-\frac{2}{\log t}\log I^j(t^{u_j});\ 1 \leqq j \leqq n\right) \xrightarrow[t \to \infty]{\text{(loi)}} \left(M^j\left(\frac{\alpha_j}{2} L^{0+}_{T^j(u_j)}(U^j)\right);\ 1 \leqq j \leqq n\right)$$

où les M^j sont définis comme dans la preuve du théorème 6.1 et où, pour tout $j = 1 \ldots n$:

$$T^j(u_j) = \inf\{t;\ U_t^j = u_j\}.$$

Notons M le processus de Watanabe défini pour tout $u \geqq 0$ par:

$$\begin{aligned} M(u) &= \sup\{U_s^1;\ L_s^{0+}(U^1) \leqq 2u\} \\ &= \sup\{U_s^j;\ L_s^{0+}(U^j) \leqq 2u\} \qquad (j = 1 \ldots n). \end{aligned}$$

Prenons $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ n variables exponentielles de paramètre 1 indépendantes, et indépendantes de M. On a:

$$\text{(6.h)} \qquad P\left[M^j\left(\frac{\alpha_j}{2} L^{0+}_{T^j(u_j)}(U^j)\right) < 1;\ 1 \leqq j \leqq n\right] = P\left[u_j < M\left(\frac{\mathfrak{e}_j}{\alpha_j}\right);\ 1 \leqq j \leqq n\right].$$

Le corollaire résulte de (6.f), (6.g) et (6.h). □

Le théorème 6.1 et le corollaire 6.2 correspondent aux résultats «à temps constants» pour l'étude des nombres de tours. Nous donnons maintenant les résultats «à temps inverses d'une fonctionnelle additive». Pour cela, nous supposons fixée une fonctionnelle additive intégrable positive A et nous notons a son inverse.

Théorème 6.3.

$$-\frac{1}{t}(\log I^j_{a(t)};\ 1 \leqq j \leqq n) \xrightarrow[t \to \infty]{\text{(loi)}} \left(\frac{\alpha_j}{2|\mu_A|}\frac{1}{\mathfrak{e}_j};\ 1 \leqq j \leqq n\right)$$

où $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ sont n variables exponentielles de paramètre 1 *indépendantes.*

Preuve. On a, pour tout $j = 1 \ldots n$:

$$-\frac{1}{t}\log I^j_{a(t)} = \sup\left(-\rho_s^{j,(t)};\ s \leqq H^j\left(\frac{1}{t^2}a(t)\right)\right).$$

Le théorème 5.1 entraîne:

$$(6.\mathrm{i})\qquad -\frac{1}{t}(\log I^j_{a(t)};\ 1\leqq j\leqq n)\xrightarrow[t\to\infty]{(\mathrm{loi})}\left(\sup\left((U^j_s)_-;\ L^{0-}_s(U^j)\leqq\frac{\alpha_j}{|\mu_A|}\right);\ 1\leqq j\leqq n\right).$$

Avec les notations de la preuve du théorème 6.1 on peut réécrire (6.i) sous la forme:

$$(6.\mathrm{j})\qquad -\frac{1}{t}(\log I^j_{a(t)};\ 1\leqq j\leqq n)\xrightarrow[t\to\infty]{(\mathrm{loi})}\left(M^j\left(\frac{\alpha_j}{2|\mu_A|}\right);\ 1\leqq j\leqq n\right).$$

La démonstration est terminée à l'aide de la propriété d'homogénéïté (6.c). □

Corollaire 6.4.

$$\frac{1}{|\log r|}(A_{T^j_r};\ 1\leqq j\leqq n)\xrightarrow[r\to 0]{(\mathrm{loi})}\left(\frac{2|\mu_A|}{\alpha_j}\mathrm{e}_j;\ 1\leqq j\leqq n\right)$$

où $\mathrm{e}_1,\dots,\mathrm{e}_n$ *sont* n *variables exponentielles de paramètre* 1 *indépendantes.*

Preuve. On remarque que, pour tout n-uplet $(u_1,\dots,u_n)$ de réels strictement positifs, et pour tout $r>0$:

$$(6.\mathrm{k})\qquad \left(\frac{1}{|\log r|}A_{T^j_r}>u_j;\ 1\leqq j\leqq n\right)=\left(\frac{-1}{|\log r|}\log I^j_{a(|\log r|\,u_j)}>1;\ 1\leqq j\leqq n\right).$$

Une légère modification de la preuve du théorème 6.3 montre que:

$$(6.\mathrm{l})\qquad -\frac{1}{t}(\log I^j_{a(tu_j)};\ 1\leqq j\leqq n)\xrightarrow[t\to\infty]{(\mathrm{loi})}\left(\frac{\alpha_j u_j}{2|\mu_A|}\frac{1}{\mathrm{e}_j};\ 1\leqq j\leqq n\right)$$

(6.k) et (6.l) entraînent le résultat du corollaire. □

Remarques. 1) On aurait pu introduire dans l'énoncé des théorèmes 6.1 et 6.3 le processus S défini par:

$$S_t=\sup\{|Z_s|;\ s<t\}.$$

Par exemple on obtiendrait pour le théorème 6.3

$$(6.\mathrm{m})\qquad -\frac{1}{t}(\log S_{a(t)},(\log I^j_{a(t)};\ 1\leqq j\leqq n))\xrightarrow[t\to\infty]{(\mathrm{loi})}\left(\frac{\alpha_j}{|\mu_A|}\frac{1}{\mathrm{e}_j};\ 0\leqq j\leqq n\right)$$

où $\mathrm{e}_0,\mathrm{e}_1,\dots,\mathrm{e}_n$ sont $n+1$ variables exponentielles, de paramètre 1, indépendantes, et où on a posé $\alpha_0=1$.

Cela revient à dire qu'on étudie conjointement la vitesse d'approche du point à l'infini. Nous voyons que dans (6.m) le point à l'infini joue le même rôle que les autres points. Comme nous l'avons déjà remarqué, ce ne serait pas le cas pour le résultat «à temps constants».

2) Les convergences des théorèmes 6.1 et 6.3 ont lieu conjointement avec les convergences pour les angles établies respectivement dans les corollaires 5.2 et 5.3. En fait la démonstration de ces résultats montre bien qu'il s'agit de conséquences presque immédiates du résultat général de convergence en loi qu'est le théorème 5.1.

3) Une conséquence du corollaire 6.4 est que, pour tout $j=1\ldots n$:

$$P[T_r^j<\inf\{T_r^i;\,1\leqq i\leqq n,\, i\neq j\}]\xrightarrow[r\to 0]{}\frac{\alpha_j}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}. \tag{6.n}$$

(6.n) est la généralisation annoncée de (5.j). On obtient ainsi une nouvelle illustration du rôle joué par les constantes α_j (voir l'interprétation donnée à la fin de la partie 5). On voit que α_j mesure la façon dont le processus est attiré par le point z_j relativement aux autres points, y compris le point à l'infini.

4) Posons pour tout $r>0$:

$$T_r^-=\inf\{T_r^j;\,1\leqq j\leqq n\};\; T_r^+=\sup\{T_r^j;\,1\leqq j\leqq n\}.$$

Le corollaire 6.2 entraîne: $\frac{1}{2|\log r|}\log T_r^-\xrightarrow[r\to 0]{(\mathrm{loi})}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)^{-1}\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}'}$ où e et e' sont deux variables exponentielles de paramètre 1 indépendantes,

$$\frac{1}{2|\log r|}\log T_r^+\xrightarrow[r\to 0]{(\mathrm{loi})}\frac{1}{\mathrm{e}'}\sup\left\{\frac{1}{\alpha_j}\mathrm{e}_j;\,1\leqq j\leqq n\right\}.$$

où e', $\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_n$ sont $n+1$ variables exponentielles de paramètre 1 indépendantes.

On en déduit:

$$P\left[\frac{1}{2|\log r|}\log T_r^->\lambda\right]\xrightarrow[r\to 0]{}\left(1+\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)\lambda\right)^{-1}$$

$$P\left[\frac{1}{2|\log r|}\log T_r^+<\lambda\right]\xrightarrow[r\to 0]{}\int_0^\infty e^{-h}\,dh\prod_{j=1}^{n}(1-e^{-\lambda\alpha_j h}).$$

7. Étude asymptotique de certaines diffusions sur la sphère

(7.1) Généralités

Nous nous proposons maintenant d'appliquer les résultats des parties précédentes à l'étude asymptotique d'une classe de diffusions sur la sphère S^2. Soit Δ un mouvement brownien sur la sphère S^2 et c un champ de vecteurs mesurable borné sur la sphère. Nous considèrerons un processus W solution de l'équation:

$$dW_t=d\Delta_t+c(W_t)\,dt. \tag{7.a}$$

L'équation (7.a) est à interpréter au sens des équations différentielles stochastiques sur les variétés (voir par exemple Ikeda-Watanabe [10], p. 234). Nous chercherons à obtenir la loi asymptotique du nombre de tours de W autour d'un axe de la sphère ainsi que des résultats sur la vitesse d'approche des points analogues à ceux de la partie 6. Nous n'aurons besoin d'aucune hypothèse de régularité sur le champ de vecteurs c (il serait même possible d'affaiblir sensiblement l'hypothèse de bornitude de c).

On peut réécrire l'équation (7.a) en utilisant un système (γ, ϕ) de coordonnées sphériques: γ, à valeurs dans $[0;\pi]$, désigne la latitude du point considéré, et ϕ, à valeurs dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, la longitude de ce point. Nous notons (γ_t, ϕ_t) les processus coordonnées de W. On peut toujours supposer $P[\gamma_0=0] = P[\gamma_0=\pi]=0$. (γ_t, ϕ_t) est alors solution du système:

(7.b)
$$d\gamma_t = d\omega_t + \tfrac{1}{2} cotg(\gamma_t)\, dt + c_1(\gamma_t, \phi_t)\, dt.$$
$$d\phi_t = \frac{1}{\sin\gamma_t}(d\alpha_t + c_2(\gamma_t, \phi_t)\, dt)$$

ω et α sont ici deux mouvements browniens réels indépendants et les fonctions c_1, c_2 définies sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sont mesurables bornées. En toute rigueur, (7.b) n'a de sens que jusqu'au premier instant où γ_t atteint 0 ou π. Cependant, on voit facilement, par exemple à partir de (7.b) que:

$$P[\exists\, t \geqq 0; \gamma_t = 0] = P[\exists\, t \geqq 0; \gamma_t = \pi] = 0.$$

Lorsque $c_1 = c_2 = 0$, (7.b) redonne les équations en coordonnées sphériques du mouvement brownien sur la sphère (voir par exemple Itô-Mc Kean [11], p. 270).

Nous utiliserons la projection stéréographique pour ramener l'étude de W à celle d'un processus sur le plan. Soit F^0 la projection stéréographique de point de base $(0,0)$. Nous notons (R_t, Ω_t) les coordonnées polaires du processus $U_t^0 = F^0(W_t)$, de sorte que:

(7.c)
$$R_t = 2\, cotg\left(\frac{\gamma_t}{2}\right)$$
$$\Omega_t = \phi_t.$$

(7.b) et (7.c) entraînent:

$$dR_t = -\left(1+\frac{R_t^2}{4}\right) d\omega_t + \frac{1}{2R_t}\left(1+\frac{R_t^2}{4}\right)^2 dt + \frac{1}{2}\left(1+\frac{R_t^2}{4}\right) \tilde{c}_1(R_t, \Omega_t)\, dt$$
$$d\Omega_t = \frac{1}{R_t}\left(1+\frac{R_t^2}{4}\right) d\alpha_t + \frac{1}{R_t}\left(1+\frac{R_t^2}{4}\right) \tilde{c}_2(R_t, \Omega_t)\, dt$$

où on a noté $\tilde{c}_1 = c_1 \circ (F^0)^{-1}$, $\tilde{c}_2 = c_2 \circ (F^0)^{-1}$.

Soient pour tout $t \geqq 0$:

$$\tau_t = \inf\left\{s; \int_0^s \left(1+\frac{R_u^2}{4}\right)^2 du > t\right\}; \qquad \tilde{R}_t = R_{\tau_t}; \qquad \tilde{\Omega}_t = \Omega_{\tau_t}$$
$$\tilde{\omega}_t = \int_0^{\tau_t} \left(1+\frac{R_s^2}{4}\right) d\omega_s; \qquad \tilde{\alpha}_t = \int_0^{\tau_t} \left(1+\frac{R_s^2}{4}\right) d\alpha_s.$$

$\tilde{\omega}$ et $\tilde{\alpha}$ sont deux mouvements browniens réels indépendants. $(\tilde{R}, \tilde{\Omega})$ vérifie le système:

(7.d)
$$\begin{cases} d\tilde{R}_t = d\tilde{\omega}_t + \dfrac{dt}{2\tilde{R}_t} + (1+\frac{1}{4}\tilde{R}_t^2)^{-1}\,\tilde{c}_1(\tilde{R}_t,\tilde{\Omega}_t)\,dt \\ d\tilde{\Omega}_t = \dfrac{d\tilde{\alpha}_t}{\tilde{R}_t} + \dfrac{1}{\tilde{R}_t}(1+\frac{1}{4}\tilde{R}_t^2)^{-1}\,\tilde{c}_2(\tilde{R}_t,\tilde{\Omega}_t)\,dt \end{cases}$$

(7.d) montre que le processus $Z_t^0 = U_{\tau_t}^0$ est solution de l'équation différentielle stochastique:

$$dZ_t^0 = d\Gamma_t^0 + b_0(Z_t^0)\,dt$$

où Γ^0 est un mouvement brownien plan et où le «drift» b_0 vérifie pour une certaine constante K et pour tout complexe z:

(7.e)
$$|b_0(z)| \leq \frac{K}{1+|z|^2}.$$

Le processus Z^0 appartient à la classe étudiée dans les parties précédentes. En particulier la condition (2.a) est vérifiée pour tout point de base. De plus $F^0(W_t)$ et Z^0 sont liés par la relation:

$$F^0(W_t) = Z^0_{a^0(t)}$$

où $a^0(t) = \inf\left\{s; \int\limits_0^s \left(1+\frac{|Z_\sigma^0|^2}{4}\right)^{-2} d\sigma > t\right\}$ est l'inverse d'une fonctionnelle additive intégrable de Z^0.

Soit maintenant u un point de la sphère tel que $P[W_0 = u] = 0$ et F^u la projection stéréographique de point de base u. Les calculs précédents montrent que $F^u(W_t)$ se met sous la forme:

(7.f)
$$F^u(W_t) = Z^u_{a^u(t)}$$

où Z^u et a^u satisfont:

(7.g)
$$dZ_t^u = d\Gamma_t^u + b_u(Z_t^u)\,dt$$

(7.h)
$$a^u(t) = \inf\left\{s; \int\limits_0^s \left(1+\frac{|Z_\sigma^u|^2}{4}\right)^{-2} d\sigma > t\right\}.$$

Dans (7.g), Γ^u est un mouvement brownien plan et la fonction b_u vérifie la condition (7.e).

Soient μ^u la mesure invariante associée à Z^u, normalisée comme dans la partie 2, et A^u la fonctionnelle additive intégrable:

$$A_t^u = \int\limits_0^t \left(1+\frac{|Z_s^u|^2}{4}\right)^{-2} ds.$$

Comme dans la partie 5, $|\mu^u_{A^u}|$ désignera la masse totale de la mesure associée à A^u.

De la représentation (7.f) il découle que le processus W est récurrent au sens de Harris. Nous noterons λ l'unique probabilité invariante pour W. On peut exprimer λ à l'aide des mesures μ^u. On a, pour toute fonction f bornée sur la sphère, et pour tout u:

(7.i) $$\int f(v)\,\lambda(dv)=\frac{1}{|\mu^u_{A^u}|}\int_{\mathbb{C}} f\circ(F^u)^{-1}(z)\left(1+\frac{|z|^2}{4}\right)^{-2}\mu^u(dz).$$

En effet la formule (7.i) définit une mesure invariante pour W qui est de masse totale 1.

Soient u, v deux points distincts de la sphère. Nous noterons α^u_v la constante définie par la formule (2.h) appliquée au processus Z^u et au point de base $z_0 = F^u(v)$. Le fait que (7.i) soit vraie indépendamment de u entraîne la relation suivante:

(7.j) $$\alpha^u_v=\frac{|\mu^u_{A^u}|}{|\mu^v_{A^v}|}.$$

On pose: $\kappa_v=\dfrac{1}{|\mu^v_{A^v}|}=\dfrac{\alpha^u_v}{|\mu^u_{A^u}|}$.

κ_v s'interprète comme la densité au point v de λ par rapport à la mesure de Lebesgue sur la sphère.

Nous aurons besoin d'une dernière notation: en revenant à la partie 1, prenons $Z=Z^v$ et $z_0=F^v(u)$.

Soit $k^{\#}_{u,v}$ la fonction définie comme $k^{\#}$ dans la partie 1. On pose alors:

(7.k) $$\zeta_{u,v}=\frac{1}{|\mu^v_{A^v}|}\int_{\mathbb{C}}\mu^v(dz)\frac{k^{\#}_{u,v}(z)}{|z-F^v(u)|^2}.$$

(7.2) Etude asymptotique des nombres de tours

Il n'est pas possible de définir directement le nombre de tours du processus W autour d'un point de la sphère. Cela devient possible si on enlève un second point à la sphère. En particulier, on peut définir l'angle de W autour d'un axe de symétrie de la sphère. Si u, v sont deux points distincts de la sphère, nous noterons $\theta^{u,v}(t)$ la variation de l'angle du processus $F^v(W)$ autour de $F^v(u)$ entre les instants 0 et t. Dans le cas où u et v sont diamétralement opposés, on retrouve la définition naturelle de l'angle autour d'un axe de la sphère. On voit facilement que:

(7.l) $$\theta^{u,v}(t)=-\theta^{v,u}(t).$$

La loi asymptotique de $\theta^{u,v}(t)$ est donnée par le théorème suivant qui est l'analogue pour le processus W du théorème de Spitzer (cf. (0.a)).

Théorème 7.1.

$$\frac{1}{t}\,\theta^{u,v}(t)\xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}}(\kappa_u+\kappa_v)\,C+\zeta_{u,v}$$

où C est une variable de Cauchy de paramètre 1.

Preuve. Notons $\theta^u_{Z^v}(t)$ l'angle du processus Z^v autour de u (avec la convention $\theta^u_{Z^v}(0)=0$). On a par définition de $\theta^{u,v}(t)$ et en utilisant (7.f):

$$\theta^{u,v}(t)=\theta^u_{Z^v}(a^v(t)).$$

Le corollaire 5.3 montre que:

$$\frac{1}{t}\theta^u_{Z^v}(a^v(t))\xrightarrow[t\to\infty]{\text{(loi)}}\frac{\alpha^v_u}{|\mu^v_{A^v}|}C+\frac{1}{|\mu^v_{A^v}|}C^*+\zeta_{u,v}$$

où C, C^* sont deux variables de Cauchy de paramètre 1 indépendantes. Compte-tenu de (7.j), on en déduit le résultat du théorème. □

Nous nous proposons maintenant d'étudier la loi asymptotique de $(\theta^{u_i,v_i}(t), 1\leqq i\leqq n)$ pour n couples (u_i, v_i) de points distincts de la sphère. On voit immédiatement qu'on peut se limiter à l'étude des parties martingales des $\theta^{u_i,v_i}(t)$. En effet, si $\tilde{\theta}^{u,v}(t)$ désigne la partie martingale de $\theta^{u,v}(t)$, on a:

$$\text{(7.m)}\qquad \frac{1}{t}(\theta^{u,v}(t)-\tilde{\theta}^{u,v}(t))\xrightarrow[t\to\infty]{(P)}\zeta_{u,v}.$$

Pour l'étude des parties martingales, nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 7.2. (i) *Soient u, v, w trois points distincts de la sphère et $\mathscr{U}$ un voisinage de u tel que $S^2-\mathscr{U}$ soit voisinage de v et w. Alors:*

$$\text{(7.n)}\qquad \frac{1}{t}\int_0^t 1_{(W_s\in\mathscr{U})}(d\tilde{\theta}^{u,v}_s-d\tilde{\theta}^{u,w}_s)\xrightarrow[t\to\infty]{(P)}0.$$

(ii) *Soient u, v deux points de S^2 et $\mathscr{V}$ un voisinage de u et v. Alors:*

$$\text{(7.o)}\qquad \frac{1}{t}\int_0^t d\tilde{\theta}^{u,v}_s\,1_{(W_s\in S^2-\mathscr{V})}\xrightarrow[t\to\infty]{(P)}0.$$

Preuve. Dans les deux cas, on se ramène au cas du plan en utilisant la projection stéréographique avec point de base u. Ainsi, (i) équivaut à dire que les «grands angles» autour de deux points du plan sont «asymptotiquement identiques» (voir les remarques après le corollaire 5.3). De même, (ii) traduit le fait que la partie martingale de l'angle dans un anneau est «asymptotiquement négligeable». □

Le théorème suivant, dont nous laissons la preuve au lecteur, est une conséquence facile du lemme 7.2 et des résultats montrés dans les parties précédentes pour des processus sur le plan.

Théorème 7.3. *Soient $u_1, \dots, u_n$ n points distincts de la sphère et $(\mathscr{U}_1, \dots, \mathscr{U}_n)$ une partition de la sphère telle que, pour tout $i=1\dots n$, U_i soit un voisinage de u_i. Alors:*

$$\frac{1}{t}\left(\int_0^t d\tilde{\theta}^{u_i,u_j}_s 1_{(W_s\in\mathscr{U}_i)};\ \underset{i\neq j}{1\geqq i\geqq n, 1\geqq j\geqq n}\right)\xrightarrow{\text{(loi)}}(\kappa_{u_i}C_i;\ \underset{i\neq j}{1\leqq i\leqq n, 1\leqq j\leqq n}),$$

où $C_1, \dots, C_n$ sont n variables de Cauchy de paramètre 1 indépendantes.

Remarques. a) (7.m) et le théorème 7.3 donnent la réponse à notre problème de départ qui était d'obtenir la loi asymptotique de $(\theta^{u_i, v_i}(t);\ 1 \leqq i \leqq n)$ pour tout n-uplet de couples (u_i, v_i) de points distincts de la sphère. Dans le cas particulier où les u_i, v_i $(1 \leqq i \leqq n)$ sont tous distincts (par exemple si ce sont les points d'intersection avec la sphère de n axes de symétrie de la sphère) on trouve:

$$\frac{1}{t}(\theta^{u_i, v_i}(t);\ 1 \leqq i \leqq n) \xrightarrow[t \to \infty]{\text{(loi)}} ((\kappa_{u_i} + \kappa_{v_i})\, C_i + \zeta_{u_i, v_i};\ 1 \leqq i \leqq n)$$

où les C_i $(1 \leqq i \leqq n)$ sont n variables de Cauchy de paramètre 1 indépendantes.

b) Dans le cas où W est un mouvement brownien sur la sphère $\left(\zeta_{u,v} = 0, \kappa_u = \frac{1}{4\pi}\right)$, on voit qu'asymptotiquement l'angle $\theta^{u,v}(t) = \tilde{\theta}^{u,v}(t)$ se décompose en la somme d'un «petit angle» autour de u et d'un «petit angle» autour de v. En effet, si $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ sont des voisinages disjoints de u et v, on a:

$$\frac{1}{t}\left(\theta^{u,v}(t) - \left(\int_0^t d\theta_s^{u,v}\, 1_{(W_s \in \mathscr{U})} + \int_0^t d\theta_s^{u,v}\, 1_{(W_s \in \mathscr{V})}\right)\right) \xrightarrow[t \to \infty]{(P)} 0.$$

De plus, les deux termes de la décomposition convergent vers des variables de Cauchy indépendantes. Comme le montre (7.n), le «petit angle» autour de u ne dépend pas, asymptotiquement, du choix du second point qui nous sert à le définir. Il ne s'agit là que d'une écriture asymptotique puisqu'il n'est pas question de définir à temps fini l'angle autour d'un point de la sphère sans faire référence à un second point. Cependant, tout se passe asymptotiquement comme si on pouvait définir intrinsèquement l'angle autour d'un point de la sphère et comme si les angles autour de n points distincts étaient des variables de Cauchy indépendantes.

c) Dans le cas général, la remarque ci-dessus s'applique aux parties martingales des angles. Comme pour les processus sur le plan, les parties à variation finie donnent lieu à des «angles intermédiaires» dont la contribution asymptotique se traduit par l'addition des constantes $\zeta_{u,v}$.

(7.3) Étude de la vitesse d'approche des points

Soient $u_1, \ldots, u_n$ n points distincts de la sphère tels que $P[W_0 = u_i] = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n$. Soit d la distance euclidienne sur S^2 considérée comme plongée dans $\mathbb{R}^3$. On pose pour $t \geqq 0$ et $1 \leqq i \leqq n$:

$$I_t^i = \inf\{d(W_s; u_i);\ s \leqq t\}.$$

De même, pour $r > 0$ et $1 \leqq i \leqq n$:

$$T_r^i = \inf\{t \geqq 0;\ I_t^i \leqq r\}.$$

Nous énonçons maintenant les résultats correspondant aux théorème 6.3 et corollaire 6.4. La projection stéréographique permet de ramener facilement la démonstration au cas du plan.

Théorème 7.4.

$$-\frac{1}{t}(\log I_t^j;\, 1 \leqq j \leqq n) \xrightarrow[t\to\infty]{(\text{loi})} \left(\kappa_{u_j}\frac{1}{e_j};\, 1 \leqq j \leqq n\right)$$

où $e_1, \ldots, e_n$ *sont* n *variables exponentielles indépendantes de paramètre* 1.

Corollaire 7.5.

$$\frac{1}{|\log r|}(T_r^j;\, 1 \leqq j \leqq n) \xrightarrow[r\to 0]{(\text{loi})} \left(\frac{1}{\kappa_{u_j}} e_j;\, 1 \leqq j \leqq n\right)$$

où $e_1, \ldots, e_n$ *sont comme dans le théorème* 7.4.

Remarque. De la même façon que pour les processus sur le plan, on déduit du corollaire 7.5 le résultat suivant: pour tout $1 \leqq j \leqq n$:

$$P[T_r^j < \inf\{T_r^i;\, 1 \leqq i \leqq n,\, i \neq j\}] \xrightarrow[r\to 0]{} \frac{\kappa_{u_j}}{\sum_{i=1}^{n} \kappa_{u_i}}.$$

References

1. Azema, J., Duflo, M., Revuz, D.: Mesure invariante des processus de Markov récurrents. Séminaire de Probabilités III. Lect. Notes Math. **88**, p. 24–33. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969
2. Burkholder, D.: Distribution function inequalities for martingales. Ann. Probab. **1**, 19–42 (1973)
3. Dambis, K.: On the decomposition of continuous submartingales. Teor. Verojatn. Primen. **10**, 438–448 (1965)
4. Dubins, L.E., Schwartz, G.: On continuous martingales. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **53**, 913–916 (1965)
5. Durrett, R.: A new proof of Spitzer's result on the winding of two dimensional Brownian motion. Ann. Probab. **10**, 244–246 (1982)
6. Friedman, A., Pinsky, M.A.: Asymptotic behavior of solutions of linear stochastic systems. Trans. Am. Math. Soc. **181**, 1–22 (1973)
7. Friedman, A., Pinsky, M.A.: Asymptotic stability and spiraling properties for solutions of stochastic equations. Trans. Am. Math. Soc. **186**, 331–358 (1973)
8. Harrison, J.M., Shepp, L.A.: On skew brownian motion. Ann. Probab. **9**, 309–313 (1981)
9. Hashminskii, R.Z.: Ergodic properties of recurrent diffusion processes and stabilization of the solution to the Cauchy problem for parabolic equations. Teor. Verojatnost Primen. **5**, 196–214 (1960)
10. Ikeda, N., Watanabe, S.: Stochastic differential equations and diffusion processes. Kodansha: North Holland Mathematical Library, 1981
11. Itô, K., Mc Kean, H.P.: Diffusion processes and their sample paths. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965
12. Kasahara, Y., Kotani, S.: On limit processes for a class of additive functionals of recurrent diffusion processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **49**, 133–153 (1979)
13. Knight, F.B.: A reduction of continuous square integrable martingales to Brownian motion. Lect. Notes Math. **190**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
14. Le Gall, J.F.: One-dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process. In: Stochastic analysis. Lect. Notes Math. **1095**, 51–82. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo: Springer 1984
15. Lyons, T., Mc Kean, H.P.: Windings of the plane Brownian motion. Adv. Math. **51**, 212–225 (1984)
16. Messulam, P., Yor, M.: On D. Williams' "pinching method" and some applications. J. Lond. Math. Soc. **26**, 348–364 (1982)

17a. Pitman, J.W., Yor, M.: The asymptotic joint distribution of windings of planar Brownian motion. Bull. Am. Math. Soc. **10**, 109–111 (1984)
17b. Pitman, J.W., Yor, M.: Asymptotic laws of planar Brownian motion. A paraître dans Annals of Probability (1985). Preprint University of California, Berkeley (1984)
18. Rosenkrantz, W.: Limit theorems for solutions to a class of stochastic differential equations. Indiana Univ. Math. J. **24**, 613–625 (1975)
19. Spitzer, F.: Some theorems concerning two-dimensional Brownian motion. Trans. Am. Math. Soc. **87**, 187–197 (1958)
20. Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S.: Multidimensional diffusion processes. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1979
21. Veretennikov, A.Y.: On strong solutions of some stochastic equations. Russ. Math. Surv. **33**, 5, 215–216 (1978)
22. Walsh, J.B.: A diffusion with discontinuous local time. Astérisque **52–53**, 37–45 (1978)
23. Watanabe, S.: A limit theorem for sums of i.i.d. random variables with slowly varying tail probability. In: Multivariate Analysis, p. 249–261. Krishnaiah, P.R. (ed.). Amsterdam: North Holland 1980
24. Williams, D.: A simple geometric proof of Spitzer's winding number formula for two dimensional Brownian motion. Unpublished manuscript, University College, Swansea (1974)
25. Yor, M.: Une décomposition asymptotique du nombre de tours du mouvement brownien complexe. Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz (mai 1983). A paraître dans Astérisque (1985)
26. Yor, M.: Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales. Astérisque **52–53**, 23–35 (1978)
27. Zvonkin, A.K.: A transformation of the phase space of a process that removes the drift. Math. U.S.S.R Sb **22**, 129–149 (1974)
28. Le Gall, J.F.: Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. A paraître dans Ann. Probab. (1985)
29. Jeulin, T.: Application de la théorie du grossissement à l'étude des temps locaux Browniens. Lect. Notes Math. **1118**. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo: Springer 1985

Received July 15, 1984; in revised form May 25, 1985

Note ajoutée sur épreuves. Les arguments du présent article, et ceux qui figurent dans l'article de Pitman-Yor [17b], sont sensiblement plus voisins que ne l'indique l'introduction ci-dessus, qui tenait compte d'une première version de ce dernier travail.