40.

Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green

C. R. Congrès Int. des Math. Oslo (1937) II, 62–63

L'autre jour je vous ai indiqué une intégration du type hyperbolique. Dans le même ordre d'idées on peut aussi considérer une intégration du type elliptique. Ω étant l'espace à n dimensions et r_{PQ} désignant la distance euclidienne des points P et Q, nous posons, pour $\alpha > 0$,

$$I^\alpha f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_\Omega f(Q) r_{PQ}^{\alpha-m} \, dQ; \quad H_m(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} 2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)}.$$

On a $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta} (\alpha + \beta < m)$ et $\Delta I^{\alpha+2} = -I^\alpha$, Δ désignant l'opérateur de Laplace. C'est la valeur $\alpha = 2$ qui donne le potentiel newtonien, sauf pour $m = 2$, où un passage à la limite facile conduit au potentiel logarithmique. En remplaçant $f(Q)\,dQ$ par une différentielle de Stieltjes, on peut aussi considérer des potentiels de la forme

$$v(P) = \int_F r_{PQ}^{\alpha-m} \, d\mu(Q),$$

F étant un ensemble fermé. Dans sa Thèse, M. Frostman a étudié la capacité des ensembles par rapport à ces potentiels et, sous la condition indispensable $\alpha \leqq 2$, il a démontré l'existence du potentiel d'équilibre pour tout ensemble fermé de capacité positive. De ce résultat de M. Frostman, on déduit par la transformation de Kelvin l'existence d'une distribution unique μ_M telle que la fonction de Green

$$G_M(P) = r_{MP}^{\alpha-m} - \int_F r_{PQ}^{\alpha-m} \, d\mu_M(Q)$$

s'annule en tout point de F, sauf peut-être dans un ensemble de capacité nulle. Une différence essentielle entre le cas newtonien et le cas $\alpha < 2$, c'est que, dans le dernier cas, la masse se répartit — dans un sens facile à préciser — sur l'ensemble F tout entier et non seulement sur sa frontière. Un probléme central est de donner les conditions pour qu'une fonction donnée sur un ensemble F puisse s'écrire comme potentiel de masses portées par cet ensemble. Nous arrivons dans cet ordre d'idées à une extension naturelle des fonctions surharmoniques (sousharmoniques).

Un résumé assez complet de ces recherches va paraître dans les *Acta Szeged.*

M. Riesz et al., *Collected Papers*, Springer Collected Works in Mathematics,
DOI: 10.1007/978-3-642-37535-4_36, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1988