5

Der Satz von Gödel

Grenzen der Logik

In den frühen 30er Jahren versuchte Kurt Gödel, ein österreichischer Mathematiker, zu zeigen, daß der Prädikatenkalkül (vgl. Kapitel 58) „vollständig" ist – nämlich, daß man (zumindest prinzipiell) automatisch einen Beweis für jede wahre Formel, die in diesem Kalkül ausgedrückt wird, erhalten kann. Sein Mißerfolg hierbei wurde durch die Entdeckung gekrönt, daß die Lösung der Aufgabe unmöglich ist: Bestimmte formale Systeme einschließlich der Arithmetik sind in diesem Sinn unvollständig. Diese Entdeckung brachte die Welt der Mathematik ins Wanken.

Als Teil des von David Hilbert um die Jahrhundertwende aufgestellten Programms für die Mathematik hatte man erwartet, daß sich die gesamte Mathematik als vollständig erweisen würde, wenn sie in einem System wie dem Prädikatenkalkül in geeigneter Weise formalisiert würde. Gödel entdeckte aber, daß nicht einmal die Arithmetik vollständig ist. Sein inzwischen berühmter Satz besagt, daß es in jedem widerspruchsfreien, logisch formalen System, das die Arithmetik enthält, wahre Aussagen gibt, die nicht bewiesen werden können – Aussagen, deren Wahrheit wir mit anderen Mitteln feststellen können, aber mit keinem formalen, stufenweisen Entscheidungsprozeß.

Seit Hilberts Zeiten hatte eine Reihe von Forschern auf verschiedene Weisen versucht, derartige Entscheidungsprozesse zu formulieren. Sie übernahmen bestimmte Axiome und eine Reihe von Formalismen zur Manipulation der Axiome nach bestimmten Regeln, um neue Aussagen zu erhalten, die – unter Voraussetzung der Wahrheit der Axiome – selbst wahr sind. Ein derartiges System war die Theorie rekursiver Funktionen, an deren Entwicklung Gödel beteiligt war. Rekursive Funktionen kommen einer weiteren Beschreibung dessen gleich, was Berechnung bedeutet (vgl. Kapitel 66).

Der Kern des Gödelschen Verfahrens beruht darauf, den Prädikatenkalkül als Sprache zu betrachten und jede mögliche Aussage in ihr mittels eines speziellen numerischen Codes zu verschlüsseln, der als *Gödel-Nummer* bezeichnet wird. Kurz gesagt, besteht der Vorgang aus drei Schritten:

- Stelle Axiome für den Prädikatenkalkül sowie die Ableitungsregeln auf, nach denen man neue Formeln aus alten erhält.
- Stelle Axiome für die Standard-Arithmetik in der Sprache des Prädikatenkalküls auf.
- Definiere eine Numerierung für jede Formel oder Folge von Formeln in dem sich ergebenden formalen System.

Wenn man die leicht zu lesende implikative Sprache benutzt, kann man die Axiome des Prädikatenkalküls folgendermaßen auflisten:

1. $\forall y_i \; (F \rightarrow (G \rightarrow F))$
2. $\forall y_i \; ((F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)))$
3. $\forall y_i \; ((\neg F \rightarrow \neg G) \rightarrow ((\neg F \rightarrow G) \rightarrow F))$
4. $\forall y_i \; (\forall x \, (F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow \forall x G))$, vorausgesetzt, daß F keine freien Vorkommen von x enthält
5. $\forall y_i \; ((F \rightarrow G) \rightarrow (\forall y_i F \rightarrow \forall y_i G))$
6. $\forall y_i \; (\forall x \, F(x) \rightarrow F(y))$, vorausgesetzt, daß y nicht quantifiziert ist, wenn es substituiert wird

Wenn man die hier benutzte Schreibweise erst einmal verstanden hat, kommen einem die Axiome ziemlich selbstverständlich als genau das vor, worauf man eine Theorie mathematischer Ableitung gründen sollte.

Unter Symbolen wie F, G und H versteht man „Formeln"; $\forall y_i$ bedeutet eine beliebige Folge von Variablen wie $y_1, y_2, \ldots, y_k$, die alle universell quantifiziert sind; man liest diese symbolische Schreibweise als „für alle y_i" oder „für alle $y_1, y_2, \ldots, y_k$". Das Symbol $\rightarrow$ steht für die Implikation und das Symbol $\neg$ für die Negation.

Die verschiedenen, in den obigen Axiomen auftretenden Formeln können, aber müssen nicht, die Variablen enthalten, die außerhalb von ihnen quantifiziert werden, jedoch kann Axiom 4 nur dann angewandt werden, wenn die Variable x, falls sie in F auftritt, innerhalb von F quantifiziert wird. Axiom 6 kann nicht angewandt werden, es sei denn, y wird nicht innerhalb $F(y)$ quantifiziert (die Formel, die man erhält, wenn man alle freien Vorkommen von x in F durch y ersetzt).

Die Axiome selbst kann man nun leicht verstehen. Zum Beispiel kann man Axiom 1 lesen als: „Für alle möglichen Werte ihrer freien Variablen gilt: wenn F wahr ist, dann $G \rightarrow F$". Mit anderen Worten: Eine wahre Formel wird von *jeder* Formel impliziert. Axiom 2 besagt, daß die Implikation auch bezüglich sich selbst distributiv ist. Und Axiom 3 drückt aus, daß nicht wahr sein kann, wenn sowohl $\neg G$ als auch G von $\neg F$ impliziert werden, mit anderen Worten, F muß wahr sein. Als letztes Beispiel besagt Axiom 4: „Für alle möglichen Werte ihrer freien Variablen (wie immer) gilt: Wenn $F \rightarrow G$ für alle x und wenn x kein freies Vorkommen in F besitzt, dann $F \rightarrow \forall x G$".

Zu den oben genannten Axiomen muß noch eine Inferenzregel (Ableitungsregel) wie die folgende hinzugefügt werden:

Wenn F und $F \rightarrow G$, dann G.

Man beachte, daß diese Regel in gewissem Sinn nicht auf derselben Ebene liegt wie die Axiome: Sie soll besagen, daß jedesmal, wenn wir eine Ableitung – im wesentlichen eine Folge von Formeln – durchführen und feststellen, daß die Formeln F und $F \rightarrow G$ beide als frühere Glieder der Folge vorkommen, so können wir G zu der Folge hinzufügen.

Unter „Standard-Arithmetik" versteht man nichts anderes als die *Peano-Postulate* für natürliche Zahlen, nämlich

1. $\forall x \quad \neg(0 = sx)$
2. $\forall x,y \quad (sx = sy) \rightarrow (x = y)$
3. $\forall x \quad x + 0 = x$
4. $\forall x,y \quad x + sy = s(x + y)$
5. $\forall x,y \quad x \times sy = x \times y + x$
6. $\forall x \quad x \times 0 = 0$

Hier bedeutet s die Nachfolgerfunktion, die für jede natürliche Zahl x ihren Nachfolger $x + 1$ angibt. Infolgedessen bringen die Postulate 1 bzw. 2 zum Ausdruck, daß

- Null nicht der Nachfolger einer natürlichen Zahl ist;
- wenn die Nachfolger gleich sind, dann sind es auch die Zahlen selbst.

Die restlichen Postulate sind ebenfalls leicht verständlich. Alle sechs Postulate werfen jedoch die Frage auf, was wir unter Gleichheit verstehen. Genau diese Bedeutung ist in drei weiteren Postulaten verankert:

7. $\forall x \quad x = x$
8. $\forall x, y, z \quad (x = y) \rightarrow ((x = z) \rightarrow (y = z))$
9. $\forall x,y \quad (x = y) \rightarrow (A(x,x) \rightarrow A(x,y))$

wobei A jede Formel mit zwei freien Variablen sein kann.

Entsprechend der speziellen Inferenzregel bei den Axiomen des Prädikatenkalküls fügen wir hier eine Induktionsregel hinzu:

$$(P(0) \;\&\; \forall x(P(x) \rightarrow P(sx))) \rightarrow \forall x P(x)$$

Diese Formel ist nichts anderes als eine Verschlüsselung der wohlbekannten Induktionsregel: Wenn ein Prädikat P für die Zahl 0 wahr ist und wenn, falls P für eine Zahl x wahr ist, P auch für den Nachfolger von x wahr ist, dann ist P für alle möglichen Zahlen x wahr.

Die insgesamt 15 oben genannten Axiome und zwei Regeln sind gemeinsam mächtig genug, um uns ein formales System für die Arithmetik zu liefern, in dem so viele Vorstellungen ausgedrückt und bewiesen werden können, daß man von vornherein versucht ist anzunehmen, daß jede arithmetische Wahrheit in diesem System nicht nur ausgedrückt, sondern auch in ihm bewiesen werden kann.

Nach Aufstellung dieser Axiome fuhr Gödel mit dem dritten Schritt seines Beweises fort, nämlich jeder in dem gerade definierten System vorstellbaren Formel eine eindeutige Zahl zuzuordnen. Er erreichte dies, indem er jedem der folgenden Grundsymbole eine natürliche Zahl zuordnete:

Symbol	Codenummer	Symbol	Codenummer
0	1	x	9
s	2	1	10
+	3	$\neg$	11
$\times$	4	&	12
=	5	$\exists$	13
(	6	$\forall$	14
)	7	$\rightarrow$	15
,	8		

Wenn nun innerhalb unseres formalen Systems ein Axiom oder eine Formel gegeben ist, dann ist es einfach, die Formel von links nach rechts durchzugehen und jedes ihrer Symbole durch eine Primzahl zu ersetzen, die in diejenige Potenz erhoben wird, die der Codenummer dieses Symbols entspricht. Die Primzahlen, die hierfür benutzt werden, sind die aufeinanderfolgenden Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, ... Als Beispiel für diese Prozedur besitzt Axiom 4 der Standard-Arithmetik folgende Gödel-Nummer:

$$x_1 + sx_{11} = s(x_1 + x_{11})$$

$$2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^9 \cdot 13^{10} \cdot 17^{10} \cdot 19^5 \cdot 23^2 \cdot 29^6 \cdot 31^9 \cdot 37^{10} \cdot 41^3 \cdot 43^9 \cdot 47^{10} \cdot 53^{10} \cdot 59^7$$

Die Zahl erhält man, indem man den gegebenen Ausdruck Symbol für Symbol durchgeht und in die entsprechende Primzahlpotenz umwandelt. Auf diese Weise erhält x, das erste Symbol, die Codenummer 9, so daß 2, die erste Primzahl, in die neunte Potenz erhoben wird. Das nächste Symbol, 1, wird zu 3^{10}, da 3 die nächste Primzahl und 10 die Codenummer für das Symbol 1 ist.

Es ist zu beachten, daß das Axiom so abgeändert wurde, daß es auf unsere obige Verwendung einer speziellen Schreibweise für Variablen angepaßt ist, nämlich die Verwendung einer Art unitären Codes (der aus aufeinanderfolgenden Einsen besteht), um ein Indizierungssystem für das Symbol x zu erhalten. x_1 und x_{11} können, mit anderen Worten, als vollkommen allgemeine Namen wie x und y in Axiom 4 der Arithmetik betrachtet werden.

An dem obigen Beispiel kann man erkennen, daß Gödel-Nummern riesig werden. Trotzdem sind sie berechenbar, und es ist möglich, für jede beliebige ganze Zahl den Ausdruck zu berechnen, den sie (wenn überhaupt) darstellt, indem man ihre sämtlichen Primfaktoren bestimmt und sie als Potenzen in der Reihenfolge ansteigender Primzahlen zusammenfaßt.

Wir sind nun in der Lage, uns dem Kern des Gödelschen Satzes zuwenden zu können, indem wir das folgende Prädikat betrachten:

$$\text{Beweis}(x, y, z)$$

Hier ist Beweis(x, y, z) ein Prädikat, das folgendermaßen interpretiert wird: „x ist Gödel-Nummer eines Beweises X einer Formel Y (mit einer freien Variablen und der Gödel-Nummer y), in welche die ganze Zahl z substituiert wurde". Den „Beweis X", auf den hier Bezug genommen wird, kann man selbst als Formel betrachten, um ihm eine Gödel-Nummer zuzuweisen.

Es ist zu beachten, daß die Grundsymbole, denen Codenummern zugeordnet wurden, kein Prädikatensymbol „Beweis" oder irgendein anderes Prädikatensymbol außer Gleichheit (=) enthalten. „Beweis(x, y, z)" ist nichts anderes als *unsere eigene Kurzschrift* für einen enorm langen Ausdruck mit drei freien Variablen x, y und z – oder, in Gödels Schreibweise, x_1, x_{11} und x_{111}. Dieser Ausdruck umfaßt eine Reihe von Prozeduren, z.B. die folgenden:

1. Gegeben sei eine ganze Zahl; erzeuge die Zeichenkette, dessen Gödel-Nummer sie ist.
2. Gegeben sei eine Zeichenkette; prüfe, ob sie eine Formel ist.
3. Gegeben sei eine Folge von Formeln; prüfe, ob sie ein Beweis für die letzte Formel in der Folge ist.

Diese Prozeduren sind sämtlich berechenbar und, wie Gödel zeigte, selbst auf Formeln innerhalb des oben definierten formalen Systems reduzierbar. Bevor wir zeigen, wie dieses Prädikat im Satz von Gödel benutzt wird, ist noch eine kleine Einzelheit zu klären. Wir müssen nämlich festlegen, was eine „Formel" eigentlich ist: Die in der obigen Prozedur 2 enthaltene Definition läuft auf eine induktive Definition eines richtig gebildeten arithmetischen Ausdrucks hinaus und die Art und Weise, in welcher derartige Ausdrücke auf zulässige Weise mit den logischen Verknüpfungen & und $\rightarrow$ kombiniert und mittels $\exists$ und $\forall$ quantifiziert werden können. Zum Beispiel ist $\exists x_1(X_{11}(x) = X_{111}(x))$ eine Formel, $1X)\exists x_{11}\neg\neg=))$ jedoch nicht.

Wir können nun eine sehr spezielle Anwendung des zur Debatte stehenden Prädikats betrachten. Angenommen, der Formel Y wird ihre eigene Gödel-Nummer zugeordnet, und wir verneinen die Existenz eines Beweises innerhalb des formalen Systems der sich ergebenden Formel:

$$\neg\exists x \text{Beweis}(x, y, y)$$

In Worte gefaßt, besagt die Formel Beweis(x, y, y) folgendes: „x ist die Gödel-Nummer eines Beweises der Formel, die man erhält, wenn man ihre eigene Gödel-Nummer für ihre einzige freie Variable substituiert." Schreibt man $\neg\exists x$ davor, ist dies folglich die Verneinung der Existenz eines derartigen Beweises.

Nun besitzt jedes derartige Prädikat, das in unserem formalen System ausgedrückt werden kann, eine Gödel-Nummer, und es ist amüsant, die Karikatur in Abbildung 5.1 zu betrachten.

Zunächst sehen wir den Ausdruck $\neg\exists x$Beweis(x, y, y) mit einer freien Variablen, der Anstalten macht, y zu verspeisen. Seine eigene Gödel-Nummer ist mit g bezeichnet. Danach wird der Figur ihre eigene Gödel-Nummer zum Verspeisen gegeben, und nachdem sie diese zu sich genommen hat, wird die Figur in ein Prädikat ohne freie Variable transformiert – und damit ohne Mund. Natürlich besitzt selbst die sich ergebende Formel eine Gödel-Nummer: g'.

Satz von Gödel: $\neg\exists x$Beweis(x, g, g) ist in dem formalen arithmetischen System wahr, aber nicht beweisbar.

Der Beweis dieses Satzes benötigt nur einige wenige Zeilen:
Angenommen, $\neg\exists x$Beweis(x, g, g) sei in dem System beweisbar, und p sei die Gödel-Nummer seines Beweises P. Dann gilt, daß

$$\text{Beweis}(p, g, g)$$

wahr ist, da P ein Beweis von G ist, wobei g für seine einzige freie Variable substituiert ist. Beweis(p, g, g) steht aber im Widerspruch zu $\neg\exists x$Beweis(x, g, g) mit der Folgerung, daß kein derartiger Beweis P existiert.
Die Formel $\neg\exists x$Beweis(x, g, g) ist mit Sicherheit wahr, da wir gerade die Behauptung bewiesen haben, die sie von sich selbst macht – nämlich, daß sie keinen Beweis besitzt!

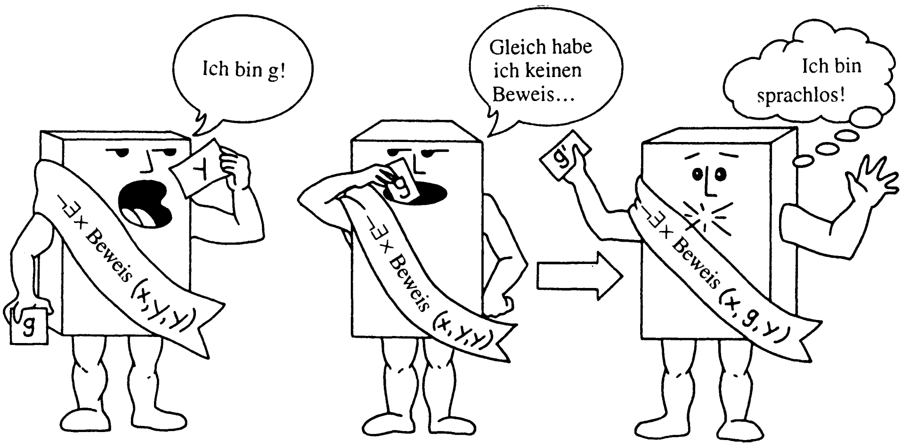

Abbildung 5.1 Eine bestimmte Formel verspeist ihre eigene Gödel-Nummer

Einen derartigen Beweis, bei dem einem Prädikat mit zwei Variablen beiden seiner Argumente derselbe Wert gegeben wird, nennt man einen *Beweis durch Diagonalschluß*, und er wird häufig in der Theorie unendlicher Mengen und in der mathematischen Logik eingesetzt. Cantor war der erste, der diese Schlußweise einsetzte, um zu beweisen, daß die reellen Zahlen nicht abzählbar sind.

Gibt es wahre Aussagen, die Mathematiker zur Zeit zu beweisen versuchen, für die es aber nie gelingen wird? Wie steht es mit der Goldbachschen Vermutung, die besagt, daß jede gerade Zahl die Summe zweier Primzahlen ist? Mit Sicherheit hat bis jetzt niemand diese Behauptung bewiesen, aber die meisten Mathematiker glauben, daß sie wahr ist.

Die Bemühungen, die Mathematik mit einem Mechanismus zu formalisieren, führte zur Entdeckung eines grundlegenden und tiefgreifenden Problems in der Mathematik selbst. Seine Entdeckung sollte einige Jahre später zu einer Parallele führen, als der Versuch, „effektive Prozeduren" zu formalisieren, zu einer grundlegenden Unzulänglichkeit bei Computern führte. Es gibt einige Aufgaben, die für Computer (vgl. Kapitel 59) genauso unmöglich sind wie für Mathematiker.

Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Gödel-Nummern der ganzen Zahlen 0, 1, 2 und 3.

2. Ist es möglich, daß zwei unterschiedliche Ausdrücke dieselbe Gödel-Nummer besitzen? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an. Falls nein, erklären Sie die Unmöglichkeit.

3. Worin besteht der Unterschied zwischen unserem Beweis des Gödelschen Satzes und einem Beweis in dem formalen arithmetischen System? Kann unser Beweis jemals als Beweis in diesem System ausgedrückt werden?

Literatur

S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics.* Elsevier Science, New York, 1971.

R. M. Smullyan. *Logik-Ritter und andere Schurken.* Fischer Taschenbuch, Frankfurt, 1991.

R. M. Smullyan. *Satan, Cantor und die Unendlichkeit.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.