Probab. Th. Rel. Fields 79, 625–628 (1988)

Probability Theory and Related Fields

Moyennes uniformes et moyennes suivant une marche aléatoire

Jean-Pierre Kahane[1], Jacques Peyrière[1], Wen Zhi-ying[2], Wu Li-ming[2]

[1] Université de Paris-Sud, Mathematique, Bâtiment 425, Centre D'Orsay, I-91405 Orsay Cedex, France

[2] University of Wuhan, Department of Mathematics, Wuhan, People's Republic of China

Summary, Let φ be a bounded function on $\mathbb{Z}$ such that $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(m-j)$ converges towards l as n goes to infinity, uniformly with respect to m. Let $\{X_n\}$ be a random walk on $\mathbb{Z}$, not concentrated on a proper subgroup of $\mathbb{Z}$. Then, with probability 1, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(X_j)$ converges towards l as n goes to infinity. The result also holds for any countable abelian group instead of $\mathbb{Z}$. Other modes of convergence are considered (Cesaro convergence of order $\alpha>\frac{1}{2}$). The Cesaro convergence of expressions such that $\varphi(X_n)\psi(X_{n+1})$ is also investigated.

Si j est un élément de $\mathbb{Z}^d$, $|j|$ désigne la valeur maximale de ses composantes et τ_j la translation qu'il définit.

Nous dirons qu'une fonction bornée, φ, définie sur $\mathbb{Z}^d$ est uniformément moyennable si la suite de fonctions $(2n+1)^{-d}\sum_{|j|\leq n}\tau_j\varphi$ converge uniformément. La limite est alors une constante, que nous noterons $\mathfrak{M}(\varphi)$.

Soit p une probabilité sur $\mathbb{Z}^d$ dont le support engendre le groupe $\mathbb{Z}^d$ tout entier. Considérons une marche aléatoire $\{X_n\}_{n\geq 0}$ qui lui soit associée: $P(X_{n+1}-X_n=-k\,|\,X_n)=p(k)$, $k\in\mathbb{Z}^d$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cet article.

Théorème 1. *Si φ est une fonction sur $\mathbb{Z}^d$, bornée et uniformément moyennable, la suite $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(X_j)$ converge presque-sûrement vers $\mathfrak{M}(\varphi)$.*

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Lemme 1. *Pour toute fonction φ bornée sur $\mathbb{Z}^d$, la suite $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}[p*\varphi(X_j)-\varphi(X_j)]$ converge presque sûrement vers 0. (Ici $p*\varphi$ désigne la fonction $k\mapsto\sum_i p(j)\,\varphi(k-j)$.)*

Démonstration. On a $E(\varphi(X_{n+1})|X_n)=p*\varphi(X_n)$. Comme la fonction φ est bornée, il résulte de la théorie des martingales que la suite $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}(\varphi(X_{j+1})-p*\varphi(X_j))$ converge presque-sûrement vers 0, d'où le lemme.

Lemme 2. *Pour une fonction f appartenant à $l^1(\mathbb{Z}^d)$ les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *pour toute fonction φ bornée sur $\mathbb{Z}^d$, la suite $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f*\varphi(X_j)$ converge presque sûrement vers* 0,

2. $\hat{f}(0)=0$ *($\hat{f}$: transformée de Fourier de f).*

Démonstration. L'ensemble I constitué des éléments f de $l^1(\mathbb{Z}^d)$ satisfaisant la première condition du lemme est un idéal fermé de l'algèbre de convolution $l^1(\mathbb{Z}^d)$. Cet idéal contient la fonction $p-\delta_0$ en vertu du lemme 1. Or il résulte des hypothèses faites sur p que la transformée de Fourier de $p-\delta_0$ s'annule uniquement en 0. L'idéal I est donc identique à l'ensemble des f de $l^1(G)$ dont la transformée de Fourier est nulle en 0.

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème 1. Il suffit de considérer une fonction φ ayant une moyenne uniforme nulle.

Il résulte du lemme 2 que, pour chaque n, la fonction $(2n+1)^{-d}\sum_{|j|\leqq n}\delta_j-\delta_0$ appartient à l'idéal I. En d'autres termes, la suite $\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}[(2n+1)^{-d}\sum_{|j|\leqq n}\tau_j\varphi(X_k) -\varphi(X_k)]$ converge presque-sûrement vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$. Pour tout n, on a donc presque-sûrement $\limsup_{m\to\infty}\left|\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\varphi(X_j)\right|\leqq\|(2n+1)^{-d}\sum_{|j|\leqq n}\tau_j\varphi\|_\infty$, d'où le résultat.

Ceci appelle deux remarques. Nous avons considéré dans le lemme 1 les différences de martingale $\varphi(X_{n+1})-p*\varphi(X_n)$ et nous avons utilisé de façon assez faible le fait que φ soit bornée. En fait, pour tout $\alpha>\frac{1}{2}$, la série $\sum_{n\geqq 0}\frac{1}{(n+1)^\alpha}(\varphi(X_{n+1})-p*\varphi(X_n))$ converge presque sûrement et le lemme classique de Kronecker, applicable au cas $\alpha=1$, s'étend sans difficulté pour donner la convergence presque sûre vers 0 au sens (C,α) de $\varphi(X_{n+1})-p*\varphi(X_n)$ (on peut trouver la définition de ces différents types de convergence dans le livre de Zygmund [10] (p. 76); la convergence $(C,1)$ d'une suite u_n est la convergence ordinaire de la suite des moyennes $\frac{1}{n}(u_1+u_2+\dots u_n)$).

La seconde remarque est que tout ceci s'étend sans difficulté au cas d'un groupe abélien discret dénombrable. Voici comment s'énonce alors le résultat.

Théorème 2. *Soit G un groupe abélien discret dénombrable et $\{X_n\}_{n\geqq 0}$ une marche aléatoire sur G non localisée sur un sous-groupe strict. Si φ est une fonction bornée sur G telle qu'il existe une suite $\{k_n\}_{n\geqq 0}$ de fonctions sommables sur G telle que*

1. $\sum_{x\in G}k_n(x)=1$,

2. *pour chaque x de G, $k_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$,*

3. *$k_n * \varphi$ converge uniformément vers une constante a, alors, dans ces conditions, $\varphi(X_n)$ converge presque sûrement vers a au sens (C,α) pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$.*

En fait la condition imposée à φ ne dépend que très peu du noyau $\{k_n\}$. Plus précisément, si l'on note $\mathfrak{J}$ l'ensemble des suites $\{a_n\}_{n \geqq 0}$ d'éléments de $l^1(G)$ telles que

1. $\sup\limits_{n \geqq 0} \|a_n\|_1 < \infty$,

2. $\sum\limits_{x \in G} a_n(x) = 1$,

3. pour tout x de G, $\lim\limits_{n \to \infty} \|a_n - \tau_x a_n\|_1 = 0$, on a le résultat suivant.

Proposition. *Soit $\{k_n\}$ un noyau vérifiant les conditions 1. et 2. du théorème 2. Si φ est une fonction bornée telle que $k_n * \varphi$ converge uniformément vers une constante, il en est de même de $a_n * \varphi$ pour tout noyau $\{a_n\}$ appartenant à $\mathfrak{J}$.*

Pour démontrer cette proposition, on associe à chaque $\{a_n\}$ de $\mathfrak{J}$ l'idéal J constitué des f de $l^1(G)$ telles que, pour toute fonction bornée ψ, $f * a_n * \psi$ converge uniformément vers 0. Il résulte de l'hypothèse 3. faite sur le noyau $\{a_n\}$ que cet idéal coïncide avec l'idéal des fonctions sommables dont la transformée de Fourier s'annule à l'origine. La suite de la démonstration ressemble à celle du théorème 1: $a_m * (k_n * \varphi - \varphi)$ tend uniformément vers 0 quand $m \to \infty$ (n fixé) et vers $a_m * (a - \varphi)$ quand $n \to \infty$ (uniformément par rapport à m), donc $a_m * \varphi$ tend uniformément vers a.

On peut remarquer que $\mathfrak{J}$ n'est pas vide. Par exemple, on peut choisir arbitrairement $a_0 \in l^1(G)$ satisfaisant $\sum\limits_{x \in G} a_0(x) = 1$, considérer une suite $\{x_n\}_{n \geqq 1}$ dans laquelle chaque élément de G figure une infinité de fois, et poser $a_n = \frac{1}{n}(\tau_{x_n} + \tau_{2x_n} + \dots + \tau_{nx_n})\, a_{n-1}$ pour $n = 1, 2, \dots$. Nous dirons donc qu'une fonction bornée φ sur G est uniformément moyennable si, pour tout noyau $\{a_n\}$ appartenant à $\mathfrak{J}$, $a_n * \psi$ converge uniformément (il s'agit d'un élément ergodique de $l^\infty(G)$ dans la terminologie de [2] et [6]).

Le théorème 2 peut être étendu de la façon suivante.

Théorème 3. *Soit $(k+1)$ fonctions bornées $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ telles que quels que soient les éléments $x_0, x_1, \dots, x_k$ de G la fonction $\prod\limits_{j=0}^{k} \tau_{x_j} \varphi_j$ soit uniformément moyennable. Alors la suite $\prod\limits_{j=0}^{k} \varphi_j(X_{n+j})$ converge presque sûrement vers une constante au sens (C,α) pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$.*

La démonstration se fait par récurrence sur k. Pour $k=0$, c'est le théorème 2. Sinon, on a

$$E\left(\prod_{j=0}^{k} \varphi_j(X_{n+1+j}) \,|\, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k}\right) = \prod_{j=0}^{k-1} \varphi_j(X_{n+1+j}) \cdot p * \varphi_k(X_{n+k})$$

et l'on est ramené au même problème avec k fonctions.

Remarques. Les théorèmes 1 et 2 généralisent certains résultats de H. Robbins [9]: dans le cas d'un groupe discret il obtient en effet la convergence de $\varphi(X_n)$ au sens $(C, 1)$ lorsque, ou bien φ est presque périodique, ou bien φ a une limite à l'infini.

D'autre part, pour tout $\alpha>0$, on sait [1, 3, 5] qu'une suite de v.a. $\{X_n\}$ indépendantes et équidistribuées converge p.p. au sens (C, α) si et seulement si $E(X_n^{1/\alpha})$ est fini. On peut donc se demander si la convergence de $\varphi(X_n)$ n'a pas lieu en fait au sens (C, α) pour tout $\alpha>0$.

Les hypothèses du théorème 3 sont satisfaites dans les cas suivants:

(a) les fonctions φ_j sont presque périodiques,

(b) les fonctions φ_j ont des limites à l'infini.

Voici un autre exemple. Considérons la suite de Thue-Morse $\{\varepsilon_j\}_{j\geqq 0}$ ainsi définie: $\varepsilon_0=0$ et, pour $j\geqq 0$, $\varepsilon_{2j}=\varepsilon_j$ et $\varepsilon_{2j+1}=1-\varepsilon_j$ (autrement dit, c'est un point fixe de la substitution $0\to 01$ et $1\to 10$). Définissons ε_j pour $j<0$ ainsi: $\varepsilon_j=\varepsilon_{-j}$. Il est connu [4, 7, 8] que cette suite n'est pas presque périodique et que, étant donnée une suite finie $\{\alpha_j\}_{0\leqq j<k}$ de 0 et de 1, l'ensemble des $n\in\mathbb{Z}$ tels que $\varepsilon_{n+j}=\alpha_j$ pour $0\leqq j<k$ a une densité uniforme. Si donc on prend pour $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi$ la fonction indicatrice de l'ensemble des j pour lesquels ε_j vaut 1, les hypothèses du théorème 3 sont satisfaites. Plus généralement, il en est ainsi si les fonctions φ_j sont associées á des substitutions de même langeur sur un alphabet fini.

References

1. Deniel, Y., Derriennic, Y.: Sur la convergence presque sûre, au sens de Cesaro d'ordre α, $0<\alpha<1$, de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Preprint
2. Eberlein, W.F.: Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions. Trans. Am. Math. Soc. **67**, 217–239
3. Hsu, P.L., Robbins, H.: Complete convergence and the law of large numbers. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **33**, 25–31 (1947)
4. Keane, M.: Generalized Morse sequences. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **10**, 335–353 (1968)
5. Lorentz, G.G.: Borel and Banach properties of methods of summation. Duke Math. J. **22**, 129–141 (1955)
6. Lust-Piquard, F.: Eléments ergodiques et totalement ergodiques dans $L^\infty(\Gamma)$. Studia Math. **69**, 191–225 (1981)
7. Michel, P.: Coïncidence values and spectra of substitutions. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **42**, 205–227 (1978)
8. Queffelec, M.: Contribution à l'étude spectrale des suites arithmétiques. Thèse d'Etat, Université Paris Nord (1984)
9. Robbins, H.: On the equidistribution of sums of independent random variables. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 786–799 (1953)
10. Zygmund, A.: Trigonometric series. I. Cambridge: Cambridge University Press 1959

Received April 9, 1987; in revised form March 12, 1988