Teil E
Störungsmethoden II (Singuläre Störungsprobleme)

Einleitung

Entsprechend den Regeln, die wir im Abschnitt 14.10 dargelegt haben, geht man bei einer Störungsrechnung zunächst von den in dimensionsloser Form geschriebenen Grundgleichungen aus, wobei zum Dimensionslosmachen der abhängigen und unabhängigen Variablen Werte verwendet werden, die für das jeweilige Problem typisch sind. Die asymptotische Entwicklung nach einem als klein angenommenen (dimensionslosen!) Parameter führt dann zu einem System von „Störgleichungen", von denen man hoffen kann, daß sie sich – schrittweise – einfacher lösen lassen als die ursprünglichen Ausgangsgleichungen.

Leider erweisen sich die auf diesem „klassischen" oder „regulärem" Weg erhaltenen Lösungen oft als *nicht gleichmäßig gültig* (vgl. Abschnitt 14.7): Die Lösung – und damit auch die zugrunde liegende asymptotische Entwicklung – versagt insofern, als sie die physikalischen Vorgänge in *gewissen räumlichen oder zeitlichen Bereichen* offensichtlich nicht – oder zumindest nicht richtig – zu beschreiben vermag. Mathematisch kommt ein solches Versagen in der Regel darin zum Ausdruck, daß die bei der asymptotischen Entwicklung a priori getroffenen Annahmen über die Größenordnungsverhältnisse in den kritischen Bereichen nicht zutreffen: Terme zweiter Ordnung werden dort beispielsweise größer als Terme erster Ordnung, oder Ableitungen einer Größe werden sehr groß gegen die Größe selbst usw.

Störungsprobleme, die bei einer klassischen Behandlung zu nicht gleichmäßig gültigen Entwicklungen führen, werden – im Gegensatz zu „regulären" Störungsproblemen – als „singuläre" Störungsprobleme bezeichnet. Aus dieser nicht sehr treffenden aber weitgehend eingebürgerten Bezeichnung darf man jedoch nicht schließen, daß derartige Störungsprobleme nur in mehr oder minder seltenen Ausnahmefällen vorkommen; eher das Gegenteil ist der Fall. Die Fortschritte der theoretischen Strömungslehre in den letzten Jahrzehnten gehen zu einem guten Teil darauf zurück, daß nach den Ursachen für das Versagen klassischer Störungsrechnungen gefragt und Abhilfen gefunden wurden. In anderen Zweigen der Naturwissenschaften, sofern in ihnen nichtlineare Differentialgleichungen eine wesentliche Rolle spielen, liegen die Verhältnisse ähnlich.

Im folgenden sollen drei besonders wichtige Methoden, die zur Behandlung singulärer Störungsprobleme in Frage kommen, vorgestellt werden. Dabei werden wir uns auf das für die jeweilige Methode Wesentliche beschränken; bezüglich eines Überblicks über die zahlreichen Varianten und Modifikationen der hier behandelten Methoden sei auf die Spezialliteratur, z. B. *Nayfeh* (1973) verwiesen.

20. Methode der Koordinatenstörung (Analytisches Charakteristikenverfahren)

20.1. Das Versagen der klassischen Linearisierung bei Wellenausbreitungsvorgängen

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen, durch welche Wellenausbreitungsvorgänge beschrieben werden, haben oft die Eigenschaft, daß die nichtlinearen Ausdrücke sehr klein werden, wenn ein gewisser Parameter sehr kleine Werte annimmt („schwache Nichtlinearitäten"). Als ein typisches der Strömungslehre (vgl. z. B. Übungsaufgabe 1), sondern in verschiedensten Gebieten der Physik