IL TRIANGOLO RETTANGOLO EUCLIDEO:

RIFLESSIONI SUL PENTAGONO REGOLARE E LA SEZIONE AUREA

di Giuseppe Sansò

Giuseppe Sansò ✉
gps@pinosan.it
Collesalveti (LI)

Giuseppe Pantaleone Sansò, dopo aver completato il biennio di Ingegneria, si è abilitato all'insegnamento ed è stato docente di Tecnologia e Informatica nella scuola secondaria di primo grado. I suoi interessi di ricerca riguardano il calcolo combinatorio, l'esplorazione astronomica, la fotografia e la scrittura.

Nel tentativo di dimostrare il noto teorema *“I lati di un decagono e di un esagono regolari inscritti nella stessa circonferenza sono i cateti di un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa è il lato del pentagono regolare inscritto ancora in quella circonferenza”* (Proposizione 10 del Libro XIII degli *Elementi* di Euclide) mi sono imbattuto in un ulteriore e inedito metodo per la costruzione del pentagono regolare che ritengo possa essere di qualche interesse didattico.

Sono noti numerosi metodi per la costruzione del pentagono regolare escogitati, nel tempo, da autorevoli studiosi, proprio a partire dallo stesso Euclide e poi da Claudio Tolomeo. Tuttavia, nonostante l'intelligenza geometrica in essi contenuta, dubito vengano evocate e proposte sistematicamente agli studenti, persino dei Licei scientifici, le ragioni e le dimostrazioni di quei metodi.

In particolare, sia Euclide (negli *Elementi*) che Tolomeo (nell'*Almagesto*) costruiscono il pentagono partendo dalla circonferenza in cui risulterà inscritto. In seguito vennero sviluppati procedimenti per la costruzione di quel poligono regolare a partire dal lato. In ogni caso risulta essenziale l'esistenza di un “triangolo aureo” formato da due diagonali del pentagono che hanno origine in uno stesso vertice e dal lato ad esso opposto.

Un'altra figura geometrica che, più o meno esplicitamente, compare nella maggioranza delle costruzioni note è il rettangolo avente un lato doppio dell'altro (o il triangolo rettangolo con un cateto doppio dell'altro, come nella “costruzione con il cerchio di Carlyle”, oppure nella costruzione a tre cerchi) dal quale ricavare la parte del lato maggiore in rapporto aureo con questo. In effetti la figura di partenza, come fa Euclide, è un quadrato, ma in sostanza l'elemento essenziale è il rettangolo (o ancor più semplicemente il triangolo dai lati in proporzione 1:2).

© FOTOLIA

FIG. 1

Euclide, nella Proposizione 2.11 degli *Elementi*, costruisce il “rettangolo aureo” – con riga e compasso – partendo da un quadrato ABCD (Fig. 1), il cui lato corrisponderà al lato minore del rettangolo. Determinato il punto medio del lato AD, si punta su questo il compasso con apertura fino a C e si traccia l’arco che intersecherà il prolungamento del lato AD fino a G. In questo modo AG costituirà il lato maggiore del rettangolo aureo ABHG.

Si osservi che, essendo AD (perciò HG) sezione aurea di AG, sarebbe facilmente dimostrabile che DG è sezione aurea di EG, rendendo così interessante anche il triangolo rettangolo ECD di cui il cateto DC è doppio dell’altro cateto ED.

Il procedimento di individuazione della sezione aurea, come noto, deriva dalla costruzione tolemaica che fa riferimento alle corde di una circonferenza, come mostrato nella Figura 2:

FIG. 2

Dato un segmento AB, si conduce da B la perpendicolare ad AB stesso e si individua su questa il punto O tale che AB sia il doppio di BO. Si traccia la circonferenza con centro in O e raggio OB, tangente perciò ad AB nel punto B. Sulla retta AO si intercettano i punti C e D della circonferenza. Riportato il segmento AC su AB si determina il segmento AE. Questo è sezione aurea di AB, cioè $AB : AE = AE : EB$.

Infatti, considerando la potenza del punto A rispetto alla circonferenza, si ha $AB^2 = AC \cdot AD = AC \cdot (AC + AB)$, da cui si ricava $AB \cdot (AB - AC) = AC^2$.

Se centrando in O con apertura OA si tracciasse un arco di circonferenza fino ad intercettare sul prolungamento verso il basso di OB il punto F, il segmento BF (come AC, come AE) risulterebbe sezione aurea di AB. Anche qui, dunque partendo dal rettangolo – di cui, nella figura 2, compare solo la metà AOB – con lato AB doppio di BO. Il triangolo AOB, in definitiva, è analogo al triangolo ECD della Figura 1.

Anche la costruzione scaturita dalla ricerca di una dimostrazione “nuova” della Proposizione 10 del libro XIII di Euclide nasce da un triangolo rettangolo con i cateti in proporzione 1:2, ma il suo obiettivo, diversamente dai metodi precedentemente citati, risulta essere la ricerca del centro del pentagono regolare, data la misura del lato. La seguente Figura 3 ne mostra l’estrema semplicità, adatta all’uso nella didattica:

FIG. 3

Dato il segmento AB, lato del pentagono, e il suo centro C, si traccia BD ortogonale ad AB e ad esso congruente. Si unisce C con D e si individua su CD il punto E ad una distanza da C uguale alla misura di CB. Il punto O, intersezione tra la verticale su C e l’arco di circonferenza con centro A e raggio AE, è il centro della circonferenza circoscritta al pentagono ed avente raggio OA.

Questa costruzione è scaturita, non ricercata, dal tentativo di dimostrazione della Proposizione 10 del libro XIII di Euclide, cioè dell’esistenza di un triangolo rettangolo (che chiamerò “triangolo rettangolo euclideo”) i cui cateti sono la misura dei lati di un esagono e di un decagono regolari, entrambi inscritti in circonferenze di pari raggio (congruente al lato dell’esagono), mentre l’ipotenusa è il lato di un pentagono regolare, anch’esso iscritto nella stessa circonferenza.

Il triangolo rettangolo euclideo è facilmente ottenibile con il procedimento illustrato nella Figura 4:

Scuola e dintorni

FIG. 4

Si tracci la semicirconferenza avente centro in O, punto medio di AB, e lo stesso AB come diametro. Dal punto B si alzi la perpendicolare ad AB e dall'estremo A si tracci un segmento che formi un angolo di 45° con AB. Chiamato C il punto di intersezione tra i due segmenti, lo si unisca con il centro O ottenendo la mediana, rispetto ad AB, del triangolo ACB. Si indichi con D l'intersezione della semicirconferenza con il segmento OC. Unito il punto D con gli estremi A e B del segmento di partenza si ottiene un triangolo rettangolo ADB avente il cateto minore DB sezione aurea di quello maggiore AD. Per dimostrare questa relazione aggiungiamo poche linee di costruzione alla Figura 4 alleggerendola (Fig. 5), per il momento, dei cateti del triangolo rettangolo:

FIG. 5

Per evidenti motivi MD è il doppio di OM, XYDM è un quadrato ed il rettangolo XYZB è un "rettangolo aureo" in cui YD è sezione aurea di YZ.

Dalla precedente costruzione si evince facilmente $MD : MB = MB : (MD - MB)$.

Questo significa che "MB è sezione aurea di MD".

Dunque il triangolo MDB ha i due cateti in rapporto aureo.

Poiché ADB è simile ad esso, anche "DB è sezione aurea di AD" (Fig. 6).

FIG. 6

Per eleganza storica, è utile ricondurre la dimostrazione agli studi sulle corde di Tolomeo, per cui vale anche la seguente costruzione delle figure 7 e 8:

FIG. 7

FIG. 8

Proiettato il punto D sulla base del triangolo ABD ed ottenuta DS, altezza rispetto a AB, si determina il punto simmetrico P a B rispetto a S. Individuato Q al centro di AP, si intercetta sulla sua verticale il punto R su AD.

Si traccia la circonferenza avente centro R e raggio RP.

Il triangolo rettangolo ATP è congruente al triangolo SDB in quanto hanno un cateto della stessa misura (infatti $DS = VP = AP$, per costruzione) e angoli congruenti ($BAD = SDB$ come complementari di DBS).

Inoltre: $R\hat{P}Q = \widehat{BAD}$, $R\hat{P}Q = \widehat{SDB} = \widehat{PDS}$, $R\hat{P}Q + \widehat{DPR} = \widehat{PDS} + 90^\circ$, segue che $\widehat{DPR} = 90^\circ$.

DP è tangente in P del cerchio con centro in R, perciò
medio proporzionale tra DA e DT,

DA : DP = DP : DT ma poiché DP = AT, ne consegue che
DA : DP = DP : (DA - DP), perciò DB = DP sezione aurea
di DA.

Considerato il cateto AD come lato di un esagono e raggio della circonferenza ad esso circoscritta, allora DB è lato di un decagono inscritto nella stessa circonferenza. Infatti il lato del decagono forma, con due raggi adiacenti, un triangolo aureo con angolo al vertice (centro della circonferenza) di 36° ed angoli alla base congruenti di 72° : il lato del decagono è sezione aurea del raggio, perciò del lato dell'esagono inscritto nella stessa circonferenza.

Resta da dimostrare che l'ipotenusa AB è congruente al lato di un pentagono inscritto nella stessa circonferenza degli altri due poligoni. A questo scopo si traccia un arco di circonferenza con centro in B e raggio BD . Intersecherà il segmento ON nel punto L ed il lato BC nel punto E .

Ripresa la Figura 5, si otterrà così la seguente Figura 9:

FIG. 9

Obiettivo provvisorio del procedimento è dimostrare che l'angolo LBO misura 18° . Ma osservando la figura può risultare interessante segnalare che tale misura angolare, una volta dimostrata, è propria del rettangolo aureo, come nella figura seguente (Fig. 10):

FIG. 10

Alla tradizionale costruzione euclidea (Proposizione 2.11 degli *Elementi*) sono stati aggiunti l'arco DL, con centro in B, ed il segmento LB.

Tornando alla precedente Figura 9, riproposta nella parte interessata (Fig. 11), si osservano le relazioni che seguono:

FIG. 11

Applicazione del Teorema di Pitagora a MDB
(ricordando che $MD = 2 OM$)

$$MB^2 = DB^2 - MD^2$$

$$(a) \quad MB^2 = LB^2 - 4OM^2$$

Aureo su MDB

(XYZB è rettangolo aureo)

(b) $MB^2 = 2OM(2OM - MB)$

Pitagora a OLM

(c) $LM^2 = LO^2 + OM^2$

Pitagora a OLB

$$(d) LO^2 = LB^2 - (OM + MB)^2$$

Consequenzen

$$\text{da (d) } LO^2 = LB^2 - OM^2 - MB^2 - 2OM \cdot MB$$

$$\begin{aligned} \text{da (c) } LM^2 &= LB^2 - OM^2 - MB^2 - 2OM \cdot MB + OM^2 \\ LM^2 &= LB^2 - MB^2 - 2OM \cdot MB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{da (b) } LM^2 &= LB^2 - 2OM(2OM - MB) - 2OM \cdot MB \\ LM^2 &= LB^2 - 4OM^2 + 2OM \cdot MB - 2OM \cdot MB \end{aligned}$$

(e) $LM^2 = LB^2 - 4OM^2$

Conclusione: $LM = MB$
[confrontando la (a) con la (e)]

Scuola e dintorni

Costruito il triangolo XML con il punto X simmetrico di M rispetto ad ON , esso risulta isoscele e con il lato LM (essendo congruente con MB) in rapporto aureo con la base XM . Dunque si tratta di un “triangolo aureo” con angoli alla base MXL ed LMX di 36° e angolo al vertice XML di 108° . Ma se $LMX = 36^\circ$, allora MLB ed LBM (già appurato che il triangolo LMB è isoscele) misurano 18° .

In particolare, come si voleva, $LBO = 18^\circ$.

La determinazione di questo angolo è essenziale per completare la dimostrazione ma costituisce anche, come si è visto, l'arricchimento di conoscenza del rettangolo aureo.

Nella seguente Figura 12 è stata prolungata la verticale sul centro O della semicirconferenza e individuato il punto F

intersezione tra questa e l'arco con centro in E e raggio BD (in pratica il cateto BD del già denominato "triangolo euclideo" è stato riportato due volte: la prima in E e la seconda in F). È facilmente riconoscibile che FEBL è un parallelogramma con angolo in E pari a $90^\circ + 18^\circ = 108^\circ$.

Il triangolo FEB è isoscele e i suoi angoli alla base (FBE e EFB) sono di 36° . Dunque $FE = EB = BD$ è sezione aurea di FB (non tracciato). Ma essendo BD sezione aurea del cateto maggiore AD (qui non tracciato) ne consegue che $AD = FB$:

FIG. 12

Si può concludere affermando che un arco di circonferenza con centro in A e raggio AD intersecherebbe la verticale su O nel punto F, descrivendo il triangolo isoscele AFB i cui angoli alla base sono di 54° (nel vertice B si ha $90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$) e l'angolo al vertice di 72° . Spicchio quinto del pentagono regolare (Figura 13).

FIG. 13

Dunque AB, ipotenusa del triangolo rettangolo ADB, è il lato del pentagono regolare inscritto nella circonferenza in cui sono anche inscritti esagono e decagono regolari aventi per lati i cateti dello stesso triangolo. Il lato dell'esagono ne è anche raggio. ■

Costruzione completa (e inedita) del pentagono regolare dato il lato AB

Dato il lato AB, dall'estremo B si traccia la retta BD ad esso perpendicolare. Individuato il punto D tale che AD risulti congruente ad AB, si unisce C, punto medio del lato AB, con D.

Centrando in C , si traccia un arco di circonferenza che interseca il segmento CD nel punto E .

La distanza AE è raggio della circonferenza circoscritta al pentagono regolare avente lato AB . Dato il lato AB , dall'estremo B si traccia la retta BD ad esso perpendicolare. Individuato il punto D tale che BD risulti congruente ad AB , si unisce C , punto medio del lato AB , con D . Centrando in C si traccia un arco di circonferenza che interseca il segmento CD nel punto E . La distanza AE è raggio della circonferenza circoscritta al pentagono regolare avente lato AB . Pertanto l'arco centrato in A con raggio AE interseca la retta perpendicolare ad AB per C nel punto O , centro di tale circonferenza (il punto O può essere individuato, più direttamente, intersecando il precedente arco con quello di pari apertura ma con centro nel punto B). Tracciata questa, i vertici del pentagono regolare si individuano sulla stessa retta CO (vertice G) e con gli archi di circonferenza rispettivamente centrati in A e B e con apertura AB per i vertici F ed H .