UN EXEMPLE DE J. PITMAN

par M. Yor

Soit (X_t) un mouvement brownien issu de 0, et soit H l'ensemble de ses zéros. On peut se demander si toutes les martingales de la filtration naturelle de X qui sont nulles sur H sont de la forme $K_{\tau_t} X_t$, où K est un processus prévisible, et τ_t est le dernier zéro avant t (voir dans ce volume les articles sur le balayage). Lors de son passage à Paris en Juin 1978, Pitman nous a montré un exemple d'une intégrale stochastique $Y_t = \int_0^t h_s dX_s$, où h n'est pas constante sur les intervalles contigus à H , qui a les mêmes zéros que X . Voici cet exemple.

Nous posons $T = \inf\{t : X_t = 1\}$

$U = \inf\{t > T : X_t = 1/2\}$

$D = \inf\{t > T : X_t = 0\}$

de sorte que $T \leq U \leq D$. D'autre part

$V = \inf\{t > T : X_t = 3/2\}$

$W = U \vee V$

Puis nous posons

$$h_s = 1]0, W](s) + 1\{W=U\}^1]W, \infty[(s) + 3 \cdot 1\{W < U\}^1]U, \infty[(s)$$

Ce processus est prévisible. Si $W=U$, i.e. si $U \leq V$, on a $h(\omega)=1$ et la trajectoire de $Y = \int_0^t h_s dX_s$ est égale à celle de X . Si $W < U$, i.e. si la trajectoire ω monte en $3/2$ avant de redescendre en $1/2$, la trajectoire de Y vaut

$$X_t \text{ pour } 0 \leq t \leq V=W, \quad 3/2 \text{ pour } V \leq t \leq U, \quad 3X_t \text{ pour } t \geq U$$

Dans les deux cas, elle a les mêmes zéros que la trajectoire de X . Sur le dessin suivant, la trajectoire de X est en trait plein, celle de Y en pointillé :