LANGAGES ALGEBRIQUES DETERMINISTES ET GROUPES ABELIENS

J-F. PERROT
J. SAKAROVITCH

Le présent travail s'inscrit dans le cadre d'une étude d'ensemble sur les monoïdes syntactiques des langages algébriques (ou "context-free") dont on trouvera les premiers résultats en [6] et [7] . Nous présentons ici un résultat relatif au caractère déterministe ou non des langages algébriques dont le monoïde syntactique est un groupe abélien.

I . INTRODUCTION

Rappelons que le monoïde syntactique d'un langage L sur un alphabet X est par définition le quotient du monoïde libre X^* par sa congruence la plus grossière saturant L, (congruence syntactique), laquelle peut être ainsi caractérisée : deux mots u et $v \in X^*$ ont même image dans le monoïde syntactique de L ssi, pour tout couple $(f, g) \in X^* \times X^*$, on a $f\,u\,g \in L \Leftrightarrow f\,v\,g \in L$.

La théorie des monoïdes syntactiques, fondée en 1955 par M.P.Schützenberger pour rendre compte de certaines propriétés combinatoires des monoïdes libres, a été développée principalement pour les langages rationnels (ou "regular events"), qui sont caractérisés par le fait que leurs monoïdes syntactiques sont finis (Théorème de Kleene). Les succès remportés dans cette direction (langages "star-free", théorie de Krohn et Rhodes), grâce à l'interprétation naturelle du monoïde syntactique comme monoïde de transitions de l'automate réduit acceptant le langage, incitent à étendre la théorie aux autres classes de langages, notamment à celles de la hiérarchie de Chomsky (cf. par exemple Smith [8]). Cette entreprise offre de nombreuses difficultés et les résultats obtenus à ce jour sont très fragmentaires, même si on se limite à la classe des langages algébriques.

II . PRESENTATION DU RESULTAT

Un langage algébrique L étant toujours pris sur un alphabet fini, son monoïde syntactique $\underline{M}(L)$ est toujours finiment engendré. Si $\underline{M}(L)$ est un groupe abélien, il est donc, d'après la théorie classique, isomorphe au produit direct $F \times Z^k$ d'un groupe abélien fini F par un groupe abélien libre Z^k, lui-même isomorphe au produit direct de k exemplaires du groupe additif Z des entiers, pour un certain entier k positif ou nul : nous dirons que le rang du groupe considéré est k. Notre résultat principal s'énonce ainsi :

Théorème 1 : Soit L un langage algébrique dont le monoïde syntactique est un groupe abélien, et soit k le rang de ce groupe. Alors L est nécessairement déterministe si $k \leqslant 1$ et non-déterministe si $k \geqslant 2$.

Notons que, pour tout groupe abélien finiment engendré G, de rang k, il existe effectivement des langages algébriques admettant G comme monoïde syntactique : on peut notamment en construire par récurrence sur k à partir de langages rationnels (admettant F comme monoïde syntactique) et de langages algébriques dont le monoïde syntactiques est isomorphe à Z (p. ex. sur l'alphabet $X = \{x, y\}$, le langage de Dyck $\{w \in X^* \ |w|_x = |w|_y\}$).

Cette construction est possible en vertu du fait que, si les monoïdes syntactiques de deux langages algébriques L_1 et L_2 n'ont pas de zéro, il existe un langage algébrique L_3 dont le monoïde syntactique est isomorphe au produit $\underline{M}(L_1) \times \underline{M}(L_2)$. On sait par ailleurs que le produit direct de deux monoïdes syntactiques de langages algébriques n'est pas toujours lui-même isomorphe au monoïde syntactique d'un autre langage algébrique, de sorte que pour la construction précédente l'hypothèse que $\underline{M}(L_1)$ et $\underline{M}(L_2)$ n'ont pas de zéro n'est pas superflue [6]. Dans le même sens, on doit à E. Valkema la remarque suivante :

Proposition [9] : Soient L_1 et L_2 deux langages algébriques déterministes : il existe un langage algébrique L_3 dont le monoïde syntactique est isomorphe au produit direct $\underline{M}(L_1) \times \underline{M}(L_2)$.

Notre résultat montre, en prenant $G = Z \times Z$, que le langage L_3 peut être obligatoirement non-déterministe, d'où le

Corollaire : La classe des monoïdes syntactiques de langages algébriques déterministes n'est pas fermée par produit direct.

III . DISCUSSION DU RESULTAT

a) Bien que la famille des langages algébriques déterministes soit fermée par passage au complémentaire, il n'est pas possible de caractériser ces langages par leurs monoïdes syntactiques, même à l'intérieur de la famille des langages algébriques : on observe en effet, avec $X = \{x, y\}$, que le langage non-déterministe $\{x^n y^n \ ; \ n \geqslant 1\} \cup \{x^n y^{2n} \ ; \ n \geqslant 1\}$ et le langage déterministe $\{x^n y^n \ ; \ n = 2p, \ p \geqslant 1\} \cup \{x^n y^{2n} \ ; \ n=2p+1, \ p \geqslant 1\}$ ont tous deux le même monoïde syntactique, isomorphe au quotient de Rees du monoïde X^* par son idéal bilatère $X^*yx X^*$.

b) Il reste que certains monoïdes sont ainsi faits que, L étant un langage admettant le monoïde en question comme monoïde syntactique, l'hypothèse que L est algébrique (hypothèse de nature combinatoire dans le monoïde libre) entraîne automatiquement des restrictions supplémentaires.

Le groupe additif Z et les groupes abéliens de rang 1 ne sont pas les seuls pour lesquels L supposé algébrique doit de plus être déterministe : la même démonstration donne cette propriété au groupe diédral infini, produit libre de deux groupes d'ordre 2.

De même, d'autres monoïdes que les groupes abéliens de rang $\geqslant 2$ sont tels que le langage L algébrique est obligatoirement non-déterministe : c'est notamment le cas, d'après la remarque de E. Valkema rappelée ci-dessus, pour tout monoïde M dont le carré par produit direct $M \times M$ n'est monoïde syntactique d'aucun langage algébrique (un tel monoïde contient nécessairement un zéro ; un exemple est donné en [6]) .

c) Signalons enfin que dans notre résultat c'est effectivement le non-déterminisme qui est en cause, et non l'ambiguïté inhérente, propriété plus forte, comme on aurait pu le supposer au vu des techniques de preuve employées, qui font appel aux propriétés des "paires itérantes " . Il existe en effet des langages algébriques non-ambigus dont le complémentaire est algébrique non-ambigu, et admettant Z^2 comme monoïde syntactique.

Par exemple sur l'alphabet $X = \{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$ considérons le langage $L = L' \cup L''$, avec

$$L' = \{w \in X^* \ ; \ |w|_x = |w|_{\bar{x}} \quad \text{et} \quad |w|_y - |w|_{\bar{y}} \ \text{impair}\}$$

$$L'' = \{w \in X^* \ ; \ |w|_y = |w|_{\bar{y}} \quad \text{et} \quad |w|_x - |w|_{\bar{x}} \ \text{impair}\}$$

L' et L" étant disjoints, l'un et l'autre déterministes (leurs monoïdes syntactiques sont isomorphes à $Z \times Z/2Z$) le langage L est lui même non-ambigu (mais aussi non-déterministe), et son monoïde syntactique est isomorphe à Z^2 .

On vérifie que $\overline{L}$ le complémentaire de L peut s'écrire

$\overline{L} = L_1 \cup L_2 \cup R_1 \cup R_2$ avec

$$R_1 = \{w \in X^*; |w|_x - |w|_{\bar{x}} \text{ pair et } |w|_y - |w|_{\bar{y}} \text{ pair}\}$$

$$R_2 = \{w \in X^*; |w|_x - |w|_{\bar{x}} \text{ impair et } |w|_y - |w|_{\bar{y}} \text{ impair}\}$$

$$L_1 = \{w \in X^*; |w|_x \neq |w|_{\bar{x}} \text{ et } |w|_x - |w|_{\bar{x}} \text{ pair et } |w|_y - |w|_{\bar{y}} \text{ impair}\}$$

$$L_2 = \{w \in X^*; |w|_y \neq |w|_{\bar{y}} \text{ et } |w|_y - |w|_{\bar{y}} \text{ pair et } |w|_x - |w|_{\bar{x}} \text{ impair}\}$$

Ces quatres langages sont disjoints deux à deux ; R_1 et R_2 sont rationnels donc non-ambigus, L_1 et L_2 sont déterministes (monoïde syntactique $Z \times Z/2Z$) donc non-ambigus eux aussi. Leur réunion est algébrique non-ambiguë.

IV . PREUVE DU THEOREME 1

a) Méthode

Etant donné un monoïde M, tout langage L dont le monoïde syntactique est isomorphe à M est de la forme $L = \varphi^{-1}(P)$, où φ est un homomorphisme du monoïde libre engendré par l'alphabet du langage sur M et où P est une partie disjonctive de M, i.e. un sous-ensemble qui n'est saturé par aucune autre congruence de M que l'égalité, (la congruence syntactique de P dans M est l'égalité) , ce qui se traduit par : pour $m', m'' \in M$, $m' \neq m''$ entraîne l'existence de $p,q \in M$ vérifiant soit $pm'q \in P$ et $pm''q \notin P$, soit $pm'q \notin P$ et $pm''q \in P$.
Il est essentiel de constater que le caractère algébrique (resp. algébrique déterministe) du langage L ne dépend pas de l'homomorphisme φ, mais seulement de la partie P, en vertu du Lemme suivant, conséquence directe de la liberté des monoïdes en question :

<u>Lemme</u> [7] : <u>Etant donné un monoïde M, une partie quelconque</u> $P \subset M$, <u>deux homomorphismes</u> φ_1 <u>et</u> φ_2 <u>de deux monoïdes libres</u> X_1^* <u>et</u> X_2^* <u>sur</u> M, <u>en notant</u> $L_1 = \varphi_1^{-1}(P)$ <u>et</u> $L_2 = \varphi_2^{-1}(P)$, <u>il existe deux homomorphismes</u> ζ et θ, $\zeta : X_1^* \to X_2^*$ <u>et</u> $\theta : X_2^* \to X_1^*$ <u>vérifiant</u> $\zeta^{-1}(L_2) = L_1$ <u>et</u> $\theta^{-1}(L_1) = L_2$

Les caractères des langages qui nous intéressent sont en effet conservés par homomorphisme inverse.

Notre méthode de preuve consiste donc à <u>choisir un alphabet X</u> et un homomorphisme φ "adaptés à la structure" du monoïde M considéré, en l'occurrence un groupe abélien G, et à montrer que, pour une partie P (disjonctive) quelconque de G, l'image inverse $L = \varphi^{-1}(P)$ ne peut être algébrique sans être aussi déterministe (ou non-déterministe).

b) <u>Groupes de rang $\leqslant 1$</u>

Si le rang de G est nul, G est fini et le langage L est rationnel, donc déterministe.

Si G est de rang 1, il est de la forme $G = \mathbb{Z} \times F$ où F est fini. La première partie du théorème résulte alors de la proposition suivante, un peu plus générale :

<u>Proposition</u> : <u>Soit</u> F <u>un groupe fini et</u> G <u>le produit direct</u> $G = \mathbb{Z} \times F$; <u>Soit</u> φ <u>un homomorphisme d'un monoïde libre</u> X^* <u>sur</u> G <u>et</u> $L = \varphi^{-1}(P)$ <u>l'image inverse d'une partie quelconque</u> P <u>de</u> G . <u>Si</u> L <u>est algébrique alors</u> L <u>est déterministe</u> .

Conformément à a) nous choisissons $X = \{x, \bar{x}\} \cup Y$, où Y est un alphabet quelconque ne contenant ni x ni $\bar{x}$ et doté d'un homomorphisme ψ envoyant Y^* **sur** F , et nous définissons $\varphi : X^* \to G$ par

$$\varphi(x) = (1, e_F)$$
$$\varphi(\bar{x}) = (-1, e_F)$$

e_F désignant l'élément neutre de F.

$$\varphi(y) = (0, \psi(y)) \quad \text{pour } y \in Y.$$

Notons π la projection de X^* sur $\{x, \bar{x}\}^*$ définie par $\pi(x) = x$, $\pi(\bar{x}) = \bar{x}$ et $\pi(y) =$ le mot vide. La première composante de l'image par φ

d'un mot w de X^* est un entier n ou $-n$ suivant que l'image inverse $\varphi^{-1}(\varphi(w))$ contient un mot "réduit" dont la projection par π est x^n ou $\bar{x}^n$.

Pour $g \in F$, désignons par R_g l'ensemble $\varphi^{-1}(Z, g)$ des mots de X^* dont l'image dans G a g pour 2e composante : R_g est une partie rationnelle de X^*. Considérons alors $L_g = \{ u \in \{x, \bar{x}\}^* \; ; \; \varphi(u).(0,g) \in P\}$

On a $L_g = \pi(L \cap R_g)$, L_g est donc une partie algébrique de $\{x, \bar{x}\}^*$ et l'ensemble des mots réduit $K_g = L_g \cap (x^* \cup \bar{x}^*)$ est donc union d'une partie algébrique de x^* (donc rationnelle) et d'une partie algébrique de $\bar{x}^*$ (donc également rationnelle), il est rationnel ainsi que l'ensemble $\bar{K}_g$ qui s'en déduit par échange de x et $\bar{x}$ (passage à l'image opposée).

Désignons enfin par r_g un mot quelconque de X^* dont l'image $\varphi(r_g)$ est $(0,g)$.

On vérifie immédiatement, en calculant dans G, qu'un mot $w \in X^*$ est dans L ssi, pour au moins un $g \in F$ on a $\pi(wr_g) \in L_g$, ce qui a lieu ssi un mot réduit $k \in \bar{K}_g$ vérifie $\varphi(w\, r_g k) = (0, e_F)$. Désignons, suivant [3], par L/R le langage $L/R = \{u \; ; \; \exists\, v \in R$ tel que $u\,v \in L\}$.

En posant $K = \cup \{\bar{K}_g\, r_g \; ; \; g \in F\}$, et $D = \varphi^{-1}(0,e_F)$, nous obtenons

$$L = \{ w \in X^* \; ; \; \exists\, k \in K, \; w\,k \in D\} \text{ , soit } L = D/K .$$

D'après le corollaire 2 du Théorème 3.4 de [2] on a : K étant rationnel, L est déterministe si D est lui-même déterministe. Il suffit alors d'observer que $D = \hat{D} \cap R_e$, où $R_e = \varphi^{-1}(Z, e_F)$ est rationnel et $\hat{D} = \{ w \in X^* \; ; \; |w|_x = |w|_{\bar{x}} \}$ est bien connu pour être déterministe (langage de Dyck), pour établir la proposition.

Remarque : Le même résultat reste vrai en remplaçant Z par le groupe diédral infini, engendré par deux éléments x et y avec pour seules relations de définition $x^2 = y^2 = e$, ce qui montre que c'est moins la commutativité que la "maigreur" de Z qui est en cause. Il suffit pour le voir de reprendre la démonstration précédente en observant que l'ensemble des "mots réduits" est alors $(xy)^* \cup (yx)^* \cup y(xy)^* \cup x(yx)^*$ qui, comme $x^* \cup \bar{x}^*$ ne peut contenir de partie algébrique qui ne soit rationnelle. Le langage $\hat{D}$ est alors un langage de Dyck généralisé [2].

c) Une propriété d'itération des langages algébriques déterministes

La démonstration de la partie réciproque du théorème 1 repose sur une propriété des "paires itérantes" d'un langage algébrique déterministe, propriété dont la preuve est donnée en [7].

Etant donné un langage L sur l'alphabet X, on note $\equiv_L$ l'équivalence régulière droite la plus grossière de X^* qui sature L.

On a $p \equiv_L q \Leftrightarrow \{ \forall v \in X^* \quad p v \in L \Leftrightarrow q v \in L \}$

Définition Soit L un langage sur l'alphabet X.

On appelle paire itérante du mot f dans L un quintuplet $\pi = (\alpha, u, \beta, v, \gamma)$ de X^{*5} tel que

i) $f = \alpha u \beta v \gamma$

ii) $|uv| \geqslant 1$

iii) $\forall n \in N \quad \alpha u^n \beta v^n \gamma \in L$

On appelle paire itérante déterministe du mot f dans L un quintuplet $\pi = (\alpha, u, \beta, v, \gamma)$ de X^{*5} tel que

i) $f = \alpha u \beta v \gamma$

ii) $|uv| \geqslant 1$

iii) $V n \in N \quad \alpha u^n \beta v^n \gamma \equiv_L \alpha u \beta v \gamma$

On appellera n-ième itéré de π le mot $f_n = \alpha u^n \beta v^n \gamma$.

Exemple : Soient $L = \{a^p b^q ; p,q \in N \quad p \neq q \}$ et le mot $f = a^3 b^4$. $\pi_1 = (a, a, ab, b, b^2)$, $\pi_2 = (a, a, ab, b^2, b)$, et $\pi_3 = (1, a^3, b, b, b^2)$ sont trois paires itérantes de f dans L. π_1 et π_2 sont des paires itérantes déterministes de f dans L, mais π_3 ne l'est pas.

L'existence d'au moins une paire itérante dans tout mot suffisamment long d'un langage algébrique est assurée par les résultats classiques de Bar-Hillel, Perles et Shamir, et d'Ogden ; Boasson [1] a entamé une étude systématique de ce phénomène, nous nous inspirons ici de ses méthodes. Nos "paires itérantes déterministes" sont essentiellement une généralisation des paires itérantes mises en évidence par Ogden [5] et Harrison et Havel [4] dans les langages déterministes.

Définition Soit L un langage sur l'alphabet X.

Un mot f de X^* admet un couple de paires itérantes déterministes disjointes dans L, $C = (\pi_1, \pi_2)$ - $\pi_2 = (\alpha_1, u_1, \beta_1, v_1, \gamma_1)$ et $\pi_2 = (\alpha_2, u_2, \beta_2, v_2, \gamma_2)$ - Si, et seulement si,

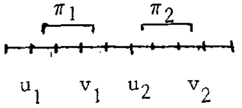
i) $f = \alpha_1 u_1 \beta_1 v_1 \gamma_1 = \alpha_2 u_2 \beta_2 v_2 \gamma_2$

ii) les occurrences des quatre facteurs u_1, v_1, u_2 , v_2 sont disjointes dans f deux à deux.

iii) en désignant par $f_{n,m}$ le mot obtenu en prenant simultanément le n-ième itéré de π_1 et le $n^{\text{ième}}$ itéré de π_2 - d'après ii) cela est possible - on a

$$\forall n,m \in N \qquad f_{n,m} \equiv_L f.$$

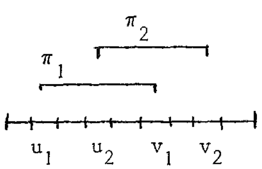
Le couple C est dit de <u>type 1</u> si on a $|\alpha_1\ u_1\ \beta_1\ v_1| \leqslant |\alpha_2|$ c'est à dire si f peut se représenter schématiquement ainsi :



C est dit de <u>type 2</u> si on a

$$|\alpha_1\ u_1| \leqslant |\alpha_2| \leqslant |\alpha_2\ u_2| \leqslant |\alpha_1\ u_1\ \beta_1| \leqslant |\alpha_1\ u_1\ \beta_1\ v_1| \leqslant |\alpha_2\ u_2\ \beta_2|$$

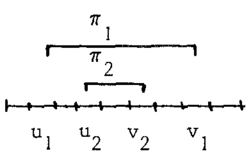
Soit schématiquement



C est dit de type 3 si on a

$$|\alpha_1\ u_1| \leqslant |\ \alpha_2\ u_2\ \beta_2\ v_2| \leqslant |\alpha_1\ u_1\ \beta_1|$$

Soit schématiquement



On appellera <u>éléments itérants</u> de C l'ensemble des occurrences des quatre facteurs $\{u_1, v_1, u_2, v_2\}$.

<u>Exemples</u> Soit $L_1 = \{a^p b^q c^r d^s \ / \ p,q,r,s \in N \qquad p + q = r + s\}$

Le mot f = abcd admet dans L_1 le couple de paires itérantes déterministes disjointes de type 2 $C = (\pi_1, \pi_2)$ avec $\pi_1 = (a, b, c, d, 1)$ et $\pi_2 = (1, a, b, c, d)$. Il admet aussi dans L_1 le couple de type 3

$C' = (\pi'_1 , \pi'_2)$ avec $\pi'_1 = (1, a, bc, d, 1)$ et $\pi'_2 = (a, b, 1, c, d)$.

Soit $L_2 = \{a^p b^q c^r d^s \ / \ p,q,r,s \in N \quad p+r = q+s\}$. Le même mot $f = a\,b\,c\,d$ admet dans L_2 le couple $C = (\pi_1, \pi_2)$ précédent. Il n'admet pas dans L_2 le couple C' mais le couple de type 1 $C'' = (\pi''_1, \pi''_2)$ avec $\pi''_1 = (1, a, 1, b, cd)$ et $\pi''_2 = (ab, c, 1, d, 1)$.

Ces trois couples admettent les mêmes éléments itérants $\{a, b, c, d\}$

<u>Définition</u> Soient C un couple de paires itérantes déterministes disjointes d'un mot f dans un langage L et $\{u_1, v_1, u_2, v_2\}$ ses éléments itérants .

Soient $f_{n,m}$ un itéré de f et C' un nouveau couple de paires itérantes déterministes disjointes de $f_{n,m}$ dans L. C' est dit <u>déduit</u> de C si ses éléments itérants sont $\{u_1^h, v_1^h, u_2^k, v_2^k\}$ pour deux entiers h et k.

Dans les exemples précédents, si on considère le langage L_1, le couple C' est déduit de C (et réciproquement d'ailleurs) . Si on considère le langage L_2 les couples C et C'' sont déduits l'un de l'autre.

Nous pouvons maintenant donner la propriété annoncée :

Théorème 2 [7] <u>Soit L un langage algébrique déterministe et soit C un couple de paires itérantes déterministes disjointes de type 2 dans L. Alors il existe un couple C' , déduit de C et de type 1 ou de type 3</u>.

Ainsi on a trouvé C' déduit de C dans L_1 et C'' déduit de C dans L_2 dans nos exemples.

Soit $L_3 = \{a^p b^q c^r d^s \ / \ p, q, r, s \in N \quad p = r \quad \text{ou} \quad q = s\}$

Dans L_3 le mot $f = abcd$ admet toujours le couple $C = (\pi_1, \pi_2)$

Il est facile de vérifier qu'il n'existe pas dans L_3 de couple de type 1 ou 3 . Il est d'ailleurs bien connu que L_3 n'est pas déterministe (puisqu'ambigu) .

d) <u>Groupes de rang $\geqslant 2$</u>

On peut écrire $G = Z^2 \times T$ avec $T = Z^{k-2} \times F$. Comme en b) nous choisissons $X = \{x, \bar{x}, y, \bar{y}\} \cup Y$ où Y est un alphabet quelconque ne contenant aucune des lettres $\{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$ et doté d'un homomorphisme ψ envoyant Y^* sur T et nous définissons $\varphi : X^* \to G$ par

$\varphi(x) = (1, 0, e_T)$ $\qquad$ $\varphi(y) = (0, 1, e_T)$

$\varphi(\overline{x}) = (-1, 0, e_T)$ $\qquad$ $\varphi(\overline{y}) = (0, -1, e_T)$

et $\varphi(y) = (0, 0, \psi(y))$ pour $y \in Y$ e_T désignant l'élément neutre de F.

Soient P une partie quelconque de G et $L = \varphi^{-1}(P)$.

On va supposer que L est une langage algébrique déterministe sur l'alphabet X et on va en déduire que P <u>n'est pas</u> une partie disjonctive de G ; et le théorème 1 sera enfin démontré. Comme G est un groupe, P n'est pas une partie disjonctive si, et seulement si, il existe un sous-groupe de G, nécessairement distingué puisque G est abélien, tel que P est union de cosets de ce sous-groupe.

Le mot $f = x\, y\, \overline{x}\, \overline{y}$ admet le couple $C = (\pi_1, \pi_2)$de paires itérantes déterministes disjointes de type 2 dans L, avec $\pi_1 = (1, x, y, \overline{x}, \overline{y})$ et $\pi_2 = (x, y, \overline{x}, \overline{y}, 1)$. En effet

(1) $\forall n, m \in N \qquad \forall\, v \in X^* \quad x\, y\, \overline{x}\, \overline{y}\, v \in L \;\Leftrightarrow\; x^n\, y^m\, \overline{x}^{\,n}\, \overline{y}^{\,m}\, v \in L$

puisque

(2) $\forall n, m \in N \qquad \forall\, v \in X^* \quad \varphi(x\, y\, \overline{x}\, \overline{y}\, v) = \varphi(x^n y^m\, \overline{x}^{\,n}\, \overline{y}^{\,m}\, v) = \varphi(v)$

D'après le théorème 2 il existe un itéré $f_{n,m} = x^n\, y^m\, \overline{x}^{\,n}\, \overline{y}^{\,m}$ qui admet dans L un couple C' déduit de C, de type 1 ou de type 3 .

Supposons d'abord $C' = (\pi'_1 , \pi'_2)$ de type 1 . On peut écrire

$\pi'_1 = (x^{x-h}, x^h, 1, y^k, y^{m-k}\, \overline{x}^{\,n}\, \overline{y}^{\,m}),$

$\pi'_2 = (x^n\, y^m\, \overline{x}^{\,n-h}, \overline{x}^{\,h}, 1, \overline{y}^{\,k}, \overline{y}^{\,m-k}).$

On a vu que $\forall\, w \in X^* \qquad w \in L \Leftrightarrow f_{n,m}\, w \in L$

donc, d'après la définition d'un couple de paires itérantes déterministes disjointes de $f_{n,m}$ dans L on a

(3) $\forall p, q \in N \qquad \forall\, w \in X^* \qquad w \in L \;\Leftrightarrow\; x^{n+ph}\, y^{m+pk}\, \overline{x}^{\,n+qh}\, \overline{y}^{\,m+qk} w \in L$

Soit, en passant aux images dans G par φ,

(4) $\forall z \in Z$ $\forall (z_1, z_2, t) \in G$ $(z_1, z_2, t) \in P \Leftrightarrow (z_1+zh, z_2+zk, t) \in P$
c'est à dire que P est saturé modulo le sous-groupe de G engendré par l'élément (h, k, 0).

Le cas où C' est de type 3 se traite de manière analogue. On trouve alors que P est saturé modulo le sous-groupe de G engendré par l'élément (h, -k, 0).
Q.E.D.

Remarque : Dans cette démonstration, le fait que T est un groupe n'intervient pas. On peut également prouver la première partie du théorème sans cette hypothèse, par une technique différente de celle que nous avons donnée ici [7], d'où un résultat final plus général que celui que nous avons annoncé.

B I B L I O G R A P H I E

[1] L. BOASSON, Paires itérantes et langages algébriques, Thèse Sc. Math. , Univ. Paris VII, 1974.

[2] Y. COCHET et M. NIVAT, Une généralisation des ensembles de Dyck, Israël J. Math. 9 (1971) 389-395.

[3] S. GINSBURG et S. GREIBACH, Deterministic Context free Languages, Inf. and Control 9 (1966) 620-648.

[4] M. HARRISON et I. HAVEL, On the Parsing of Deterministic Languages, J. Assoc. Comput. Mach. 21 (1974) 525-548

[5] W. OGDEN, Intercalation Theorems for Push-down Store and Stack Languages, Ph. D. Thesis, Stanford 1968.

[6] J-F. PERROT, Monoïdes syntactiques des langages algébriques, à paraître dans les Actes de l'Ecole de Printemps sur les Langages algébriques, Bonascre 1973.

[7] J. SAKAROVITCH, Monoïdes syntactiques et langages algébriques, Thèse de 3ème cycle, Paris, à paraître en 1975.

[8] J. SMITH, Monoid acceptors and their relation to formal languages, Ph.D. Thesis, University of Pennesylvania, 1972.

[9] E. VALKEMA, Zur Charakterisierung formuler Sprachen durch Halbgruppen, Dissertation, Kiel 1974.