Erratum à l'article “Relèvement des revêtements p -cycliques des courbes rationnelles semi-stables”^{*}

Sylvain Maugeais

Published online: 5 July 2006 – © Springer-Verlag 2006

Math. Ann. (2003) Digital object Identifier (DOI) 10.1007/s00208-003-0458-1

Published online: 13 August 2003 – © Springer-Verlag 2003

Let but de notre article [Mau03] était de démontrer le théorème suivant :

Théorème 0.1. *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, C/k une courbe stable. Supposons que C soit munie d’une action d’un groupe p -cyclique G tel que $p_a(C/G) = 0$. Alors il existe une courbe $\mathcal{C} \rightarrow \mathrm{Spec} k[[t]]$ génériquement lisse et munie d’une action de G , dont la fibre spéciale s’identifie de manière équivariante à C .*

L’erreur se situe au niveau du relèvement des composantes du lieu lisse fixes par G et où G agit trivialement (nous les nommerons radicielles par la suite, les autres composantes étant nommées étales). Plus précisément, pour chaque composante radicielle P , soit U l’ouvert de P complémentaire des points doubles α_i où P joint les composantes étales adjacentes à P . Sur un ouvert non vide V de U , on construit un torseur sous α_p d’équation $z^p = u$ où la différentielle du a des zéros aux points α_i de multiplicité imposée par la ramification en α_i de la composante étale passant par α_i . D’autre part, le torseur est “ramifié” aux pôles de du : l’équation $z^p = u$ introduit des singularités aux points où du s’annule, on ne peut pas identifier le schéma sous-jacent au torseur à $f^{-1}(U)$. Nous avons donc besoin que la différentielle du n’ait pas de zéros autres que les α_i . Ce point avait été omis dans la version publiée. Le but de cet erratum est de construire sur la droite projective P une forme différentielle exacte ayant des zéros imposés α_i avec des multiplicités imposées $\neq -1 \pmod p$, du moins lorsque les α_i sont en position générale (cf. lemme 1.4).

S. MAUGEAIS

SFB 478 - Geometrische Strukturen in der Mathematik,

Hittorfstr. 27, 48149 Münster, Germany

e-mail: maugeais@math.uni-muenster.de

^{*} The online version of the original article can be found at
<http://dx.doi.org/10.1007/s00208-003-0458-1>

Remerciements : Je tiens à remercier Qing Liu pour avoir découvert l’erreur dans l’article original et me l’avoir communiquée. Je remercie également Michel Raynaud pour une longue conversation qui m’a permis d’éclaircir plusieurs points. Par sa lecture minutieuse du texte, le referee a permis de nombreuses améliorations et corrections, qu’il en soit ici remercié.

1. Réduction géométrique

Dans un premier temps, nous allons réduire le problème au cas où les composantes radicielles ne rencontrent que des composantes étales. En particulier, cela rend inutiles les arbres de Hurwitz et la “récurrence sur les composantes” dans la démonstration de la proposition 5.1.

Lemme 1.1. *Donnons-nous une déformation équivariante $C_1/k[[t]]$ de C et une déformation équivariante $C_2/k((t))[[u]]$ de $C_1 \times k((t))$ qui soit génériquement lisse. Alors il existe une déformation équivariante $C_3/k[[s]]$ de C dont la fibre générique est lisse.*

Preuve : Semblable à celle du lemme 5.5 [Mau03]. □

Soit $V \subset C$ l’adhérence des points génériques $\eta \in C$ tel que $G \cdot \eta = \eta$ et tel que G agisse trivialement sur le corps résiduel $\kappa(\eta)$. Nous dirons que C est simple si V est une réunion disjointe de $\mathbb{P}_k^1$.

Lemme 1.2. *Pour montrer le théorème 1, on peut se restreindre au cas où C est simple et les points où V rencontre le reste de C sont en position générique.*

L’hypothèse de généricité ci-dessus signifie que le lemme est valide pour une famille finie de points $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ vivant à l’intérieur d’un ouvert non vide de $(\mathbb{P}_k^1)^\ell$.

Preuve : En effet, notons V' l’adhérence dans C du complémentaire de V . Notons $\mathcal{V} = V \times_k k[[t]]$. Pour chaque composante connexe V_i de V (on a donc V_i de genre 0), on peut trouver une déformation (équivariante) $\mathcal{V}_i/k[[t]]$ de V_i qui est génériquement isomorphe à $\mathbb{P}_{k((t))}^1$. Par suite, on peut recoller (de manière équivariante) les $\mathcal{V}_i$ et $\mathcal{V}'$ en une courbe $C_1/k[[t]]$ qui est génériquement simple. De plus, quitte à déformer le lieu de recollement, on peut supposer que les points où $\mathcal{V} \times k((t))$ rencontre le reste de $C \times k((t))$ sont en position générique.

Le lemme ci-dessus permet alors de conclure. □

Nous aurons également besoin d’une généralisation du lemme 4.4 [Mau03] qui permet de se passer de l’hypothèse (H) des théorèmes 4.9 et 5.1.

Lemme 1.3. *Soit $n \geq 0$ un entier, $R = k[[t]]$. Nous noterons s le point fermé de $\text{Spec } R$ et la restriction d’un objet au-dessus de $\text{Spec } R$ à s sera désignée par fibre spéciale de l’objet. Soit $f : \text{Spec } k[[u]] \rightarrow \text{Spec } k[[v]]$ un morphisme tel que le morphisme induit $\text{Spec } k((u)) \rightarrow \text{Spec } k((v))$ soit muni d’une structure de $\mathcal{M}_s^n$ -torseur de conducteur m avec $m \geq -1$ (cf. [Mau03] §3.2 pour la définition de $\mathcal{M}^n$). Alors il existe une action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $\text{Spec } R[[U]]$ telle que la fibre*

spéciale du morphisme quotient $\mathrm{Spec} R[[U]] \rightarrow (\mathrm{Spec} R[[U]])/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ soit f , et une structure de $\mathcal{M}^n$ -torseur sur $\mathrm{Spec} R[[U]]\{1/U\} \rightarrow \mathrm{Spec} R[[V]]\{1/V\}$ compatible (via $\psi_{n,k}$, §3.2 de [Mau03]) avec l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et dont la fibre spéciale est le $\mathcal{M}_s^n$ -torseur $\mathrm{Spec} k((u)) \rightarrow \mathrm{Spec} k((v))$.

Preuve : Si $n = 0$, le résultat s'obtient par changement de base. On peut donc supposer $n \geq 1$. Si $m = -1$, la preuve est la même que pour [Mau03], Lemme 4.4. Comme m est premier à p , on peut supposer que $m \geq 1$. Quitte à remplacer v par une autre uniformisante, on peut supposer que le morphisme $\mathrm{Spec} k((u)) \rightarrow \mathrm{Spec} k((v))$ s'identifie à $k((v)) \rightarrow k((v))[y]/(y^p - v^{-m})$ (car le corps k est algébriquement clos). Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $ap - bm = 1$. Quitte à changer d'uniformisante dans $k[[u]]$, on peut supposer que $u = v^a y^b$ (calcul classique).

Notons A la normalisation de $R[[V]]$ dans $\mathrm{Frac} R[[V]](Y)/(Y^p - t^{(p-1)n}Y - V^{-m})$. Notons de plus $U = V^a Y^b$. Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que $U \in A$. En effet, si tel est le cas alors on a un morphisme $R[[U]] \rightarrow A$ car A est complet (car fini sur $R[[V]]$) et ce morphisme est injectif par construction. Il est alors aisé de montrer que ce morphisme est surjectif car c'est le cas modulo t . De plus, A est muni d'une action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ compatible avec une structure de $\mathcal{M}^n$ -torseur sur $R[[U]]\{1/U\} = R[[V]]\{1/V\}[Y]/(Y^p - t^{(p-1)n}Y - V^{-m})$ qui induit la structure de α_p -torseur prescrite à la fibre spéciale (l'action étant donnée par $Y \mapsto Y + t^n$).

Montrons donc que $U \in A$. Tout d'abord, on voit que $\frac{1}{Y} \in A$. Par suite $1 - t^{(p-1)n}Y^{1-p}$ est inversible dans A . Or un simple calcul montre que

$$U^m = \frac{1}{Y(1 - t^{(p-1)n}Y^{p-1})^a}$$

donc U^m est entier sur A . Or $U \in \mathrm{Frac} A$ et A est normal. Donc $U \in A$. $\square$

Par suite, pour démontrer le théorème il suffit de corriger la proposition 5.1 à l'aide du lemme suivant (qui sert à trouver de bonnes structures de toseur) :

Lemme 1.4. *Soient $(\alpha_i) \in \mathbb{P}_k^1$ des points en nombre fini en position générique et $m_i \in \mathbb{N}$ des entiers > 0 premiers à p . Alors il existe une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{P}^1$ dont la différentielle n'a pour zéros que les α_i et ceci avec une multiplicité $m_i - 1$.*

Remarque 1.5. En procédant par déformation et en utilisant des résultats de dégénérescence démontrés par Henrio (non publiés), on peut enlever l'hypothèse de généricité des α_i dans le lemme ci-dessus. La preuve est trop longue pour être écrite ici et fera l'objet d'une publication séparée. D'autre part, il serait intéressant d'avoir une preuve plus directe de ce fait (sans passer par les déformations).

2. Démonstration du lemme 1.4

Notons $f = \prod_i (x - \alpha_i)^{n_i}$ avec $n_i := m_i - 1$ et e le degré de f .

Lemme 2.1. *Supposons qu'il existe un polynôme P de degré $\leq \lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor$ et non nul en les α_i tel que $f P dx$ soit exacte. Alors $\frac{f}{p^{p-1}} dx$ est exacte et une primitive répond à la question.*

Preuve : Comme le fait d'être exacte est stable par multiplication par une puissance p -ième, ce lemme est clair, sauf éventuellement en ce qui concerne l'existence d'un zéro à l'infini. Posons $z = \frac{1}{x}$. Alors

$$\text{ord}_{z=0} \frac{f}{p^{p-1}} dx = (p-1) \deg P - \deg f - 2 \leq -2$$

On n'a donc pas de zéro à l'infini. $\square$

On est donc ramené à prouver l'existence d'un polynôme P de petit degré tel que la forme différentielle $\omega_P := f P dx$ soit exacte.

Lemme 2.2. *Supposons que l'on puisse trouver un polynôme comme ci-dessus pour toute famille (α_i) finie et n_i vérifiant $n_i \leq p-2$. Alors on peut résoudre le problème dans le cas général.*

En particulier, ce lemme suffit à montrer complètement le théorème 0.1 dans le cas $p = 2$.

Preuve : En effet, notons $\tilde{n}_i$ le plus petit entier ≥ 0 tel que $\tilde{n}_i = n_i \pmod{p}$, et $\tilde{f} = \prod (x - \alpha_i)^{\tilde{n}_i}$. Par hypothèse on a $\tilde{n}_i \leq p-2$ pour tout i car $n_i \not\equiv -1 \pmod{p}$. Il existe donc P de degré $\leq \lfloor \frac{\sum \tilde{n}_i}{p-1} \rfloor$ tel que $P \tilde{f} dx$ soit exacte. Mais alors, $P f dx$ est exacte car $f/\tilde{f}$ est une puissance p -ième. $\square$

Nous pourrions donc nous restreindre au cas $n_i \leq p-2$ lorsque nous en aurons besoin. Il s'agit alors de trouver un polynôme P comme dans le lemme 2.1.

Pour cela, f étant fixée, nous allons étudier l'application k -linéaire (même $k[x^p]$ -linéaire en fait)

$$\phi_f : k[x] \rightarrow k[x]$$

définie par $\phi_f(Q) = (fQ)^{(p-1)}$.

Lemme 2.3. *La forme différentielle $(fP)dx$ est exacte si et seulement si $\phi_f(P) = 0$.*

Preuve : Classique, provient de l'étude de l'opérateur de Cartier. $\square$

On cherche donc des polynômes Q dans un sous-espace vectoriel.

Quelle que soit f , l'application ϕ_f n'est jamais injective. En effet, $\phi_f(f^{p-1}) = 0$ (car $(f^p)' = 0$). Nous noterons $d_0 = d_0(f)$ le plus petit degré des polynômes non nuls de $\ker \phi_f$. En particulier, si Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de $\ker \phi_f$ de degré d_0 , alors il existe $\lambda \in k$ tel que $Q_1 = \lambda Q_2$. On peut donc parler **du** polynôme de plus petit degré (à coefficient multiplicatif près). Nous le noterons P_f .

En général, d_0 ne dépend pas seulement du degré de f mais aussi de ses coefficients. Il est assez simple d'obtenir un majorant pour d_0 . Pour cela écrivons $f = \sum a_i x^i$ et les polynômes de degré $\leq d$ sous la forme $\sum b_j x^j$. Le lemme 2.3 nous dit que $W_d := \ker \phi_f \cap k[x]_{\leq d}$ est défini par les équations

$$\sum_{i+j=pc+p-1} a_i b_j = 0 \quad (2.1)$$

pour c vérifiant $0 \leq pc + p - 1 \leq e + d$. Notons $c_0(= c_0(d))$ le plus grand des c vérifiant cette inégalité. Supposons $d = \lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor$. La condition $pc_0 + p - 1 \leq e + d$ impose alors $c_0 < d$. Pour définir W_d on a donc un système de $c_0 + 1$ équations (au plus, éventuellement moins si $p - 1 > e + d$) à $d + 1 > c_0 + 1$ inconnues. Le sous-espace W est donc non trivial.

En résumé, on a démontré

Lemme 2.4. *On a $d_0(f) \leq \lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor$*

Parfois, on peut avoir d_0 plus petit que la borne ci-dessus, c'est le cas par exemple si $f = x^a$ avec $a \not\equiv -1 \pmod p$ puisqu'alors on peut prendre $Q = 1$ et donc $d_0 = 0$. Un phénomène plus problématique est celui de $f = x^{pa+p-1}$ car alors le plus petit polynôme est $Q = x$ mais ce dernier n'est pas premier à f . On remarquera que ces exemples ($f = x^a$ avec $a \geq p$ et $a \not\equiv -1 \pmod p$, et $f = x^{pa+p-1}$) ne font pas partie des cas qui nous intéressent.

Nous voulons alors considérer les polynômes f qui vérifient $d_0(f) < \lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor$. Pour cela, regardons la restriction $\tilde{\phi}_f$ de ϕ_f à $k[x]_{< \lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor}$. On voit alors que la condition $d_0(f) = \lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor$ équivaut à l'injectivité de $\tilde{\phi}_f$. La démonstration du lemme suivant est alors immédiate.

Lemme 2.5. *Notons $c(f) = \lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor - 1$. La famille $\{\phi_f(x^i)\}_{0 \leq i \leq c(f)}$ est libre si et seulement si $d_0(f) = \lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor$.*

Remarque 2.6. On voit que l'ensemble des polynômes f de degré n tels que $d_0(f) < \lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor$ est une sous-variété de $k[x]_{\leq n}$ définie par le fait que la matrice de $\tilde{\phi}_f$ (dont on voit qu'elle est carrée d'ordre $c(f) + 1$ et polynomiale en les coefficients de f) est non inversible, i.e. de déterminant nul.

Le lemme suivant est valable pour des entiers $n_i \leq p - 1$ (et pas seulement pour $n_i \leq p - 2$). Nous le citons donc dans le cas général.

Lemme 2.7. *Supposons les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$ génériques et $1 \leq n_i \leq p - 1$. Alors la famille $\{\phi_f(x^i)\}_{0 \leq i \leq c(f)}$ est libre et donc $d_0(f) = \lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor$.*

Preuve : On peut remarquer que cette propriété est invariante par translation sur x , ce lemme est donc équivalent à dire que $d_0(f) = \lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor$ pour $\alpha_1 = 0$.

On raisonne par récurrence sur le nombre d de variables et sur n_1 . Pour $d = 1$, c'est trivial (car alors $d_0 = 0$). On suppose donc le résultat vrai pour $d - 1$ et on se propose de rajouter une variable. Notons $g = f/(x - \alpha_1)$. L'hypothèse de récurrence sur n_1 et d impose que le lemme est vrai pour g , i.e. $d_0(g) = \lfloor \frac{\deg g}{p-1} \rfloor$.

Dans un premier temps, nous allons démontrer l'assertion suivante :

La famille $\{\phi_f(x^i)\}_{0 \leq i \leq c(g)}$ est libre

En particulier, si $p - 1 \nmid \deg f$ alors $c(g) = c(f)$ et donc $d_0(f) = \lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor$. Nous allons pour cela procéder en plusieurs étapes.

1ère étape : La famille $\{\phi_f(x^i)\}_{1 \leq i \leq c(g)}$ est libre

Pour cela, on raisonne par spécialisation. Tout d'abord, on peut supposer que $d \geq 2$. Supposons dans un premier temps que $n_1 + n_2 \leq p - 1$ et considérons le polynôme

$$h = (x - \alpha_1)^{n_1+n_2} \prod_{i>2} (x - \alpha_i)^{n_i}.$$

On voit que h est obtenu de f en spécialisant α_2 en α_1 (spécialisé a ici un sens car les α_i sont génériques).

Par hypothèse de récurrence sur d on voit que les $\{\phi_h(x^i)\}_{1 \leq i \leq c(h)}$ forment une famille libre. Comme cette famille est obtenue des $\{\phi_f(x^i)\}_{1 \leq i \leq c(f)}$ par spécialisation, cette dernière est également libre (en particulier, on voit que dans ce cas le lemme est démontré).

Supposons maintenant que $n_1 + n_2 \geq p - 1$ (par hypothèse on a toutefois $n_1 + n_2 - (p - 1) \leq p - 1$) et considérons le polynôme

$$h = x^{n_1+n_2+1-p} \prod_{i>2} (x - \alpha_i)^{n_i}.$$

D'après la remarque du début du lemme, on peut supposer que $\alpha_1 = 0$. Le polynôme $x^p h$ est alors obtenu de $x f$ en spécialisant α_2 en zéro. Par hypothèse de récurrence la famille

$$\{\phi_h(x^i)\}_{0 \leq i \leq c(h)=c(f)-1}$$

est libre. Par suite, on voit que la famille

$$\{x^p \phi_h(x^i) = \phi_h(x^{i+p}) = \phi_{x^p h}(x^i)\}_{0 \leq i \leq c(h)=c(f)-1}$$

est libre. Or cette famille est obtenue de la famille

$$\{\phi_{x f}(x^i) = \phi_f(x^{i+1})\}_{0 \leq i \leq c(h)=c(f)-1}$$

par spécialisation, cela montre que cette dernière est libre. C'est-à-dire que la famille

$$\{\phi_f(x^i)\}_{1 \leq i \leq c(f)}$$

est libre. Ce qu'il fallait démontrer.

2ème étape La famille $\{\phi_f(x^i)\}_{0 \leq i \leq c(g)}$ est libre

La démonstration se fait par déformation. Raisonnons par l'absurde et supposons cette famille liée pour tout α_1 . C'est-à-dire qu'il existe une combinaison linéaire à coefficients $\lambda_i \in k(\alpha_j)$ tel que

$$(*) \quad \sum_i \lambda_i \phi_f(x^i) = 0$$

Par suite, si on se place au voisinage de $\alpha_1 = 0$, on peut supposer (quitte à multiplier par une constante) que les λ_i sont réguliers au voisinage de $\alpha_1 = 0$ et qu'il existe un i tel que la réduction de λ_i en $\alpha_1 = 0$ soit non nulle.

On regarde alors la réduction $\bar{f}$ de f en $\alpha_1 = 0$. Nous allons considérer une déformation f^ϵ de $\bar{f}$ sur $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ (en fait $k[\alpha_1]/(\alpha_1^2)$ mais on travaille avec ϵ pour éviter les confusions) et écrire que la famille $\{\phi_{f^\epsilon}(x^i)\}_{0 \leq i \leq c(g)}$ est liée, ceci nous permettra de voir que les λ_i sont tous nuls en réduction, ce qui fournira la contradiction souhaitée.

Par hypothèse de récurrence, la famille $\{\phi_{\bar{g}}(x^i)\}_{0 \leq i \leq c(g)}$ est libre (en effet, d'après la remarque du début du lemme, le résultat est vrai pour $\alpha_1 = 0$).

Par suite, comme $\phi_{\bar{g}}(x^i) = \phi_{x\bar{g}}(x^{i-1}) = \phi_{\bar{f}}(x^{i-1})$ si $i \geq 1$, cela impose que la famille

$$\{\phi_{\bar{f}}(x^i)\}_{0 \leq i \leq c(g)-1}$$

est libre.

Considérons la déformation de $\bar{f}$ définie sur $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ par

$$f^\epsilon = (x + \epsilon)^{n_1} \prod_{i>1} (x - \alpha_i)^{n_i}.$$

On voit aisément que

$$f^\epsilon = \bar{f} + \epsilon n_1 \bar{g}.$$

Par suite,

$$\phi_{f^\epsilon}(x^i) = \phi_{\bar{f}}(x^i) + \epsilon n_1 \phi_{\bar{g}}(x^i).$$

Notons $\mu_i + \epsilon \mu'_i$ la réduction de λ_i modulo $\alpha_1^2 (= \epsilon^2)$. En particulier par hypothèse les μ_i sont non tous nuls. La condition $(*)$ équivaut alors à

$$(**) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{c(g)} \mu_i \phi_{\bar{f}}(x^i) & = 0 \\ \sum_{i=0}^{c(g)} n_1 \mu_i \phi_{\bar{g}}(x^i) + \mu'_i \phi_{\bar{f}}(x^i) & = 0 \end{cases}$$

Comme la famille

$$\{\phi_{\bar{f}}(x^i)\}_{0 \leq i \leq c(g)-1}$$

est libre, la première équation impose que $\mu_{c(g)} \neq 0$. En substituant dans la deuxième équation, on trouve alors

$$\sum_{i=0}^{c(g)} \mu_i n_1 \phi_{\bar{g}}(x^i) + \sum_{i=0}^{c(g)-1} \left(\mu'_i - \frac{\mu'_{c(g)} \mu_i}{\mu_{c(g)}} \right) \phi_{\bar{f}}(x^i) = 0.$$

Or $\phi_{\bar{f}}(x^i) = \phi_{\bar{g}}(x^{i+1})$ on a donc

$$\sum_{i=0}^{c(g)} \mu_i n_1 \phi_{\bar{g}}(x^i) + \sum_{i=1}^{c(g)} \left(\mu'_{i-1} - \frac{\mu'_{c(g)} \mu_{i-1}}{\mu_{c(g)}} \right) \phi_{\bar{g}}(x^i) = 0.$$

Mais la famille $\{\phi_{\bar{g}}(x^i)\}_{0 \leq i \leq c(g)}$ est libre (par hypothèse de récurrence) donc tous les coefficients de la combinaison linéaire ci-dessus sont nuls. En particulier le coefficient de $\phi_{\bar{g}}(x^0)$, c'est-à-dire $n_1 \mu_0 = 0$. Comme $n_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, cela impose $\mu_0 = 0$.

Par suite, la première ligne de (**) nous dit que $\sum_{i=1}^{c(g)} \mu_i \phi_{\bar{f}}(x^i) = 0$ et que les coefficients sont non tous nuls (car $\mu_{c(g)} \neq 0$). Mais cela contredit la première étape.

Il nous reste alors à montrer l'assertion suivante

Si $p - 1 \mid e$ **alors** $d_0(f) = d_0(g) + 1$

D'après la première partie de la démonstration, on sait que $d_0(f) \geq d_0(g) = \lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor - 1$ (la dernière égalité provenant de l'hypothèse de récurrence).

Raisonnons par l'absurde et supposons $d_0(f) = \lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor - 1$,

Le terme de plus haut degré de $f P_f$ est alors $x^{((p-1)\lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor - 1)} x^{\lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor - 1} = x^{p\lfloor \frac{e}{p-1} \rfloor - 1}$ ce qui est absurde car la dérivée $(p-1)$ -ième doit être nulle. $\square$

Lemme 2.8. *Supposons les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$ génériques et $n_i \leq p - 2$. Alors f et P_f sont premiers entre eux.*

En particulier, comme les α_i sont génériques, on peut supposer que P_f ne s'annule en aucun des α_i (même si $n_i = 0$).

Preuve : On raisonne par récurrence sur le degré de f . Pour $d = 1$, c'est trivial car alors $d_0 = 0$.

Supposons que P_f et f ne sont pas premiers entre eux. On peut donc supposer que $P_f(\alpha_1) = 0$. On a alors $\left(\frac{P_f}{x - \alpha_1} (x - \alpha_1) f \right)^{(p-1)} = 0$. Par définition de $P_{(x - \alpha_1)f}$ et surtout de son degré, cela impose que

$$\left\lfloor \frac{e}{p-1} \right\rfloor - 1 = \deg \frac{P_f}{x - \alpha_1} \geq \deg P_{(x - \alpha_1)f} = \left\lfloor \frac{e+1}{p-1} \right\rfloor$$

(les égalités proviennent du lemme 2.7, la dernière étant valide car l'ordre de α_1 dans $(x - \alpha_1)f$ est $n_1 + 1 \leq p - 1$), ce qui est absurde. $\square$

Bibliographie

[Mau03] S. Maugeais, *Relèvement des revêtements p -cycliques des courbes rationnelles semi-stables*, Math. Ann. **327** (2003), no. 2, 365–393.