

ESTIMATION DE PARAMETRES DISTRIBUES
DANS DES EQUATIONS AUX DERIVEES
PARTIELLES

G. CHAVENT

(Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique
et Université Paris IX - Dauphine)

La méthode présentée ici est conçue spécialement pour l'estimation de paramètres distribués dans des systèmes distribués. Elle utilise la théorie moderne du contrôle dans des espaces de fonctions, et consiste à minimiser un critère d'erreur (non quadratique en les paramètres) par une méthode de gradient ordinaire. Les avantages de cette façon de procéder sont les suivants :

- il n'est pas besoin de supposer que l'on connaît une forme algébrique des fonctions paramètres pour calculer le gradient par rapport à cette fonction.
- lorsqu'on désire tester diverses formes algébriques (chacune ne contenant que quelques paramètres inconnus), il suffit de modifier quelques cartes dans le programme, dont l'architecture reste inchangée.
- le calcul de ce gradient ne nécessite que la résolution de deux équations aux dérivées partielles, même lorsque l'inconnue est une fonction.
- la méthode est utilisable même si l'on ne possède que peu de points de mesures en temps ou en espace

Nous donnons des applications à l'estimation de fonctions des variables d'espace (dans des nappes d'eau et de pétrole) et à l'identification d'une fonction dépendant de la solution du système.

Communication présentée au Colloque International sur les Méthodes de Calcul Scientifique et Technique I.R.I.A., le Chesnay, 17-21 décembre 1973.

I - INTRODUCTION

Le problème de l'estimation des paramètres peut être posé comme un problème de contrôle optimal dans lequel le contrôle serait le paramètre à estimer, et où la fonction coût serait un critère quadratique d'erreur entre les mesures et les sorties calculées par le modèle. Il était donc naturel de transposer à l'estimation de paramètres distribués dans des systèmes distribués les méthodes d'analyse fonctionnelle développées par J.L. LIONS ([1], [2]) pour le contrôle des systèmes distribués. La différence principale est que, dans notre cas, la fonctionnelle à minimiser n'est pas quadratique, de sorte que nombre de résultats de la théorie ne peuvent être transposés. Mais cette approche nous donne un algorithme de calcul du gradient, qui est systématique et efficace.

Au §II, nous rappelons quelques notations d'analyse fonctionnelle ; Au §III, nous esquissons la théorie ; Enfin le §IV donne trois applications numériques.

II - NOTATIONS

X et Y étant deux espaces de Banach, on notera :

X' et Y' les espaces duaux topologiques de X et Y

$\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y

$\| \cdot \|_X$ et $\| \cdot \|_Y$ les normes dans les espaces X et Y

si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ on notera par $A^* \in \mathcal{L}(Y', X')$ le transposé de A

$(\cdot, \cdot)_{X', X}$ sera utilisée pour la dualité entre X' et X

$(\cdot, \cdot)_X$ sera utilisée pour le produit scalaire dans X
(lorsque X est un Hilbert naturellement).

Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , on introduit les espaces de fonctions sur Ω suivants :

$\mathcal{C}(\Omega)$ = espace des fonctions continues sur Ω

$L^\infty(\Omega)$ = espace des fonctions p.p. bornées sur Ω

$L^2(\Omega)$ = espace des fonctions de carré Lebesgue intégrable

$H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \ i=1, 2, \dots, n \}$

$H^1_0(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \mid "u=0 \text{ sur le bord } \Gamma \text{ de } \Omega" \}$.

Dans tout le reste de l'article, on écrira dérivable pour Fréchet-Dérivable.

III - THEORIE

Supposons que les équations gouvernant notre système soient de forme connue. Seuls sont inconnus, (ou mal connus) un ensemble de paramètres, qui peuvent être

des nombres ou des fonctions.

L'équation d'état sera :

$$\psi(y, a) = f \quad (1)$$

où $(Y, \mathcal{A}$ et F étant des Banach) :

$y \in Y$ est l'état du système
 $a \in \mathcal{A}$ est l'ensemble des paramètres inconnus
 $f \in F$ est le 2ème membre de l'équation d'état
 ψ est une application connue de $Y \times \mathcal{A} \longrightarrow F$.

Nous supposons qu'il existe une partie ouverte $\mathcal{A}_c \subset \mathcal{A}$ telle que :

Pour tout $a \in \mathcal{A}_c$, l'équation (1) a une solution et une seule $y \in Y$.
 Nous noterons cette solution $y(a)$. } (2)

Remarque 1 : Le temps n'apparaît pas explicitement dans l'équation (1). Cependant, Y peut être un ensemble de fonctions du temps (cf par exemple les applications II et III) ; l'équation (1) contient donc aussi les systèmes dynamiques. ■

Pour estimer le paramètre a , il nous faut quelques informations supplémentaires sur le système (1). Introduisons pour cela un espace de Hilbert \mathcal{H} , qui sera notre espace des observations, et une application \mathcal{G} de Y dans \mathcal{H} . Bien que la théorie puisse être faite sans difficulté pour \mathcal{G} non linéaire, mais continument dérivable, nous supposons dans la suite pour des raisons de simplicité :

$$\mathcal{G} \in \mathcal{L}(Y; \mathcal{H}) \quad (3)$$

Appelons $a_0 \in \mathcal{A}_c$ la valeur exacte, mais inconnue des paramètres. L'observation consiste alors en un certain élément

$z \in \mathcal{H}$, supposé être une "mesure"
 de $\mathcal{G}_y(a_0)$ } (4)

On peut alors associer à tout paramètre $a \in \mathcal{A}_c$ une fonction coût $J(a)$ par :

$$J(a) = \|\mathcal{G}_y(a) - z\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall a \in \mathcal{A}_c \quad (5)$$

Remarque 2 : Si l'on considère l'observation comme la sortie du système, cette fonction coût n'est rien d'autre que l'écart quadratique entre les sorties calculées et mesurées. ■

Nous pouvons alors formuler ainsi notre problème d'identification :

$$\left. \begin{array}{l} \text{trouver } \hat{a} \in \mathcal{A}_{ad} \text{ tel que :} \\ J(\hat{a}) \leq J(a) \quad \forall a \in \mathcal{A}_{ad} \end{array} \right\} \quad (6)$$

où

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{A}_{ad} \text{ est l'ensemble de tous les paramètres admissibles,} \\ \text{que l'on suppose être une partie } \underline{\text{fermée}}, \text{ et généralement} \\ \underline{\text{bornée}} \text{ de } \mathcal{A}_c. \end{array} \right\} \quad (7)$$

On peut alors se poser au moins trois questions :

- i) Sous quelles conditions le problème (6) a-t-il au moins une solution ?
- ii) Sous quelles conditions le problème (6) a-t-il au plus une solution ?
- iii) Comment effectivement minimiser J ?

Il n'y a pas de réponse générale à la question i), tout au moins lorsque l'espace \mathcal{A} des paramètres est de dimension infinie. Lorsque \mathcal{A} est de dimension finie, on a le résultat suivant (trivial).

Proposition 1 : si :

$$\bullet \quad \psi \text{ est de classe } C^1 \text{ de } Y \times \mathcal{A}_c \longrightarrow F \quad (8)$$

$$\bullet \quad \forall (y, a) \in Y \times \mathcal{A}_c, \frac{\partial \psi}{\partial y}(y, a) \text{ est inversible} \quad (9)$$

$$\bullet \quad \mathcal{A}_c \text{ est de dimension finie}$$

$$\text{alors il existe au moins un } \hat{a} \in \mathcal{A}_{ad} \text{ qui minimise } J. \quad (10)$$

Démonstration : (2) (3) (8) et (9) et le théorème des fonctions implicites montrent que J est continue sur \mathcal{A}_c , et (7) et (10) entraînent que \mathcal{A}_{ad} est compact. ■

La question ii) est importante du point de vue des applications. En effet, s'il n'y a qu'une solution \hat{a} au problème (6), on peut espérer que, sous des hypothèses raisonnables, \hat{a} sera "voisin" de a_0 si z est "voisin de $\mathcal{E}_y(a_0)$ ". Malheureusement, il n'y a là encore aucun résultat général d'unicité. Le cas général serait plutôt le cas de non-unicité. Pour avoir alors une idée de la confiance que l'on peut avoir en \hat{a} , on minimise J à partir de diverses valeurs

initiales.

En ce qui concerne la question iii), nous avons heureusement des résultats qui nous permettront de calculer numériquement \hat{a} , même en l'absence de résultats théoriques d'existence et ou d'unicité.

La minimisation de J se fera par une méthode de gradient. Nous avons utilisé la méthode de steepest-descent ; En effet, la fonctionnelle J n'étant absolument pas quadratique, il n'est pas sûr que des méthodes plus élaborées (celles du gradient conjugué, ou de Fletcher Powell), utilisant le caractère supposé quadratique de la fonctionnelle, donnent un gain important (un test fait dans [5] entre steepest-descent et gradient conjugué les a mis à égalité. Mais si on le désire, n'importe quelle autre méthode utilisant le gradient peut être utilisée.

D'autre part, il faut choisir avec soin le mode de calcul du gradient de J. En effet, si a est une fonction, elle peut être représentée numériquement par sa valeur en de nombreux points, de telle sorte que le gradient de J peut avoir de nombreuses composantes (quelques centaines dans certaines applications) : le calcul de ce gradient par différences finies par exemple prendrait un temps prohibitif.

La réponse théorique est donnée par la

Proposition 2 : sous les hypothèses (8) et (9), la fonctionnelle J est de classe C^1 de $\mathcal{A}_c \rightarrow \mathbb{R}$. La dérivée $J'(a) \in \mathcal{A}'$ est donnée par :

$$J'(a) \cdot \delta a = \frac{\partial \psi}{\partial a}(y(a), a) \cdot \rho \quad \forall a \in \mathcal{A}_c, \quad \forall \delta a \in \mathcal{A} \quad (11)$$

où :

- $y(a) \in Y$ est l'état du système, solution de (1) avec la valeur a des paramètres inconnus
- $\rho \in F'$ est l'état adjoint, solution de :

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial y}(y(a), a) \cdot \rho = - 2 \mathcal{E}^* \Lambda (\mathcal{E}y(a) - z) \quad (12)$$

où Λ représente l'isomorphisme canonique de \mathcal{H} sur son dual \mathcal{H}' .

Démonstration.

D'après le théorème des fonctions implicites, l'application $a \rightarrow y$ définie par (1) est dérivable de $\mathcal{A}_c \rightarrow Y$, la dérivée en $a \in \mathcal{A}_c$ étant l'application qui, à $\delta a \in \mathcal{A}$ fait correspondre $\delta y \in Y$ solution de :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(y, a) \delta y = - \frac{\partial \psi}{\partial a}(y, a) \cdot \delta a \quad (12 \text{ bis})$$

La différentielle δJ du critère J défini en (5) correspondant à une variation δa du paramètre s'écrit donc :

$$\delta J = 2(\mathcal{E}y(a) - z, \mathcal{E} \delta y)_{\mathcal{H}}$$

c.a.d.

$$\begin{aligned} \delta J &= 2(\Lambda(\mathcal{E}y(a) - z), \mathcal{E} \delta y)_{\mathcal{H}, \mathcal{H}} \\ &= 2(\mathcal{E}^* \Lambda(\mathcal{E}y(a) - z), \delta y)_{Y, Y} \end{aligned}$$

c.a.d.

$$\begin{aligned} \delta J &= -(\frac{\partial \psi^*}{\partial y}(y, a) \cdot \rho, \delta y)_{Y, Y} \\ &= (\rho, -\frac{\partial \psi}{\partial y}(y, a) \cdot \delta y)_{F, F} \end{aligned}$$

ce qui donne bien (11) en utilisant (12 bis). ■

Voyons maintenant comment ce résultat nous permet pratiquement de calculer le gradient de la fonction J par rapport aux paramètres inconnus a . La formule (11) se réécrit :

$$\left. \begin{aligned} J'(a) \cdot \delta a &= (\rho, \frac{\partial \psi}{\partial a}(y(a), a) \cdot \delta a)_{F, F} \\ \forall a \in \mathcal{A} \text{ et } \forall \delta a \in \mathcal{A} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Nous distinguerons deux cas :

1er Cas Il y a un nombre fini m de paramètres inconnus a_1, a_2, \dots, a_m ,
c.a.d. $\mathcal{A} = \mathbb{R}^m$.

Alors le dual \mathcal{A}^i de \mathcal{A} peut être identifié à $\mathcal{A} = \mathbb{R}^m$ à l'aide du produit scalaire usuel. Et la formule (13) devient :

$$\left. \begin{aligned} J'(a) \cdot \delta a &= \sum_{j=1}^m \gamma_j \delta a_j \\ \forall \delta a &= (\delta a_1, \dots, \delta a_m) \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Au vu de la formule (14), on obtient les composantes du gradient de J par rapport au vecteur a :

$$\frac{\partial J}{\partial a_1}(a) = \gamma_1, \dots, \frac{\partial J}{\partial a_m}(a) = \gamma_m \quad (15)$$

2ème cas

Le paramètre inconnu est une fonction a de la variable u , prenant ces valeurs dans un domaine borné $D \subset \mathbb{R}^p$.

La variable u peut être une des variables indépendantes du problème (l'espace ou le temps par exemple, cf. les applications 1 et 2), mais peut aussi être une des variables dépendantes du problème (l'état du système par exemple, cf. l'application 3).

\mathcal{A} est alors un espace de dimension infinie et il n'y a alors plus, en général d'application de dualité de \mathcal{A} sur son dual \mathcal{A}' . Prenons par exemple le cas suivant :

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}(D).$$

Alors le gradient de J par rapport à a est dans \mathcal{A}' , qui est ici l'espace des mesures de Radon sur D , qui est bien plus "grand" que l'espace des fonctions continues sur D !

Heureusement, il se trouve que dans les applications pratiques, la mesure $J'(a)$ est de la forme $\gamma(u)du$, où γ est une fonction Lebesgue intégrable sur D . Dans ce cas, la formule (13) devient :

$$J'(a) \cdot \delta a = \int_D \gamma(u) \delta a(u) du \quad \forall \delta a \in \mathcal{A} \quad (17)$$

(cette formule est à comparer avec la formule (14) : la somme discrète a été remplacée par une intégrale).

Cette fonction $\gamma(u)$, lorsqu'elle existe, s'appelle la dérivée partielle fonctionnelle de J par rapport à la fonction a :

$$\frac{\partial J}{\partial a}(u) = \gamma(u) \quad \forall u \in D \quad (18)$$

(à comparer avec (15)).

Dans les deux cas, la proposition 2 nous permet de calculer d'un seul coup le gradient J par rapport à a (que ce gradient soit un vecteur $(\gamma_1 \dots \gamma_m)$ ou une fonction $\gamma(u)$) à l'aide de y, ρ et de la formule (13). Le calcul numérique de ce gradient ne nécessite donc que deux résolutions de systèmes : l'équation directe (1), l'équation adjointe (12), cette dernière étant toujours linéaire.

Remarque 3 : $\frac{\partial J}{\partial a}(u)$ est en général une fonction bien moins régulière que $a(u)$: on ne peut donc appliquer rigoureusement une méthode de gradient au cas continu ! ■

Remarque 4 : $\frac{\partial J}{\partial a}(u)$ est le gradient de J par rapport à la fonction a, sans aucune hypothèse sur la forme algébrique de cette fonction a.

Mais si pour des raisons physiques ou pratiques, on désire chercher a(u) sous la forme :

$$a(u) = \alpha(u, \beta_1 \dots \beta_k) \quad (19)$$

où $\alpha(u, \beta_1 \dots \beta_k)$ est une fonction connue de u et de k paramètres inconnus $\beta_1 \dots \beta_k$, il est immédiat de calculer $\frac{\partial J}{\partial \beta_j}$, $j=1,2,k$ à partir de $\Upsilon(u)$:

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_j}(\beta) = \int_D \Upsilon(u) \frac{\partial \alpha}{\partial \beta_j}(u, \beta_1 \dots \beta_k) du \quad j=1,2..k \quad (21) \blacksquare$$

Remarque 5 : Supposons qu'un programme ait été écrit en vue de l'identification de a en tant que fonction de u, sans aucune spécification de forme algébrique. A chaque itération de gradient, le programme modifie le paramètre a suivant (l'équivalent discret de) la formule :

$$a^{n+1}(u) = a^n(u) - \rho \frac{\partial J}{\partial a}(a^n)(u) \quad (22)$$

Supposons que l'on désire modifier le programme pour chercher a sous la forme (19), où α est supposée être linéaire par rapport aux paramètres β . Il faut que β soit modifié suivant le schéma :

$$\beta^{n+1} = \beta^n - \rho \frac{\partial J}{\partial \beta}(\beta^n) \quad (23)$$

Mais grâce à la linéarité de α par rapport à β , la forme (13) est strictement équivalente à :

$$a^{n+1}(u) = a^n(u) - \rho \alpha(u, \frac{\partial J}{\partial \beta}(\beta^n)) \quad (24)$$

où a^n et a^{n+1} sont de la forme (19).

En comparant (22) à (24), on voit que les seules modifications à faire dans le programme consistent à insérer, juste après que la fonction $\frac{\partial J}{\partial a}(a^n)(u)$ ait été calculée :

- le calcul de $\frac{\partial J}{\partial \beta}(\beta^n)$ par la formule (21) (quadratures)
- le stockage, dans la mémoire assignée à $\frac{\partial J}{\partial a}(a^n)(u)$, de la fonction $\alpha(u, \frac{\partial J}{\partial \beta}(\beta^n))$.

Tout le reste du programme reste inchangé. Ceci facilite l'essai de différentes formes algébriques pour la fonction a .

Donnons maintenant les applications numériques, qui j'espère éclaireront les considérations précédentes.

IV - APPLICATIONS

Dans tout ce paragraphe :

$\Omega \subset \mathbb{R}$ ou \mathbb{R}^2 sera un domaine spatial borné, de frontière Γ , $x \in \Omega$ sera la variable d'espace,
 $]OT[\subset \mathbb{R}$ sera l'intervalle de temps sur lequel on observera les phénomènes dynamiques, $t \in]OT[$ étant la variable de temps,
 $y \in \mathbb{R}$ sera la variable dépendante (c.a.d. la solution des équations).

1ère Application : Identification de la perméabilité d'un aquifère dans la région de Bordeaux.

Nous voulons ajuster le modèle d'un aquifère statique dans un domaine carré à deux dimensions d'espace.

Les équations du système sont :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_1} (a(x) \frac{\partial y}{\partial x_1}) - \frac{\partial}{\partial x_2} (a(x) \frac{\partial y}{\partial x_2}) &= f(x) \text{ dans } \Omega \\ y &= g \text{ sur } \Gamma \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

où

- . y est la pression de l'eau au point $x \in \Omega$
- . $a(x)$ est la perméabilité inconnue de l'aquifère (supposé isotrope) au point $x = (x_1, x_2) \in \Omega$
- . $f(x)$ est une fonction connue de $x=(x_1, x_2) \in \Omega$, liée au débit q_j et à la position du $j^{\text{ième}}$ puits par :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{43} q_j \chi_j(x) \quad (26)$$

où $\chi_j(x)$ est une fonction caractérisant la géométrie et la position du $j^{\text{ième}}$ puits par :

$$\chi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ n'appartient pas au } j^{\text{ième}} \text{ puits} \\ \text{une constante} & \text{si } x \text{ appartient au } j^{\text{ième}} \text{ puits} \end{cases}$$

la constante étant choisie telle que :

$$\int_{\Omega} \chi_j(x) dx = 1.$$

. g est la pression connue sur la frontière Γ de Ω .

Nous supposons ici que nous avons une observation distribuée, c.a.d. que nous connaissons une fonction $z(x)$, qui est une mesure de la fonction $y(x)$. En pratique, dans le cas considéré ici, $z(x)$ a été déduite par interpolation des isopiezies représentées sur la fig. 1 (mais on aurait pu éviter cette interpolation). La fonction g est obtenue de la même façon. La fonction coût associée à a est alors :

$$J(a) = \int_{\Omega} (y(x,a) - z(x))^2 dx_1 dx_2 \quad (27)$$

Nous allons maintenant faire rentrer ce problème dans le cadre théorique utilisé au §III. En remplaçant dans (25) y par $y - \tilde{y}$, où \tilde{y} est un relèvement de g dans Ω , nous sommes ramenés à un système de la même forme que (25), mais avec $g=0$.

Nous supposons :

$$a \in L^{\infty}(\Omega) \quad f \in L^2(\Omega) \quad (28)$$

et nous identifions $L^2(\Omega)$ avec son dual, et $H_0^1(\Omega)$ à un sous espace de $L^2(\Omega)$. Alors $L^2(\Omega)$ peut être identifié à un sous espace du dual $[H_0^1(\Omega)]'$ de $H_0^1(\Omega)$:

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset [H_0^1(\Omega)]' \quad (29)$$

On peut alors associer à toute fonction $a \in L^{\infty}(\Omega)$ un opérateur linéaire $A(a)$ allant de $H_0^1(\Omega)$ dans $[H_0^1(\Omega)]'$ par :

$$(A(a)u, v) = \int_{\Omega} a(x) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \quad (30)$$

On sait alors qu'une formulation faible de l'équation (25) (avec $g=0$) est donnée par :

$$\left. \begin{array}{l} \text{trouver } y \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ A(a)y = f \end{array} \right\} \quad (31)$$

L'équation (31) est l'équation d'état. Elle est de la forme (1) où $Y = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega)$ et $F = [H_0^1(\Omega)]'$, et où

$$\psi \text{ est l'application : } (y, a) \in Y \times \mathcal{A} \rightarrow A(a).y \in F \quad (32)$$

La partie \mathcal{A}_c de \mathcal{A} pour laquelle l'équation (31) admet une solution unique est ici :

$$\mathcal{A}_c = \{ a \in L^\infty(\Omega) \mid \exists \alpha > 0, a(x) \geq \alpha > 0 \text{ p.p. sur } \Omega \} \quad (33)$$

L'ensemble \mathcal{A}_{ad} des paramètres admissibles introduits en (7) peut être défini ici par :

$$\mathcal{A}_{ad} = \{ a \in L^\infty(\Omega) \mid a_{\text{Max}} \geq a(x) \geq a_{\text{min}} \text{ p.p. sur } \Omega \} \quad (34)$$

où a_{Max} et a_{min} sont des bornes supérieures et inférieures connues des perméabilités.

En ce qui concerne l'observation, nous prendrons ici :

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega) \quad \mathcal{V} = \text{injection canonique de } H_0^1(\Omega) \text{ dans } L^2(\Omega) \quad (35)$$

de telle sorte que la fonctionnelle J définie en (27) coïncide avec celle en (5).

On vérifie facilement que les hypothèses de la proposition 2 sont satisfaites, et on obtient la

Proposition 3 : Sous les hypothèses (28), la fonctionnelle J définie en (27) est dérivable par rapport à $a \in L^\infty(\Omega)$, et $J'(a)$ est donnée par :

$$J'(a)\delta a = (A(\delta a)y, p) \quad \forall a \in \mathcal{A}_c, \forall \delta a \in \mathcal{A} \quad (37)$$

où $p \in H_0^1(\Omega)$ est l'état adjoint, solution de

$$A(a)p = -2(y-z) \quad (38)$$

Compte tenu de (30), (37) se réécrit :

$$J'(a).\delta a = \int_{\Omega} \delta a(x) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx \quad \forall \delta a \in L^\infty(\Omega) \quad (39)$$

ce qui prouve que la dérivée partielle fonctionnelle $\frac{\partial J}{\partial a}(x)$ existe et a pour expression :

$$\frac{\partial J}{\partial a}(x) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) \frac{\partial p}{\partial x_i}(x) \in L^1(Q) \quad (40)$$

Cette formule nous permet de calculer numériquement aisément $\frac{\partial J}{\partial a}$, lorsque nous connaissons y , solution de (31), c.a.d. solution faible de (25), et p , solution de (38), c.a.d. solution faible de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x_1} (a(x_1, x_2) \frac{\partial p}{\partial x_1}) - \frac{\partial}{\partial x_2} (a(x_1, x_2) \frac{\partial p}{\partial x_2}) = -2(y(x_1, x_2) - z(x_1, x_2)) \text{ dans } \Omega \\ p = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (41)$$

Resultats numériques : Les données⁽¹⁾ sont regroupées sur la figure 1.

Le domaine Ω était discrétisé en 20X20 points. La fonction inconnue $a(x_1, x_2)$ était discrétisée sur cette grille (il y avait donc 400 paramètres scalaires inconnus). A chaque itération de gradient, les équations (25) et (41) étaient résolues de façon classique par différences finies. Puis la fonction $\frac{\partial J}{\partial a}(x)$ était évaluée en chaque noeud de la grille par différences finies à partir de l'équation (40).

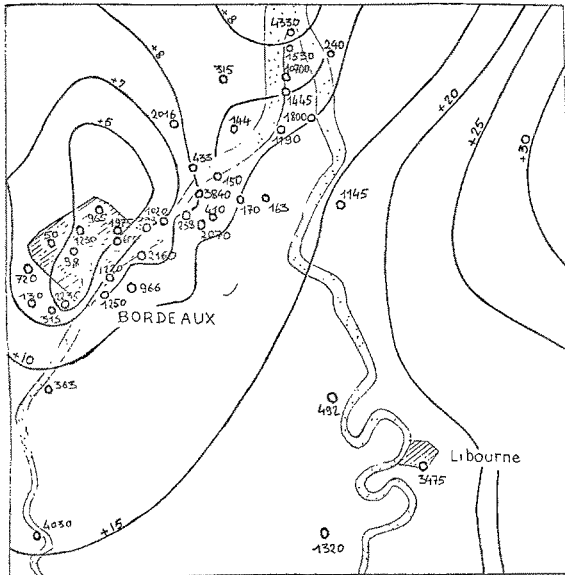


Fig. 1 : Les données du problème d'identification.

⁽¹⁾ Nous remercions le "Centre d'Informatique Géologique et Minière" de l'Ecole des Mines de Fontainebleau, qui nous a fourni ces données et nous a autorisé à les publier.

Ensuite, un algorithme de plus grande descente était utilisé pour mettre à jour a avec une détermination approchée du ρ optimal à chaque pas.

Comme nous n'avions aucune idée de l'ordre de grandeur de la perméabilité a , nous avons commencé par chercher $a(x)$ sous forme d'une constante (cf. Remarque 5). En partant de $a^0=150$, nous sommes ainsi arrivés à $a=1622$ en 9 itérations de gradient et 25 s d'IBM 360-91.

Puis, partant de la fonction $a(x)$ constante et égale à 1622, nous avons obtenu la fonction $a(x)$ représentée sur la figure 2 en 5 itérations de gradient et 22s d'IBM 360-91.

La pression y correspondant aux perméabilités $a(x_1, x_2)$ de la figure 2 est représentée sur la figure 3 (à comparer avec la figure 1).

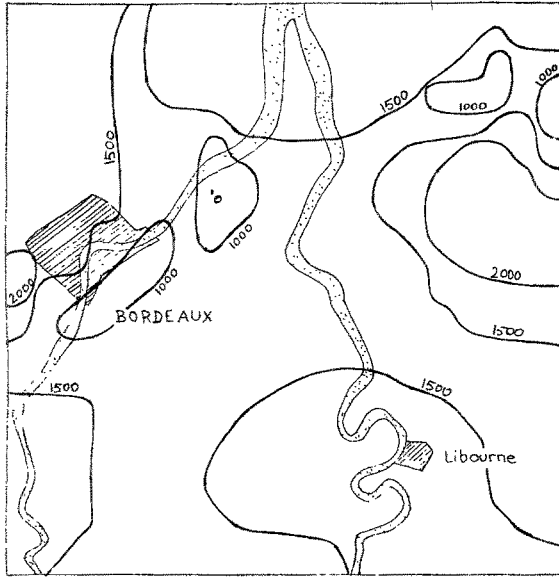


Fig. 2 : Carte des Transmissivités $a(x)$ fournies par l'algorithme.

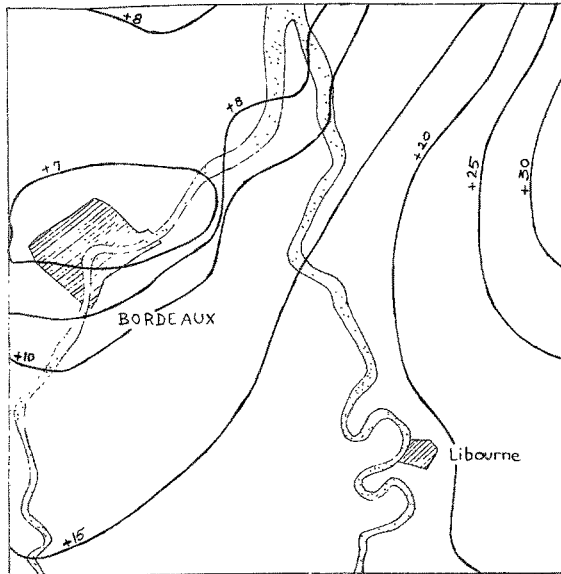


Fig. 3 : Carte des isopiez calculées.

2^{ème} Application : Identification de la perméabilité d'un gisement de pétrole en production monophasique.

Le gisement est le domaine Ω représenté sur la fig. 4. L'équation d'état pour la pression $y(x,t)$ est :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (a(x) \frac{\partial y}{\partial x_i}) &= f(x,t) \text{ dans } \Omega \times]0, T[\\ \frac{\partial y}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma \text{ (condition de Neumann)} \\ y(x,0) &= y_0(x) \text{ sur } \Omega \text{ (condition initiale)} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

où

$a(x)$ représente la perméabilité inconnue du champs de pétrole, supposé isotrope,

$f(x,t)$ est une fonction connue de la forme (26), où les débits q_j dépendent maintenant du temps,

$y_0(x,t)$ est la pression initiale dans le gisement, connue.

Nous disposons ici de moins de mesures de pression que dans l'exemple précédent : seule la pression moyenne dans chacun des 11 puits est supposée mesurée à chaque instant t ⁽¹⁾, d'où onze fonctions du temps $z_j(t)$ $j=1,2,\dots,11$.

La fonction coût naturelle est ici :

$$J(a) = \sum_{j=1}^{11} \int_0^T \left[\int_{\Omega} \chi_j(x) y(x,t; a) dx - z_j(t) \right]^2 dt \quad (43)$$

De même que pour l'exemple précédent, ce problème peut rentrer dans le cadre théorique du §III, en utilisant la théorie variationnelle des équations aux dérivées partielles, et on peut appliquer la proposition 2. Pour plus de détail concernant ces questions théoriques, cf. [3][4].

Les formules (13) et (12) deviennent :

$$J'(a) \cdot \delta a = \int_{\Omega} \left[\int_0^T \sum_{i=1}^2 \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dt \right] \delta a(x) dx \quad \forall a \in L^{\infty}(\Omega) \quad (44)$$

(1) En fait, c'est là une hypothèse irréaliste (il faut fermer le puits pour mesurer la pression...). La méthode s'adapte très facilement à des mesures de pressions discrètes en temps, cf. [6].

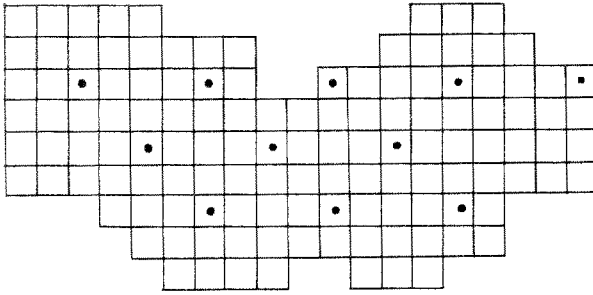


Fig. 4 : Discrétisation adoptée pour le
gisement. Les points noirs représentent
les puits de pétrole.

Ensuite, un algorithme de plus grande descente était utilisé pour mettre à jour a avec une détermination approchée du p optimal à chaque pas.

Comme nous n'avions aucune idée de l'ordre de grandeur de la perméabilité a , nous avons commencé par chercher $a(x)$ sous forme d'une constante (cf. Remarque 5). En partant de $a^0=150$, nous sommes ainsi arrivés à $a=1622$ en 9 itérations de gradient et 25 s d'IBM 360-91.

Puis, partant de la fonction $a(x)$ constante et égale à 1622, nous avons obtenu la fonction $a(x)$ représentée sur la figure 2 en 5 itérations de gradient et 22S d'IBM 360-91.

La pression y correspondant aux perméabilités $a(x_1, x_2)$ de la figure 2 est représentée sur la figure 3 (à comparer avec la figure 1).

(à comparer avec (17) et (39)) où y est la solution de (42), et où p (l'état adjoint) est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (a(x) \frac{\partial p}{\partial x_i}) = -2 \sum_{j=1}^{11} \chi_j(x) \left[\int_{\Omega_j} \chi_j(x) y(x,t) dx - z_j(t) \right] \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ (condition de Neumann) dans } \Omega \times]0, T[\\ p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega \text{ (condition finale).} \end{array} \right. \quad (45)$$

Ainsi la formule (44) montre que la dérivée partielle fonctionnelle $\frac{\partial J}{\partial a}(x)$ existe dans cet exemple, et permet de la calculer aisément à partir de y et p .

Résultats numériques : Dans le cadre d'un contrat de recherche entre l'IRIA-LABORIA et l'IFP, cette théorie a été appliquée à des données fournies par l'IFP (Institut Français du Pétrole). Nous remercions l'IFP de l'autorisation de publier ces résultats.

Le gisement est inclus dans un rectangle de $8 \times 16,8$ km, et discrétisé en 127 mailles (le pas d'espace étant de 884 m). L'historique de production (c.a.d. les fonctions $q_j(t)$) couvre 2070 jours (soit 5 ans) par pas de 23 j. Il est connu (bien que non représenté ici).

La pression initiale est connue, constante et égale à 482 kg/cm^2 . Les mesures de pression $z_j(t)$ sont simulées en intégrant l'équation (42) avec les perméabilités "exactes" de la figure 5. En outre, les perméabilités exactes sont connues dans toutes les mailles contenant des puits. Nous pouvons prendre en compte cette information très facilement.

La valeur initiale des perméabilités a été choisie égale à 200 mdm partout, sauf dans les mailles contenant un puits, où la valeur exacte et connue fut imposée.

A chaque itération, les systèmes (42) et (45) étaient résolus par un schéma aux différences finies classique (une simulation durait 0,5 s de CDC 7600), puis $\frac{\partial J}{\partial a}$ était évalué en chaque noeud par (44), puis mis à zéro pour tous les noeuds où se trouvait un puits.

Les perméabilités obtenues après 12 itérations de gradient et 50 s de CDC 7600 sont indiquées figure 6. L'erreur quadratique moyenne sur la pression sur tous les puits était de $1,19 \text{ kg/cm}^2$.

Les pressions calculées et observées sont représentées, pour les deux puits ayant le meilleur et le plus mauvais écart quadratique moyen, sur les figures 7 et 8.

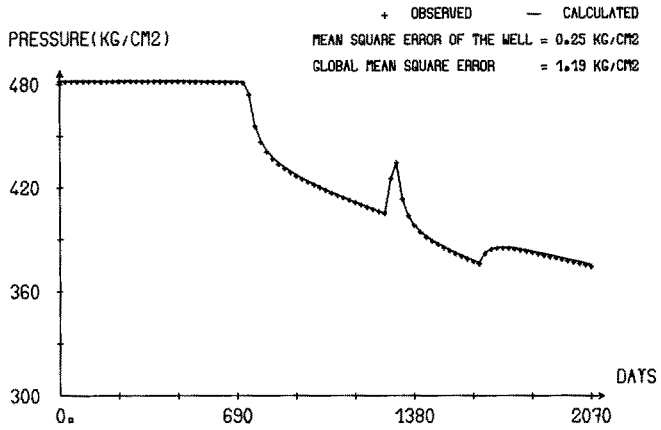
WELL 1 - ITERATION 12

Fig. 7 : Pressions mesurées
 et calculées au puits
 numéro 1.

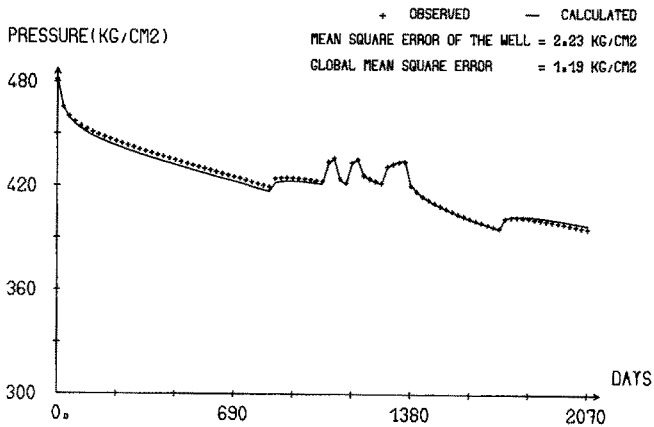
WELL 10 - ITERATION 12

Fig. 8 : Pressions mesurées et
 calculées au puits numéro 10.

En comparant les figures 5 et 6, on constate que les perméabilités obtenues sont assez différentes des perméabilités "exactes".

Ceci provient de ce qu'il n'y a aucun résultat d'unicité de la solution du problème inverse dans notre exemple. Dans certaines régions, $a(x)$ est resté près de sa valeur initiale de 200 mdm (en particulier sur la frontière et dans les zones où il y a peu de puits actifs) : ceci signifie simplement que les perméabilités, dans ces régions ont peu d'influence sur les mesures de pressions, et donc ne peuvent pas être déterminées à partir de ces mesures.

Dans d'autres régions (en particulier dans les zones où figurent des puits actifs) on constate que les perméabilités se sont déplacées dans la bonne direction, et que leur ordre de grandeur correspond bien à celui des perméabilités exactes.

3^{ème} Application: Identification de la non-linéarité dans une équation parabolique quasi linéaire.

Considérons, sur le domaine spatial $\Omega =]0,1[$, l'équation parabolique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (a(y) \frac{\partial y}{\partial x}) = f(x,t) \text{ dans } \Omega \times]0,T[\\ y = g \text{ sur } \Gamma \times]0,1[\quad (\text{conditions de Dirichlet}) \\ y(x,0) = y_0(x) \text{ sur } \Omega \quad (\text{conditions initiales}). \end{array} \right. \quad (46)$$

Les fonctions f , g et y_0 sont supposées connues, et nous voulons estimer la fonction $y \rightarrow a(y)$. Le système (46) peut représenter un processus de diffusion de chaleur mono dimensionnel avec une conductibilité thermique dépendant de la température.

La solution $y(x,t)$ de (46) est mesurée, à chaque instant $t \in]0,T[$, en 5 points $x_1 \dots x_5$ de l'intervalle $]0,1[$. On obtient ainsi cinq fonctions du temps $z_1(t) \dots z_5(t)$.

La fonction coût est naturellement :

$$J(a) = \sum_{j=1}^5 \int_0^T (y(x_j, t; a) - z_j(t))^2 dt \quad (47)$$

D'un point de vue théorique, ce problème est plus difficile que les deux précédents, car l'équation (46) n'est pas linéaire. En particulier, nous ne savons pas faire rentrer ce problème dans le cadre général du §III. On peut cependant démontrer directement (cf. [7]) que la fonctionnelle J est Fréchet-dérivable. Nous ne donnons ici que les résultats formels, sans préciser la nature de l'espace des paramètres \mathcal{A} et de l'espace des solutions Y .

On peut donc montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \delta a \in \mathcal{A} \\ J'(a)\delta a = \int_{\Omega} \int_0^T \delta a(y(x,t)) \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \frac{\partial p}{\partial x}(x,t) dx dt \end{array} \right. \quad (48)$$

où $y(x,t)$ est la solution de (46), et $p(x,t)$ est l'état adjoint, solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial t} - a(y(x,t)) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -2 \sum_{j=1}^5 \delta(x-x_j) (y(x_j,t) - z_j(t)) \\ p = 0 \text{ sur } \Gamma \quad x \in \Omega \text{]OT[} \\ p(x,T) = 0 \text{ (condition finale).} \end{array} \right. \quad (49)$$

En posant :

$$\varphi(x,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \frac{\partial p}{\partial x}(x,t) \quad \forall x,t \in \Omega \quad x \in \Omega \text{]OT[} \quad (50)$$

l'équation (49) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \delta a \in \mathcal{A} \\ J'(a) \cdot \delta a = \int_{\Omega} \int_0^T \delta a(y(x,t)) \varphi(x,t) dx dt \end{array} \right. \quad (51)$$

En comparant (51) avec (17) qui donne la forme canonique de $J'(a) \cdot \delta a$, nous constatons que (51) ne nous donne pas la dérivée partielle fonctionnelle $\gamma(z)$ de J par rapport à $a(z)$, définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \delta a \in \mathcal{A} \\ J'(a) \cdot \delta a = \int_{y_m}^{y_M} \delta a(z) \gamma(z) dz \end{array} \right. \quad (52)$$

où y_m et y_M sont des bornes inférieures et supérieures connues de la solution y de (46).

Nous distinguerons ici deux cas :

1^{er} cas : Si nous supposons que $a(y)$ est une fonction de forme connue, avec seulement un nombre fini de paramètres inconnus $\beta_1 \dots \beta_k$ (cf. remarque 4, où $x=y$). Il est alors facile de calculer le gradient de J par rapport à β à partir de (51) :

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_j}(\beta) = \int_{\Omega} \int_0^T \frac{\partial a}{\partial \beta_j}(y(x,t), \beta_1 \dots \beta_k) \varphi(x,t) dx dt \quad (53)$$

$j=1, 2, \dots, k$

Ainsi lorsque la fonction $\varphi(x,t)$ a été calculée numériquement (ce qui suppose que les deux systèmes (46) et (49) ont été résolus), le calcul du gradient de J par rapport à β ne nécessite que k quadratures. En outre la remarque 5 s'applique ici avec de légères modifications.

2^{ème} cas : Nous ne supposons aucune forme algébrique pour la fonction $y \rightarrow a(y)$: il nous faut donc trouver une façon de mettre (51) sous la forme (52).

Définissons, pour tout nombre réel ζ :

$$Q_\zeta = \{ (x,t) \in \Omega \times]0,1[\mid y(x,t) \geq \zeta \} \quad (54)$$

et

$$\eta(\zeta) = \int_{Q_\zeta} \varphi(x,t) dx dt \quad (55)$$

La formule (51) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \delta a \in \mathcal{Q} \\ J'(a)\delta a = \int_{y_m}^{y_M} \delta a(\zeta) d\eta(\zeta) \end{array} \right. \quad (56)$$

Ce qui, en comparant à (52) donne :

$$\frac{\partial J}{\partial a}(a)(y) = \gamma(y) = \eta'(y) \quad (57)$$

Ces formules nous permettent donc de calculer la dérivée partielle fonctionnelle de J par rapport à la fonction $y \rightarrow a(y)$.

Résultats numériques :

Le domaine $\Omega =]0,1[$ était discrétisé en 20 intervalles de longueur 0,05, et l'intervalle $]0,1[$ en 40 pas de longueur 0,025. La fonction f était une combinaison linéaire de masses de dirac discrètes aux points $x_1=0,1$ $x_2=0,3$ $x_3=0,5$ $x_4=0,7$ $x_5=0,9$.

La valeur initiale de y était constante, et la fonction exacte $a_0(y)$ utilisée pour simuler les données était :

$$a_0(y) = 0,21 - 0,28 y + 0,7 y^2 \quad (58)$$

Les bornes inférieures et supérieures de y choisies étaient :

$$y_m = 0,3 \qquad y_M = 2$$

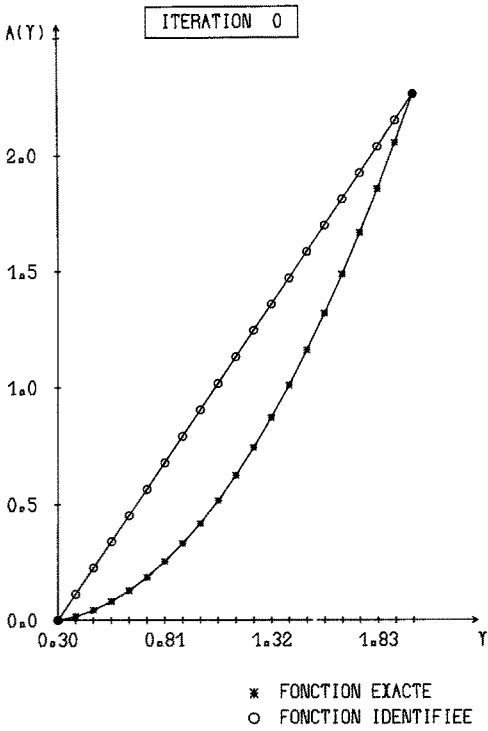
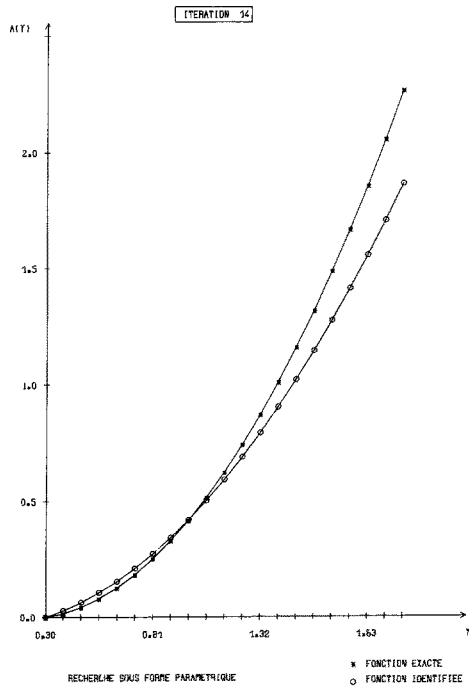


Fig. 9 : Valeur initiale et valeur exacte de la fonction $a(y)$.

Fig. 10 : Recherche sous forme d'un polynôme du 2^e degré. Fonction obtenue après 4 itérations.



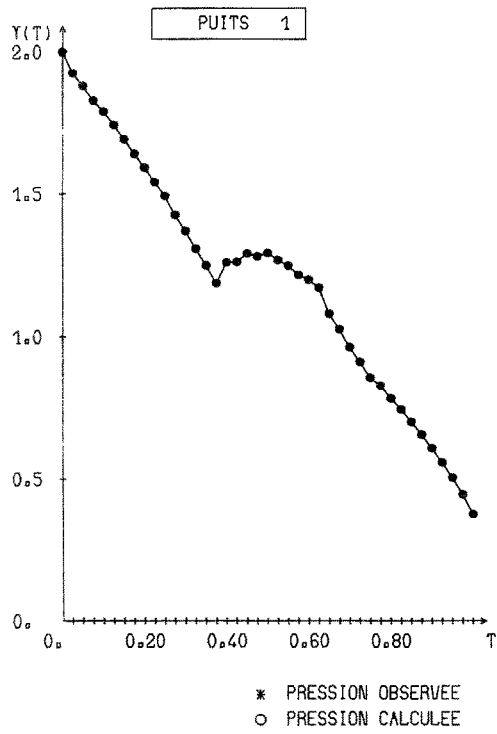
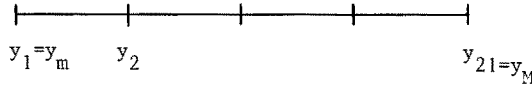


Fig. 11 : Pressions mesurées
et calculées au puits 1.

et l'intervalle $]y_m, y_M[$ était divisé en 20 sous-intervalles de longueur Δ :



et la fonction $a(y)$ était représentée sur cet intervalle par une fonction continue linéaire par morceaux :

$$a(y) = \sum_{j=1}^{20} (a_j + \frac{1}{\Delta}(y-y_j)(a_{j+1}-a_j))\chi_j(y) \quad (60)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_j(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [y_j, y_{j+1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ a_j = \text{représentation discrète de } a(y_j). \end{array} \right. \quad (61)$$

Le système était ensuite intégré avec la valeur "exacte" a_0 de la fonction a , par un schéma aux différences finies du type prédicteur-correcteur, ce qui fournissait les observations $z_j(t)$ $j=1,2,\dots,5$.

Pour retrouver la fonction $a(y)$, nous utilisons ensuite une méthode classique de gradient (steepest-descent) avec détermination approchée du p optimal et projection sur un polyèdre convexe \mathcal{Q}_{ad} .

Tout d'abord, nous avons cherché $a(y)$ sous forme d'un polynôme de degré 2 (3 inconnues scalaires), le gradient par rapport à 3 coefficients était calculé par (53).

Comme la fonction a doit être positive (si l'on veut que l'équation (46) ait une solution !) l'ensemble convexe \mathcal{Q}_{ad} de \mathbb{R}^3 fut déterminé en écrivant que, en chaque point de discrétisation $y_j \in [y_m, y_M]$, le polynôme $a(y_j)$ devait être positif (21 contraintes linéaires).

La valeur initiale et les fonctions $a(y)$ obtenues après 14 itérations de gradient sont montrées sur les figures 9 et 10. Après 32 itérations, la fonction obtenue est identique à la fonction exacte (58). Les sorties calculées et mesurées correspondantes sont montrées pour le point x_1 sur la figure 11.

Nous avons ensuite cherché $a(y)$ sous la forme (60) d'une fonction continue linéaire par morceaux (21 paramètres inconnus).

La dérivée $\frac{\partial J}{\partial a_j}$ est calculée à partir de (57) pour chaque j , ce qui nécessite une intégration numérique d'une fonction (liée à la fonction φ définie en (50)) sur le domaine $Q_{y_{j+1}} - Q_{y_j}$ pour chaque j .

i) Nous avons d'abord supposé que nous ne connaissons rien sur a , si ce n'est que c'est une fonction positive (a est une fonction positive "libre") :

$$A_{ad} = \{ a \mid a_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,21 \} \quad (62)$$

Il est facile de projeter sur ce convexe !

La valeur initiale était celle de la figure 9, et la fonction $a(y)$ obtenue après 20 itérations de gradient est montrée sur la figure 12.

ii) Nous avons ensuite supposé que nous avons quelques informations sur la dérivée seconde de la fonction $y \rightarrow a(y)$:

$$A_{ad} = \{ a \mid a_j \geq 0, j=1,2,\dots,21, \quad -m_j \leq \frac{a_{j+1} - 2a_j + a_{j-1}}{\Delta^2} \leq M_j, \quad j=2,3,\dots,20 \} \quad (63)$$

où les m_j et M_j sont des nombres positifs donnés. Des informations de ce genre sont souvent connues des physiciens (ils peuvent connaître le sens de la concavité d'une non linéarité par exemple), et nous pouvons ici les prendre en compte facilement.

Les résultats correspondant à la valeur initiale de la figure 9 et à différents m_j et M_j sont représentés sur les figures 13 et 14.

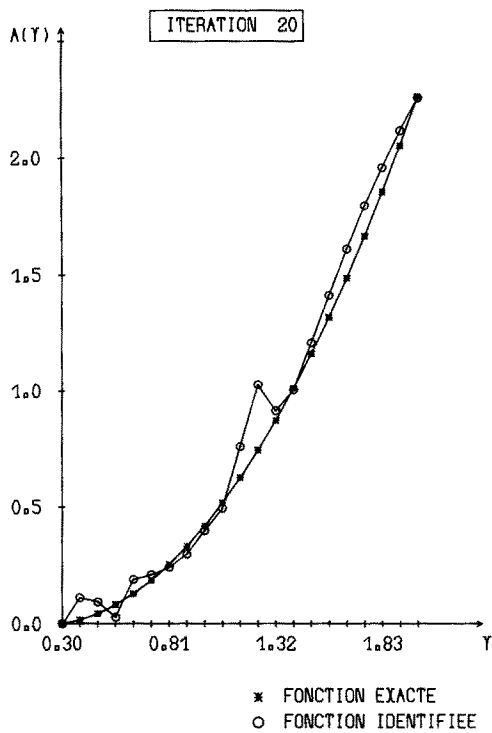
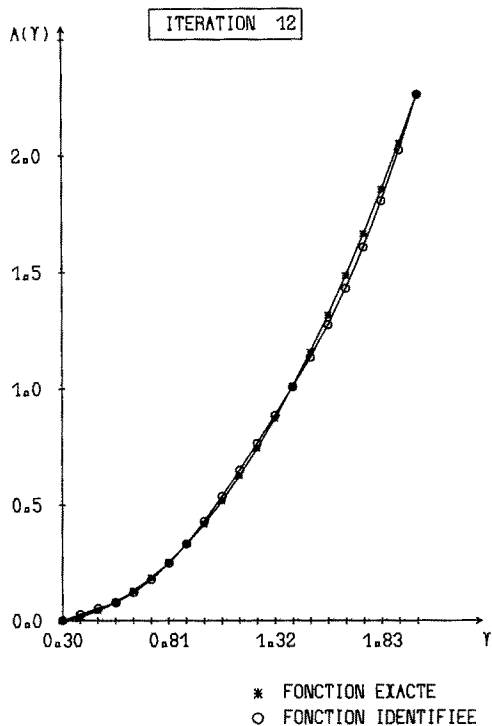


Fig. 12 : Recherche de $a(y)$ sous forme libre.

Figure 13 : Recherche de $a(y)$ avec la contrainte $|a''(y)| \leq 5$.



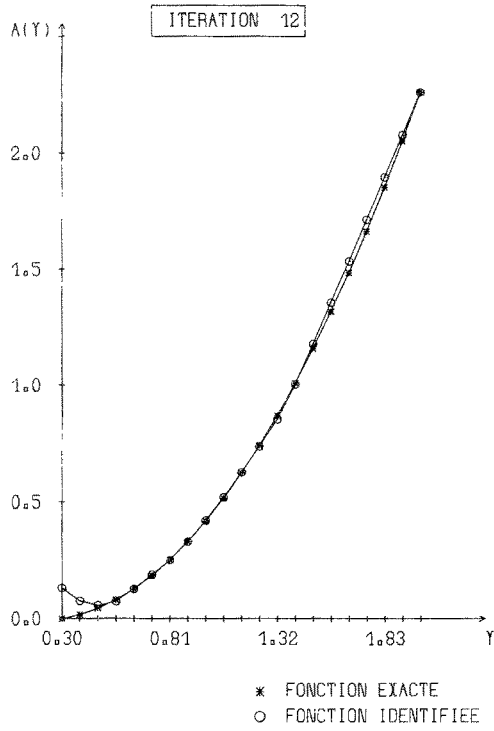


Fig. 14 : Recherche de $a(y)$ avec la
contrainte $0 \leq a''(y) \leq 5$.

V - CONCLUSION

Nous avons essayé de convaincre le lecteur qu'il est possible, lorsqu'on rencontre des fonctions inconnues dans la modélisation d'un système, d'éviter toute hypothèse sur la forme algébrique de cette fonction, et ceci jusqu'au traitement numérique, en utilisant la dérivée partielle fonctionnelle.

En outre, dans le cas où l'on recherche une fonction d'une forme algébrique donnée, la dérivée partielle fonctionnelle est un intermédiaire très souple et permettant de changer de forme algébrique à moindre frais.

L'utilisation de l'opérateur d'observation \mathcal{C} , dont on demande seulement la dérivabilité, nous permet de prendre en compte les mesures effectuées sur le système sans avoir à leur faire subir de traitement préalable important.

Cette approche est systématique, et peut être appliquée à de nombreux autres domaines. De nombreux exemples sont étudiés dans [5].

VI - REFERENCES

- [1] LIONS J.L. Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod 1968.
- [2] LIONS J.L. Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires. Dunod Gauthier Villars Paris 1969.
- [3] CHAVENT G. Sur une Méthode de résolution du Problème inverse dans les Equations aux dérivées partielles paraboliques. Note CRAS Paris, T.260 Déc. 1969.
- [4] CHAVENT G. Deux résultats sur le problème inverse dans les équations aux dérivées partielles du 2^{ème} ordre en t et sur l'unicité de la solution du problème inverse de la diffusion. Note CRAS. Paris t. 270, Janvier 1970.
- [5] CHAVENT G. Analyse fonctionnelle et Identification de coefficients répartis dans les équations aux dérivées partielles. Thèse d'Etat. Paris 1971.

- [6] CHAVENT G., DUPUY M., LEMONNIER P. History Matching by use of optimal control theory. Full Meeting of SPE, Las Vegas 1973.
- [7] CHAVENT G., LEMONNIER P. Identification de la non linéarité dans une équation parabolique quasi linéaire. A paraître dans "Applied Mathematics and Optimization, an international Journal".