GESTION OPTIMALE DES RESERVOIRS D'UNE VALLEE HYDRAULIQUE

A. BRETON - F. FALGARONE
ELECTRICITE de FRANCE

I - POSITION DU PROBLEME

Pour satisfaire la demande d'énergie électrique, Electricité de France dispose de moyens de production hydraulique et de centrales thermiques et nucléaires. Le système français de production-consommation présente les caractéristiques suivantes :

- Une demande d'énergie électrique nettement plus importante l'hiver que l'été. Cette demande est aléatoire et est caractérisée par une dispersion relativement faible.

- Un parc de centrales thermiques très diversifié qui se traduit économiquement par un coût marginal du kWh produit fortement croissant avec la puissance appelée.

- Un parc d'usines hydrauliques composé en partie d'un certain nombre de grands réservoirs recevant leurs apports au moment de la fonte des neiges c'est-à-dire en dehors de la période de forte consommation. Ces apports hydrauliques sont aléatoires et présentent en général des dispersions assez importantes.

La gestion annuelle des moyens de production consiste donc à utiliser, dans la mesure où les aléas le permettent, les réservoirs saisonniers de façon à stocker l'eau en période de forte hydraulicité pour l'utiliser au moment où la consommation est plus élevée.

De façon plus précise le gestionnaire doit, à chaque instant, arbitrer entre l'utilité immédiate attachée à un destockage des réserves (valorisé par rapport à l'économie de combustible qu'il procure) et une espérance future de gain qu'il pourra retirer de l'eau en réserve.

Bien entendu, pour évaluer à chaque instant l'intérêt économique d'un kWh en réserve, il est nécessaire d'optimiser globalement sur l'année l'ensemble des grands réservoirs (une trentaine) et l'ensemble des autres moyens de production.

On voit donc apparaître ici les principales difficultés du problème de la gestion optimale du parc des équipements de production électrique, difficultés liées :

- à la grande dimension du problème,

- au caractère dynamique de la régularisation saisonnière,

- au caractère aléatoire de la demande électrique et des apports hydrauliques.

Bien que l'objet de cette étude soit seulement celui de la gestion des réservoirs d'une même vallée hydraulique, on s'intéressera cependant tout d'abord aux grandes lignes du problème de l'optimisation sur l'année de l'ensemble des moyens de production. En effet c'est à partir de ce dernier, considéré comme problème global, que l'on obtiendra, par décomposition pour chaque vallée hydraulique, le problème local de la gestion optimale des différents réservoirs équipant celle-ci.

I.1 - Formulation du problème global

On désignera par $[0,T]$ la période totale de gestion, la période élémentaire $[t, t+1]$ représentant la semaine t.

La demande électrique sur la semaine est structurée en m postes (heures de pointe, heures pleines, heures creuses, etc...). La demande globale D est par conséquent un vecteur de $\mathbb{R}^{mT}$.

L'énergie produite par le parc thermique et nucléaire sera représentée par un seul vecteur $P \in \mathbb{R}^{mT}$.

Enfin on supposera que le parc hydraulique est composé de N vallées hydrauliques indépendantes ($j = 1$ à N) c'est-à-dire sans aval commun.

Pour chaque vallée j on cherche à déterminer l'évolution $(Z_j^1, \ldots, Z_j^T)=Z_j$ du ou des réservoirs de cette vallée. La dimension du vecteur Z_j étant égale au nombre de réservoirs en série et/ou en parallèle.

On se donne enfin pour tout j la fonction

$$Z_j \longrightarrow H_j(Z_j) \in \mathbb{R}^{mT}$$

qui à une évolution de la réserve j donne la production en énergie de la vallée sur les m postes des T semaines. On reviendra, lors de la formulation détaillée du problème local, sur les questions soulevées par la construction d'une telle fonction.

Le problème de la minimisation du coût de l'énergie thermique et nucléaire produite peut maintenant s'écrire :

$$(PG) \quad \left| \begin{array}{l} \underset{(Z,P)}{\text{MIN}} \quad C(P) \\ \text{sous la contrainte globale} \\ \sum_{j=1}^{N} H_j(Z_j) + P \geqslant D \\ \text{et sous les contraintes locales} \\ P \geqslant 0 \\ Z_j \in \mathbb{Z}_j \end{array} \right.$$

où $\mathbb{Z}_j$ représente l'ensemble des évolutions admissibles de la réserve j

I.2 - Décomposition du problème global

En remarquant que :

- la croissance du coût marginal thermique entraîne la convexité de la fonction C(P),
- l'optimisation, décrite plus loin, des quantités d'eau turbinées à l'intérieur de la semaine se traduit par un effet de rendement décroissant de ces dernières et permet d'assurer la concavité des fonctions $H_j(Z_j)$ pour (j = 1 à N),
- si deux évolutions d'une réserve sont admissibles, alors toute combinaison convexe de ces deux trajectoires est encore une trajectoire admissible : autrement dit $\mathbb{Z}_j$ est convexe pour tout j,
- si on introduit un coût de défaillance, c'est-à-dire si on ne borne pas P supérieurement, alors le domaine admissible du problème global à un intérieur non vide.

on peut alors assurer (1) qu'il existe un vecteur $\bar{p} \geqslant 0$ tel que la solution optimale $(\bar{Z}_1, \ldots, \bar{Z}_m, \bar{P})$ du problème (PG) soit solution du problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{MIN} \quad \mathcal{L}(\bar{p}, Z, P) \\ Z_j \in \mathbb{Z}_j \\ P \geqslant 0 \end{array} \right.$$

où $p \in \mathbb{R}^{mT}$ et $Z = (Z_1, \ldots, Z_N)$

avec $\mathcal{L}(p, Z, P) = C(P) - \langle p, \sum_{j=1}^{N} H_j(Z_j) + P - D \rangle$

On constate immédiatement que la minimisation du lagrangien s'obtient en résolvant les N+1 problèmes locaux suivants :

$$PL_o \quad \left| \begin{array}{l} \text{MIN} \quad C(P) - \langle \bar{p}, P \rangle \\ P \geqslant 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} PL_j \\ (j=1 \text{ à } N) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{MAX} \quad \langle \bar{p}, H_j(Z_j) \rangle \\ Z_j \in \mathbb{Z}_j \end{array} \right.$$

Ainsi la connaissance de la variable duale $\bar{p}$ permet de décentraliser la recherche de l'optimum global. Pour être efficace, cette procédure, mettant en oeuvre un algorithme de coordination pour la recherche de la variable duale $\bar{p}$, suppose une convergence rapide de la méthode de résolution numérique des problèmes locaux.

II - LE PROBLEME DE LA GESTION DES RESERVOIRS D'UNE VALLEE

II.1 - Position du problème

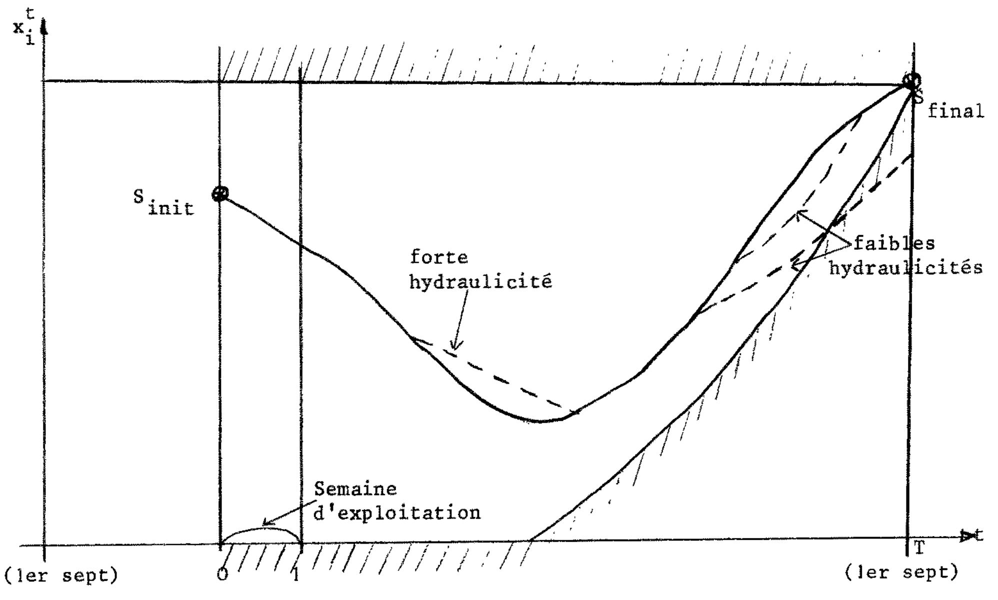
La forme du problème local précédent nous indique donc que l'on doit optimiser la valeur de la production énergétique en tenant compte de l'ensemble des contraintes relatives à la vallée hydraulique considérée.

Le problème est posé en boucle ouverte adaptée [2]. On désire en effet construire une procédure d'optimisation qui utilise au mieux toutes les informations disponibles au moment de la prise de décision. Autrement dit, on exploitera chaque semaine le modèle et on ne retiendra que la première décision. Ceci permet de profiter au mieux des dernières réalisations connues de la consommation, des niveaux d'eau dans les différents réservoirs, de la disponibilité des tranches thermiques et nucléaires.

On sera conduit à utiliser une trajectoire définie par les équations d'évolution

$$\left|\begin{array}{l} x^{t+1} = x^t - u^t \\ x^o = S_{init} \end{array}\right.$$

que l'on appellera par la suite "trajectoire à viser" (où le vecteur x^t contient autant de composantes qu'il y a de réservoirs saisonniers dans la vallée hydraulique considérée)



Il est nécessaire d'imposer certaines contraintes sur le niveau de cette trajectoire à viser. En plus des contraintes de niveau minimum et maximum, on fixera un certain état final (réservoirs pleins au 1er septembre, avant la période de forte consommation). On imposera une contrainte en probabilité sur le niveau minimum de façon à atteindre au moins l'état final avec une certaine probabilité fixée a priori. De même on fixera une contrainte en probabilité sur le niveau maximum de façon à ne pas subir trop de déversements.

Pour arbitrer entre les différentes trajectoires à viser, on calculera l'espérance de la valeur de la production énergétique pour toutes les années d'observation de l'échantillon hydraulique dont on dispose. Cette procédure évite l'estimation des lois de probabilité des apports hydrauliques.

La difficulté essentielle du problème provient du caractère aléatoire des apports qui ne permettent pas de suivre dans tous les cas cette trajectoire à viser. En effet si le destockage est u^t, la quantité turbinée sera $u^t + a^t_\ell$ (où a^t_ℓ représente les apports de la semaine t de l'année ℓ de l'échantillon des observations hydrauliques). Or la quantité turbinée $u^t + a^t_\ell$ peut ne pas être comprise entre les bornes V^t_{min} et V^t_{max} entre lesquelles la turbine doit travailler. Dans ces conditions on sera conduit, pour respecter ces dernières contraintes, à quitter la trajectoire à viser vers le haut dans le cas des fortes hydraulicités et vers le bas dans le cas des faibles hydraulicités.

Pour déterminer la valeur du critère économique il sera nécessaire de disposer de la production énergétique $E^t_{k\ell}(h,q)$ associée à une hauteur d'eau h et à une quantité turbinée q pour l'année hydraulique ℓ, le poste horaire k et la semaine t.

Cette fonction E(h,q) est le résultat d'une optimisation complexe au sein de la vallée. Il s'agit en effet, pour les décisions de destockage envisagées sur les lacs de la vallée, de gérer au mieux l'ensemble des usines hydrauliques équipant cette vallée, de façon à produire pendant les heures les plus chargées de la journée. Cette optimisation est effectuée heure par heure en tenant compte notamment des temps d'écoulement de l'eau entre les différentes usines.

II.2 - Formulation du problème de la gestion des réservoirs d'une vallée

On est conduit à traiter un problème de commande optimale stochastique. On utilisera, dans ce but, une démarche analogue à celle étudiée par M. QUADRAT [3].

On cherche à optimiser le critère économique :

$$\text{MAX} \sum_{\ell=1}^{L} \frac{1}{L} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{k=1}^{m} E^t_{k\ell} \left(h^t_\ell, q^t_\ell\right) \cdot p^t_{k\ell} - \left(S_{final} - y^T_\ell\right) \cdot \lambda \right]$$

$$\text{avec} \quad h^t_\ell = \frac{y^t_\ell + y^{t+1}_\ell}{2}$$

(où L est le nombre d'années d'observation hydraulique, $p^t_{k\ell}$ sont les prix permettant la décomposition du problème global et λ la valeur finale de l'eau, ce qui permet de valoriser les écarts à l'état final imposé).

l'état aléatoire y^t_ℓ évoluant selon les équations

$$\left| \begin{array}{l} y^{t+1}_\ell = y^t_\ell + a^t_\ell - q^t_\ell \\ y^o_\ell = S_{init} \end{array} \right.$$

Pour simplifier la recherche de la stratégie optimale en boucle fermée, on impose une loi de feedback de la forme :

$$q_\ell^t\ (y_\ell^t,\ a_\ell^t) = \mathrm{MIN}\left\{V_{max}^t,\ \mathrm{MAX}\left\{(y_\ell^t - x^t + u^t + a_\ell^t),\ V_{min}^t\right\}\right\}$$

où l'optimisation s'effectue par rapport aux paramètres x^t, u^t de la loi de feedback, ces paramètres étant liés par l'équation d'évolution $x^{t+1} = x^t - u^t$. On impose de plus les contraintes

$$\left|\begin{array}{l} S_{min}^t \leqslant x^t \leqslant S_{max}^t \\ x^o = S_{init} \\ x^T = S_{final} \end{array}\right.$$

(où x^t et u^t sont des vecteurs à n composantes s'il y a n réservoirs saisonniers interdépendants dans la vallée considérée).

Il est possible de reformuler le problème précédent à partir des seuls paramètres x^t, u^t de la loi de feedback :

$$\mathrm{MAX} \sum_{\ell=1}^{L} \frac{1}{L}\left\{\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{k=1}^{m} E_{k\ell}^t \left\{h_\ell^t(x^o,\ldots,x^t,u^o,\ldots,u^t),\ q_\ell^t\ (x^o,\ldots,x^t,u^o,\ldots,u^t)\right\} \cdot p_{k\ell}^t - \left\{S_{final} - y_\ell^T(x^o,\ldots,x^{T-1},u^o,\ldots,u^{T-1})\right\} \cdot \lambda\right\}$$

$$\left|\begin{array}{l} x^{t+1} = x^t - u^t \\ x^o = S_{init} \\ x^t = S_{final} \\ S_{min}^t \leqslant x^t \leqslant S_{max}^t \end{array}\right.$$

Pour simplifier les notations on posera

$$V(x^o,\ldots,x^{T-1},u^o,\ldots,u^{T-1}) = \sum_{\ell=1}^{L} \frac{1}{L}\left\{\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{k=1}^{m} E_{k\ell}^t \left\{h_\ell^t,q_\ell^t\right\} \cdot p_{k\ell}^t - \left\{S_{final} - y_\ell^T\right\} \cdot \lambda\right\}$$

La fonction V apparaît donc comme la valeur de l'énergie produite par la vallée considérée.

On doit donc résoudre le problème de commande optimale :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{MAX}\quad V(x^o,\ldots,x^{T-1},u^o,\ldots,u^{T-1}) \\ \left|\begin{array}{l} x^{t+1} = x^t - u^t \\ x^o = S_{init} \\ x^T = S_{final} \\ S_{min}^t \leqslant x^t \leqslant S_{max}^t \end{array}\right. \end{array}}$$

L'intérêt de la méthode de décomposition du problème global repose sur la grande simplicité de la structure des problèmes locaux, simplicité qui permettra de disposer d'une méthode de résolution particulièrement rapide.

III - RESOLUTION NUMERIQUE

III.1 - Recherche d'un point-selle

La seule difficulté du problème précédent provient des contraintes sur les états

$$S^t_{min} \leqslant x^t \leqslant S^t_{max}$$

On utilise une méthode de recherche du point-selle du lagrangien

$$\mathcal{L}(\gamma,\delta,X,U) = V(x^o,\dots,x^{T-1},u^o,\dots,u^{T-1}) + \sum_{t=1}^{T-1} \left[\gamma^t(x^t - S^t_{min}) - \delta^t(x^t - S^t_{max})\right]$$

ce qui permet de transformer la résolution d'un problème de commande optimale avec contraintes sur les états en une suite de problèmes de commande optimale sans contraintes sur les états.

On recherche donc $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$, $\bar{X}$, $\bar{U}$ tels que

$$\left|\begin{array}{l} \mathcal{L}(\bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{X}, \bar{U}) \leqslant \mathcal{L}(\gamma, \delta, \bar{X}, \bar{U}) \\ \text{pour } \gamma, \delta \quad 0 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ll} \mathcal{L}(\bar{\gamma}, \bar{\delta}, X, U) \leqslant \mathcal{L}(\bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{X}, \bar{U}) & \\ \text{pour} & \left|\begin{array}{l} x^{t+1} = x^t - u^t \\ x^o = S_{init} \\ x^T = S_{final} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Pour la recherche d'un point-selle $(\bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{X}, \bar{U})$ du lagrangien $\mathcal{L}(\gamma, \delta, X, U)$ on a utilisé la méthode classique d'UZAWA. La concavité du critère et la définition du domaine admissible permettent d'affirmer d'une part l'existence d'un point-selle et d'autre part la convergence de la méthode d'UZAWA vers un tel point. On est donc conduit à résoudre successivement un problème primal et un problème dual.

- Problème primal -

A l'itération k, on maximise le lagrangien $\mathcal{L}(\gamma_k, \delta_k, X, U)$, à γ_k et δ_k fixés, par rapport à X et U dans le domaine défini par

$$\left|\begin{array}{l} x^{t+1} = x^t - u^t \\ x^o = S_{init} \\ x^T = S_{final} \end{array}\right.$$

Soit $X_k(\gamma_k, \delta_k)$ et $U_k(\gamma_k, \delta_k)$ la solution optimale.

- Problème dual -

On minimise le lagrangien $\mathcal{L}(\gamma, \delta, X_k, U_k)$, à X_k et U_k fixés, par rapport à γ et δ dans le domaine

$$\left| \begin{array}{l} \gamma \geqslant 0 \\ \delta \geqslant 0 \end{array} \right.$$

A l'itération k+1 on effectue les déplacements des variables duales

$$\boxed{\left| \begin{array}{l} \gamma^t_{k+1} = \text{MAX} \left(0,\ \gamma^t_k - \rho(x^t_k - S^t_{min})\right) \\ \\ \delta^t_{k+1} = \text{MAX} \left(0,\ \delta^t_k + \rho(x^t_k - S^t_{max})\right) \end{array} \right.}$$

et on choisit $\rho > 0$ suffisamment petit de manière à assurer la convergence de la méthode.

III.2 - Résolution numérique du problème primal

On est donc conduit à résoudre, pour γ et δ fixés, un problème particulièrement simple de commande optimale

$$\text{MAX} \quad V\left(x^o,\ldots,x^{T-1},u^o,\ldots,u^{T-1}\right) + \sum_{t=1}^{T-1} \left(\gamma^t(x^t - S^t_{min}) - \delta^t(x^t - S^t_{max})\right)$$

$$\left| \begin{array}{l} x^{t+1} = x^t - u^t \\ \\ x^o = S_{init} \\ \\ x^T = S_{final} \end{array} \right.$$

En utilisant l'équation d'évolution pour exprimer la contrainte sur l'état final, le problème prend la forme suivante :

$$\text{MAX} \quad V\left(x^o,\ldots,x^{T-1},u^o,\ldots,u^{T-1}\right) + \sum_{t=1}^{T-1} \left(\gamma^t(x^t - S^t_{min}) - \delta^t(x^t - S^t_{max})\right)$$

$$\left| \begin{array}{l} x^{t+1} = x^t - u^t \\ \\ \sum_{t=0}^{T-1} u^t = S_{init} - S_{final} \\ \\ x^o = S_{init} \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce problème, on utilise une méthode de plus forte pente dans la mesure où celle-ci permet une interprétation économique intéressante.

Soit $\tilde{u}^t$ et $\tilde{x}^t$ pour t = 0 à T respectivement la commande et la trajectoire. On envisage un déplacement δu^t de la commande à partir de $\tilde{u}^t$ pour t = 0 à T-1 en imposant de plus la contrainte

$$\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\delta u_i^t}{\delta s}\right)^2 = 1$$

où les α_i pour i = 1 à n sont des constantes **positives** que l'on déterminera par la suite.

On recherche les directions de déplacement $\frac{\delta u^t}{\delta s}$ pour t = 0 à T-1 qui optimisent la variation du critère. D'où le problème :

$$\text{MAX} \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x^t} \frac{\delta x^t}{\delta s} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial u^t} \frac{\delta u^t}{\delta s} + (\gamma^t - \delta^t) \frac{\delta x^t}{\delta s}\right)$$

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\delta x^{t+1}}{\delta s} = \dfrac{\delta x^t}{\delta s} - \dfrac{\delta u^t}{\delta s} \\[2ex] \displaystyle\sum_{t=0}^{T-1} \frac{\delta u^t}{\delta s} = 0 \\[2ex] \displaystyle\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\delta u_i^t}{\delta s}\right)^2 = 1 \\[2ex] \dfrac{\delta x^o}{\delta s} = 0 \end{array}\right.$$

(en posant $\tilde{V} = V(\tilde{x}^o,\ldots,\tilde{x}^{T-1},\tilde{u}^o,\ldots,\tilde{u}^{T-1})$)

C'est un problème de programmation mathématique dont les variables de décision sont

$$\frac{\delta x^t}{\delta s} \quad \text{et} \quad \frac{\delta u^t}{\delta s}$$

pour t = 0 à T-1.

Les conditions d'optimalité par rapport à $\frac{\delta x^t}{\delta s}$ pour t = 0 à T donnent le système adjoint

$$\left|\begin{array}{l} \Phi^{t+1} = \Phi^t - \dfrac{\partial \tilde{V}}{\partial x^t} - \gamma^t + \delta^t \\[2ex] \Phi^T = 0 \end{array}\right.$$

où Φ^{t+1} apparaît comme le multiplicateur de Kuhn et Tucker attaché à l'équation d'évolution

$$\frac{\delta x^{t+1}}{\delta s} = \frac{\delta x^t}{\delta s} - \frac{\delta u^t}{\delta s}$$

Les conditions d'optimalité par rapport à $\frac{\delta u^t}{\delta s}$ pour t = 0 à T-1 permettent d'obtenir les directions de déplacement relatives au réservoir i (i = 1 à n)

$$\frac{\delta u_i^t}{\delta s} = - \frac{1}{2\varepsilon\alpha_i} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial u_i^t} - \Phi_i^{t+1} - \sigma_i \right)$$

où ε est le multiplicateur attaché à la liaison

$$\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\delta u_i^t}{\delta s} \right)^2 = 1$$

et σ_i le multiplicateur attaché à la liaison

$$\sum_{t=0}^{T-1} \frac{\delta u_i^t}{\delta s} = 0$$

Cette dernière permet d'exprimer directement le multiplicateur σ_i

$$\sigma_i = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial u^t} - \Phi^{t+1} \right)$$

on posera

$$\Psi_i^t = \Phi_i^t + \sigma_i$$

pour t = 0 à T et i = 1 à n

d'où l'expression de la direction de déplacement

$$\frac{\delta u_i^t}{\delta s} = - \frac{1}{2\varepsilon\alpha_i} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial u_i^t} - \Psi_i^{t+1} \right)$$

pour t = 0 à T-1 et i = 1 à n

on pose $\alpha_i = - \frac{\delta s}{2\varepsilon\theta}$

d'où la nouvelle commande $u^t(\theta)$ en fonction d'un scalaire $\theta > 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} u_i^t(\theta) = \tilde{u}_i^t + \theta \left(\dfrac{\partial \tilde{V}}{\partial u_i^t} - \Psi_i^{t+1} \right) \\[2ex] \theta > 0 \qquad \text{pour} \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \text{ à } T-1 \\ i = 1 \text{ à } n \end{array} \right. \end{array}}$$

On retient une valeur de θ suffisamment petite de façon à augmenter strictement la valeur du critère économique.

IV - INTERPRETATION ECONOMIQUE

On s'intéressera ici à la signification économique du vecteur Ψ^t pour $t = 0$ à T

$$\Psi_i^t = \Phi_i^t + \sigma_i \qquad (i = 1 \text{ à } n)$$

Par intégration du système adjoint

$$\left| \begin{array}{l} \Phi^{t+1} = \Phi^t - \dfrac{\partial \tilde{V}}{\partial u^t} - \gamma^t + \delta^t \\ \\ \Phi^t = 0 \end{array} \right.$$

à partir de l'instant T jusqu'à l'instant t+1, on obtient

$$\Psi_i^{t+1} = \sum_{s=t+1}^{T-1} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_i^s} + \gamma_i^s - \delta_i^s \right) + \sigma_i \qquad (i = 1 \text{ à } n)$$

D'après l'interprétation économique générale d'un multiplicateur de Kuhn et Tucker, σ_i représente l'avantage économique d'une unité marginale d'eau à l'horizon T. C'est la valeur de l'eau à l'instant final pour le réservoir i.

D'autre part la quantité $\sum_{s=t+1}^{T-1} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_i^s}$ mesure l'effet de "hauteur d'eau" du réservoir i. En effet cette quantité représente l'intérêt économique qu'il y aurait à turbiner l'eau sous une hauteur marginalement supérieure (meilleur rendement énergétique des turbines).

Enfin le multiplicateur γ_i^s s'interprète comme le coût marginal associé à la contrainte de niveau minimum $x^s \geqslant S^s_{min}$ et le multiplicateur δ_i^s s'interprète comme le coût marginal associé à la contrainte de niveau maximum $x^s \leqslant S^s_{max}$.

Par conséquent Ψ_i^{t+1}, somme de l'ensemble des termes précédents, représente l'avantage économique qu'il y a à disposer à la date t d'une unité marginale d'eau supplémentaire tout en continuant à gérer dans le futur comme on avait prévu de le faire ($\tilde{u}^s$ pour $s = t+1$ à $T-1$). On reconnaît là la définition même de la valeur de l'eau à la période t pour le réservoir i.

Il est important de remarquer que cette valeur de l'eau est relative à la commande quelconque $\tilde{u}^t$ pour $t = 0$ à $T-1$ et pas nécessairement à la commande optimale $\bar{u}^t$ pour $t = 0$ à $T-1$

Ψ_i^{t+1}	= valeur de l'eau la semaine t pour le réservoir i associée à la commande $\tilde{u}^t$ pour $t = 0$ à $T-1$

Connaissant la signification économique de Ψ_i^{t+1}, on en déduit aisément celle de la quantité

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial u_i^t} - \Psi_i^{t+1}$$

En effet $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial u_i^t}$ représente l'utilité marginale immédiate associée au destockage d'une unité d'eau alors que Ψ_i^{t+1} représente la valeur future de cette eau. On compare donc l'utilité marginale immédiate de l'eau et sa valeur future. On reconnaît là la définition d'une rente marginale

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{V}}{\partial u_i^t} - \Psi_i^{t+1} = \text{Rente marginale la semaine } t \text{ pour le réservoir } i \text{ associée à la commande } \tilde{u}^t \text{ pour } t = 0 \text{ à } T-1}$$

Or le déplacement de la commande effectué dans la méthode de résolution numérique utilisée est de la forme :

$$\left| \begin{array}{l} u_i^t(\theta) = \tilde{u}_i^t + \theta \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial u_i^t} - \Psi_i^{t+1} \right) \\ \theta > 0 \end{array} \right.$$

Par conséquent on destocke plus d'eau quand la rente est positive et moins d'eau quand la rente est négative. Autrement dit on déforme la commande de façon à accaparer les rentes positives et à se défaire des rentes négatives. Cette procédure s'arrête lorsque pour t = 0 à T-1 et i = 1 à n on obtient des rentes nulles :

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial u_i^t} - \Psi_i^{t+1} = 0$$

La commande obtenue est alors la solution optimale u_k^t pour t = 1 à T-1 du problème primal relatif aux variables duales γ_k^t et δ_k^t pour t = 0 à T-1.

Pour les multiplicateurs $\bar{\gamma}^t$ et $\bar{\delta}^t$ on obtiendra la commande optimale du problème initial :

$$\text{MAX } V\left(x^o, \ldots, x^{T-1}, u^o, \ldots, u^{T-1}\right)$$

$$\left| \begin{array}{l} x^{t+1} = x^t - u^t \\ S_{min}^t \leqslant x^t \leqslant S_{max}^t \\ x^o = S_{init} \\ x^T = S_{final} \end{array} \right.$$

Le vecteur Ψ sera solution du système adjoint

$$\left| \begin{array}{l} \Psi^{t+1} = \Psi^t - \frac{\partial V}{\partial x^t} - \bar{\gamma}^t + \bar{\delta}^t \\ \Psi^T = \sigma \end{array} \right.$$

avec les conditions d'exclusion

$$\left| \begin{array}{l} \bar{\gamma}^t (x^t - S_{min}^t) = 0 \\ \bar{\delta}^t (x^t - S_{max}^t) = 0 \end{array} \right.$$

Le vecteur Ψ^{t+1} s'interprètera comme la valeur de l'eau à chaque instant associée à la commande optimale u^t pour t = 0 à T-1 ; et l'on vérifiera de plus les conditions

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial u_i^t} - \Psi_i^{t+1} = 0 \qquad \begin{array}{|l} i = 1 \text{ à } n \\ t = 0 \text{ à } T-1 \end{array}}$$

Autrement dit, <u>à l'optimum, l'utilité marginale immédiate de l'eau est égale à la valeur future de l'eau</u>. On reconnaît là les conditions déjà énoncées par P. MASSE (4).

L'intérêt de la méthode numérique utilisée est simplement de permettre l'utilisation des deux concepts économiques d'utilité marginale immédiate et de valeur future de l'eau en dehors de l'optimum. Ceci permet, dès lors, une compréhension économique de la procédure de résolution utilisée.

BIBLIOGRAPHIE

LIONS - BENSOUSSAN - TEMAN (1) : Méthode de décomposition - cahier de l'IRIA n° 11

BOUILLAGUET - DUMONT - GAL - MONTFORT (2) : Gestion des réservoirs saisonniers (note interne du Service des Mouvements d'Energie EDF)

J.P. QUADRAT (3) : Méthodes de simulation en programmation dynamique stochastique (thèse de docteur-ingénieur)

P. MASSE (4) : Les réserves et la régulation de l'avenir - Hermann