PEIRCE ET LE CONTINU *

Marco PANZA

Au début de 1898, à l'initiative de William James, Charles Sanders Peirce fut invité à retourner à Cambridge, où il était né en 1839, pour y tenir huit conférences, dans le cadre des conférences de Cambridge, organisées par Sara Bull, dans sa propriété de Brattle Street. Dans les intentions de James, cette invitation avait trois objectifs : permettre à Peirce — dont le travail solitaire et non rémunéré se poursuivait depuis maintes années, dans sa maison de Pennsylvanie — d'exposer publiquement certaines de ses nombreuses idées à un public issu de l'université de Harvard ; l'obliger pour l'occasion à mettre ses idées dans une forme apte à la publication ; lui assurer un modeste revenu. Les trois objectifs furent atteints, à deux précisions près : Peirce ne se contenta pas d'exposer quelques idées, mais saisit l'occasion pour fournir un exposé relativement élémentaire d'un véritable système philosophique ; bien que soigneusement rédigées, les huit conférences ne furent pas publiées, du vivant de Peirce. L'édition de Kenneth Laine Ketner est la première publication intégrale¹.

Celle-ci n'est pas seulement un outil de première importance pour les spécialistes². Grâce à l'introduction et aux commentaires éclairants et profonds de Kenneth Laine Ketner et Hilary Putnam, elle constitue aussi un moyen de diffusion de la pensée de Peirce — dans un de ses moments d'élaboration les plus clairs et complets — auprès d'un public plus large

* À propos de : Charles Sanders PEIRCE, *Le Raisonnement et la logique des choses. Les conférences de Cambridge (1898)*. Éd. anglo-américaine par Kenneth Laine KETNER, introd. par Kenneth Laine KETNER et Hilary PUTNAM, trad. de l'anglais par Christiane CHAUVIRE, Pierre THIBAUD et Claudine TIERCELIN. Paris, Cerf, 1995. 14,5 × 23,5, 367 p., index (Passages) [éd. orig. : *Reasoning and the logic of things*, Cambridge, MA, Harvard University Press, 1992].

1. Certains morceaux ont été depuis publiés dans le désordre dans les *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, 8 vol., éd. par Charles HARSTHORNE, Paul WEISS et Arthur BURKS, Cambridge, MA, Harvard University Press, 1931-1958 (cité par la suite comme CP).

2. Surtout après la nouvelle de l'interruption de la publication des *Writings of Charles Sanders Peirce*, éd. par Max FISCH *et al.*, Bloomington and Indianapolis, Indiana University Press, 1982-1992 (5 volumes parus contenant les écrits de 1857 à 1886) qui, en suivant un critère chronologique, était parvenue à mettre de l'ordre dans la confusion des *Collected Papers*.

d'étudiants et de chercheurs. Bien qu'elle n'ajoute rien à l'édition de Ketner et Putnam, la traduction française est ainsi bienvenue et ne manquera certes pas d'avoir d'heureuses conséquences.

Bien que peu de philosophes aient été attirés autant que Peirce par la perspective d'un système, et même d'une véritable cosmologie, on ne parvient pas à trouver dans les écrits de celui-ci une telle exposition organique et définitive de sa philosophie. En évolution permanente, à l'image du *kosmos* qu'il s'efforce d'expliquer, la pensée de Peirce ne s'arrête jamais pour montrer ses conclusions : elle se montre toujours au travail ; elle revient sur elle-même, se complète, se contredit, s'améliore, avoue ses faiblesses et fait l'état de ses espérances. Ainsi, bien que, dans ses huit conférences de Cambridge, Peirce ait, certes, tenté d'exposer sa philosophie comme un tout organique, on n'y trouve que la photocopie d'un stade dans l'évolution de sa pensée. Cela n'est nulle part aussi évident que dans le traitement de la continuité et du continu, un des thèmes centraux et récurrents des conférences de Cambridge. C'est à ce problème que se limitera le bref commentaire qui suit.

Qu'il s'agisse d'une question nodale, c'est aussi l'opinion de Ketner et Putnam, qui lui consacrent un long paragraphe dans l'introduction (p. 53-75)³, visant par ailleurs à reconstruire les événements externes qui précédèrent et préparèrent les conférences. Mises à part de nombreuses remarques isolées, Peirce y revient de manière spécifique au cours de deux conférences, la troisième et la huitième. Il faut d'abord résumer ce qu'il en dit dans la troisième conférence, dans un texte d'autant plus significatif qu'on ne le retrouve pas dans les *Collected Papers*.

Peirce y qualifie de continue une « collection » qui a la même « multitude » que la collection de toutes les collections possibles de ses éléments (p. 216). Pour donner un sens à l'argument de Peirce (p. 213-216), il ne semble guère nécessaire de définir positivement les notions de collection et de multitude. Il suffit de savoir ce que cela signifie que la multitude d'une collection d'individus distincts — disons, pour simplifier, bien que le terme ne soit pas de Peirce, un ensemble — soit la même que celle d'un autre ensemble, ou, le cas échéant, ce que cela signifie qu'elle soit plus grande ou plus petite que celle-ci. C'est ce que le lecteur peut aisément déduire du déroulement de l'argumentation : deux ensembles ont la même multitude si et seulement si les individus qui les composent sont entre eux en correspondance biunivoque ; un de ces ensembles a en revanche une multitude plus grande que l'autre si les individus de ce dernier sont en correspondance biunivoque avec les individus d'une partie propre du premier. Parmi

3. L'indication des pages entre parenthèses renvoie à l'édition française du texte cité à la note(*).

les ensembles, nous dit Peirce, certains sont finis. Cela ne signifie guère qu'ils sont composés par un nombre fini d'individus (une définition de la sorte empêcherait de définir les nombres entiers comme les caractères communs de tous les ensembles finis de même multitude, ce qui paraît en revanche une définition permise par Peirce), mais plutôt qu'ils satisfont le « syllogisme de la quantité transposée » (p. 214)⁴ — ce qui est une belle caractérisation non constructive de la finitude ! L'ensemble composé par toutes les classes d'équivalences possibles d'ensembles finis de même multitude a par suite une multitude plus grande de n'importe quel ensemble fini. Si, de nouveau, l'on abandonne Peirce et que l'on utilise les chiffres arabes pour indiquer ces classes d'équivalence (ce qui correspond à la définition précédente du nombre entier), cet ensemble se représente ainsi : $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, et peut être dénoté par la lettre majuscule « N ». Comme tout ensemble fini a une multitude plus petite que cet ensemble et comme aucun ensemble infini — c'est-à-dire non-fini⁵ — ne peut avoir à son tour une multitude plus petite, il s'ensuit que la multitude de cet ensemble (qui est d'ailleurs la multitude de tout ensemble qui satisfait à la règle d'induction) est la plus petite parmi toutes les multitudes d'ensembles infinis. En acceptant un analogue de l'hypothèse du continu, Peirce suppose ensuite que la multitude immédiatement supérieure est celle de l'ensemble de tous les sous-ensembles possibles de N , qu'on pourra indiquer par le symbole « $\mathcal{P}(N)$ ». En continuant de la même manière, on aura une progression d'ensembles qu'on pourra noter par « $\mathcal{P}^2(N)$, $\mathcal{P}^3(N)$, $\mathcal{P}^4(N)$... ». Il suffit alors à Peirce de démontrer qu'aucun ensemble ne peut avoir la même multitude que l'ensemble de tous ses sous-ensembles, pour transformer cette progression d'ensembles dans une progression de multitudes. Cela étant, laissons la parole à Peirce lui-même (p. 216) :

« [...] considérons maintenant une collection contenant un individu pour tout individu d'une collection de collections comprenant une collection de toute

4. Pour cette dénomination, qui n'est pas reprise dans les conférences de Cambridge, cf. C. S. PEIRCE, « The law of mind », *The Monist*, vol. 2, 1892, p. 533-559, repr. in *CP*, 6. 102-163, en part. 6. 114 (le premier chiffre arabe correspond au numéro du volume, et les nombres qui suivent après le point aux numéros des morceaux). Voici comment Peirce expose ce syllogisme dans la troisième conférence de Cambridge (p. 216) : « [...] s'il y a une relation dans laquelle chaque individu dans un tel système se tient par rapport à quelque autre mais aucun tiers ne se tient par rapport à cet autre, alors, par rapport à chaque individu du système, quelque autre individu se tient dans cette relation. » Peirce avait été bien plus explicite en 1892, [voir art. cit. supra, repr. in *CP*, 6. 114] : « Balzac, in the introduction of his *Physiologie du mariage*, remarks that every young Frenchman boats of having seduced some French woman. Now, as a woman can only be seduced once, and there are no more French women than Frenchmen, it follows, if these boats are true, that no French woman escape seduction. If their number be finite, the reasoning holds. But since the population is continually increasing, and the seduced are on the average younger than the seducers, the conclusion need not be true. »

5. *CP*, 3. 564.

multitude non dénombrable. C'est-à-dire que cette collection se composera de toutes les multitudes finies ainsi que de toutes les collections possibles de ces multitudes, ainsi que de toutes les collections possibles de collections de ces multitudes, et ainsi de suite à l'infini. Cette collection est évidemment de multitude aussi grande que celle de toutes les collections possibles de ces éléments. Mais nous venons de voir que ceci ne peut être vrai de toute collection dont les individus sont distincts des autres [Peirce énonce ce résultat peut avant dans sa conférence]. En conséquence nous constatons que nous avons maintenant atteint une multitude tellement grande que les individus d'une telle collection se fondent les uns dans les autres et perdent leurs identités distinctes. Une telle collection est *continue*. »

Considérons d'abord la deuxième des deux caractérisations de ce que Peirce appelle une « collection continue », celle qui intervient dans le passage cité après la locution « c'est-à-dire ». La manière la plus naturelle pour nous de représenter l'objet qui correspond à cette description est de le représenter comme l'union infinie $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i(N)$, où l'indice i varie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels. Pourtant, si on adopte cette représentation, la deuxième caractérisation de ce que Peirce appelle une « collection continue » n'est équivalente à la première (celle qui précède la locution « c'est-à-dire ») qu'à la condition de ne pas étendre la succession des cardinaux au transfini plein de la théorie des ensembles, c'est-à-dire de n'accepter comme cardinaux que les cardinaux des ensembles $\mathcal{P}^i(N)$, où i est justement un nombre naturel quelconque⁶. Or, cette condition pose un problème assez délicat. Si on imagine que dans la théorie des ensembles de Peirce, il n'y a pas de cardinaux au-delà des $k_i = \text{Card.}(\mathcal{P}^i(N))$, alors l'union $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i(N)$ est effectivement, comme Peirce le veut, une « classe propre » dans cette théorie (c'est-à-dire une classe « trop grande » pour être un ensemble). La raison est qu'on ne dispose pas de cardinaux suffisants pour « compter », parmi les sous-ensembles de $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i(N)$, ceux qui sont composés par l'union de sous-ensembles non vides de plusieurs ensembles $\mathcal{P}^i(N)$ distincts. Alors $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i(N)$ correspond bien, comme Peirce le prétend, à la collection de tous ses sous-ensembles possibles et elle n'est pas un ensemble. Cependant, une telle théorie des ensembles n'est pas seulement très difficilement formalisable, mais elle est aussi fort peu plausible, car il apparaît étrange de ne pas imaginer que la succession des cardinaux aille

6. Bien que cela ne soit pas logiquement nécessaire, il semble d'après le langage de Peirce que celui-ci accepte aussi implicitement, l'hypothèse généralisée du continu, qui affirme qu'il n'y a pas d'autres cardinaux entre celui de l'ensemble $\mathcal{P}^i(N)$ et celui de l'ensemble $\mathcal{P}^{i+1}(N)$. Cf., sur ce point, l'introduction de PUTNAM et KETNER, p. 65, n. 1.

au-delà des cardinaux des $\mathcal{P}^i(N)$, i étant un nombre naturel, une fois que l'on a accepté d'aller au-delà du dénombrable dans la hiérarchie des ensembles. Or, si on accepte des cardinaux de toutes sortes d'infinités, la situation change et il n'est plus possible d'affirmer que l'union $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i(N)$ n'est pas un ensemble, car sa cardinalité est alors strictement inférieure à celle de l'ensemble de tous ses sous-ensembles. Pour construire une classe propre — qui serait d'ailleurs celle que dans la théorie des ensembles de John von Neumann on appelle V —, nous devons continuer l'itération de Peirce au-delà de l'infini dénombrable, en réalisant une *induction transfinie*.

Il est difficile de dire laquelle parmi ces deux possibilités est celle implicitement présentée par Peirce — en une époque où la formalisation moderne de la théorie des ensembles était loin d'être disponible — et même d'exclure que Peirce a ici simplement commis une erreur⁷. Une chose est pourtant claire, et c'est ce qui nous intéresse ici le plus : pour Peirce, un continu est une collection qui n'est pas une collection d'individus distincts, une classe qui ne peut pas être pensée comme un ensemble, en termes modernes, une classe propre.

Peirce n'a aucune hésitation à propos de la légitimité d'un tel objet. Il prétend même qu'une circonférence est un exemple de collection continue, car elle est décrite par le mouvement d'une particule et se compose donc « des points que cette particule a occupés » pendant le temps de son mouvement, bien qu'« aucun point de cette ligne ne se différencie absolument, quant à son identité, de tout autre » (p. 216).

Voilà un argument qui contredit l'isomorphisme couramment établi entre une ligne géométrique et l'ensemble des nombres réels (dont la « multitude » est celle de $\mathcal{P}(N)$). Dans leur introduction (p. 55), Ketner et Putnam nous disent que Peirce « rejette complètement » cet isomorphisme, mais ne signalent pas qu'il l'avait lui-même affirmé en 1892⁸ et qu'il ne pouvait pas en méconnaître ou rejeter la preuve qui est aujourd'hui habituelle. Pour établir cette preuve, il suffit d'observer que la succession de Cauchy de rationnels qui définit tout nombre réel peut s'interpréter comme la succession des mesures approchées d'un (et d'un seul) segment et que pour tout segment il est possible de construire une succession de Cauchy interprétable de cette manière. La question est alors la suivante : cette preuve est-elle vraiment une preuve de l'isomorphisme énoncé ? La réponse de Peirce est implicitement négative et cela me semble largement justifié. Car il ne s'agit jamais que d'une preuve de l'isomorphisme entre la classe des classes d'équivalence des segments géométriquement superposables

7. Sur toute la question, cf., en tout cas, les remarques de PUTNAM et KETNER, dans leur introduction (p. 65-66), qui restent pourtant assez vagues à ce sujet.

8. *Art. cit. supra* n. 4, repr. in *CP*, 6. 118.

(ou plus simplement la classe de tous les segments géométriquement différents possibles) et l'ensemble des nombres réels. Pour passer de cet isomorphisme à l'autre, il faut assumer que la droite géométrique est composée par les extrémités non géométriquement superposées de tous les segments géométriquement différents qu'on peut prendre sur elle. En d'autres termes, il faut interpréter un segment comme un demi-ouvert dans $\mathbb{R}$. Et la manière plus simple de faire cela est justement d'affirmer *a priori* l'isomorphisme qu'on voudrait prouver.

On comprend alors la raison qui a poussé Peirce à qualifier plus tard (respectivement en 1906 et 1911) son article de 1892 de « *blundering* » et « *crude* »⁹ : il semble confondre, comme une grande partie des mathématiciens du xx^e siècle, la question de la nature du continu avec celle de la mesure d'un continu tel que la droite géométrique. Cette confusion résulte clairement de l'argument de Gödel que Ketner et Putnam rappellent fort opportunément (p. 56) : si on sépare $\mathbb{R}$ en deux demi-ouverts, en prenant un de ses « points » comme une frontière, on ne retrouve guère deux demi-ouverts symétriques par rapport à ce point ; au contraire, si on sépare la droite géométrique de la même manière, on retrouve bien deux segments qui semblent être symétriques par rapport à leur frontière commune (ainsi, si on veut représenter un segment par un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on doit choisir entre la satisfaction des conditions d'additivité — ce qui empêche de le représenter autant par un ouvert, que par un fermé — et la conservation d'une telle symétrie).

Pourtant, une confusion a été rarement aussi féconde que celle-ci, car elle est à coup sûr à l'origine de l'introduction du continu en tant qu'objet mathématique. La question mathématique qui semble alors se poser à Peirce (et à tous ceux qui rejettent cette confusion) est la suivante : peut-on construire un objet mathématique, essentiellement différent de $\mathbb{R}$, qui réponde non seulement aux exigences de la mesure, mais aussi à celles de l'expression objective de l'être un, en tant que un ? Cette deuxième exigence est aussi ancienne que la première, car on la retrouve affirmée en toutes lettres dans la *Physique* d'Aristote.

Ketner et Putnam interprètent les nombreuses prises de position de Peirce — autant dans les conférences de Cambridge qu'ailleurs¹⁰ — en faveur d'une interprétation infinitésimaliste de la droite géométrique, comme l'indice d'une conception du continu en quelque sorte similaire à celle proposée par l'analyse non standard. Cela, avec une précision de taille : Peirce « ne propose pas d'ajouter des nombres non standard au système des nombres réels », mais simplement « de dire qu'il y a des points

9. CP, 6. 174 et 6. 182.

10. Des références sont données, p. 61.

non standard sur la ligne géométrique » (p. 66); ce qu'en général on appelle « points » seraient pour Peirce des « monades ». Cette interprétation s'accorde parfaitement avec un texte de 1893¹¹. Dans ce texte, Peirce ne semble pas avoir encore complètement abandonné l'espoir de retrouver une définition convenable du continu par une correction, en un sens non métrique, de la définition de Cantor (consistant dans l'introduction d'un analogue de l'axiome de la borne supérieure). Il interprète cependant le continu ainsi défini en termes infinitésimaux, en affirmant que la partition d'un segment en 2^c parties (c étant, en termes cantorien, la cardinalité de $\mathbb{Q}$) produit non pas des points, mais des parties structurellement similaires au segment de départ. Pourtant, l'ensemble $^*\mathbb{R}$ de Robinson ou le $\mathbb{R}$ de Nelson sont justement des ensembles et il me semble bien difficile de justifier une interprétation de ce que Peirce appelle une collection continue dans les termes de ces ensembles ou d'autres objets analogues.

En 1898, Peirce semble désormais avoir abandonné l'idée de comprendre la nature du continu grâce à une lecture infinitésimaliste et topologique (ou du moins non métrique) de la définition de Cantor. S'il continue ici et là à parler d'infinitésimaux, il me semble qu'il n'a d'autre intention que de dénoncer l'insuffisance du point de vue de la mesure, quant à la question de la nature de l'un. Cette nature — cela me semble être le point essentiel de la conception avancée par Peirce dans les conférences de Cambridge — n'est pas celle d'un ensemble. Une expression objective de l'être un ne peut être cherchée que dans un objet mathématique autre qu'un ensemble. L'idée d'agrégat potentiel, avancée lors de la huitième conférence, va dans ce sens. Le texte en question est connu, car il correspond au paragraphe 6.185 des *Collected Papers*, qui contiennent par ailleurs, dans les paragraphes suivants, une grande partie de cette conférence¹². Si l'on s'en tient à cette partie, déjà connue, de la huitième conférence, on ne trouve pas grand-chose de nouveau pour mieux comprendre en termes mathématiques l'idée exposée dans la troisième conférence. Bien plus intéressantes, à ce propos, sont en revanche les parties omises par les éditeurs scélérats des *Collected Papers*. En particulier celle (mathématiquement trop complexe pour être présentée ici dans le détail) consacrée aux nombres de Listing (p. 324-328). L'idée qui semble apparaître dans la discussion de Peirce est celle d'une caractérisation purement corrélatrice et topologique du continu. On retrouve une idée similaire (mais sans aucune référence aux nombres de Listing) dans une lettre de 1900 à l'éditeur de *Science*¹³. Ici Peirce emploie le terme « ligne » pour

11. CP, 4. 125-126.

12. J'ai, de mon côté, discuté cette suggestion de Peirce dans mon article « De la continuité comme concept au continu comme objet », in Jean-Michel SALANSKIS et Hourya SINACEUR, éd., *Le Labyrinthe du continu*, Paris, Springer France, 1992, p. 16-30.

13. CP, 3. 563-570.

indiquer un objet, disons Σ , qui satisfait les postulats suivants¹⁴ : *i*) « les points peuvent être déterminés dans une certaine relation » à lui, qu'on pourrait qualifier de la relation de « gésir sur » ; *ii*) quatre points différents gisant sur Σ étant déterminés, chacun d'eux « est séparé d'un des autres par les deux restants » ; *iii*) pour n'importe quels trois points A , B et C gisant sur Σ , « toute multitude de points peut être déterminée » sur Σ de telle manière que chacun d'entre eux est séparé de A par B et C . Le caractère topologique d'une telle définition est fort douteux, ainsi qu'est douteuse l'interprétation qu'elle appelle¹⁵. Ce qui est important est que, d'après Peirce, Σ ne peut pas être un ensemble, et ne peut donc être conçu autrement que comme une collection continue, au sens de la troisième conférence de Cambridge.

S'il est ainsi, tout ensemble de points (c'est-à-dire d'objets qui gisent sur Σ), quelle que soit sa multitude, peut être déterminé sur Σ . Pourtant, précise Peirce, cette possibilité ne relève pas de nous, mais de la nature elle-même¹⁶. En d'autres termes (si je ne me trompe pas) : si la première multitude transfinie nous apparaît comme la multitude du continu (par rapport à la mesure), cela tient aux limites de nos capacités cognitives et non pas à la structure intrinsèque de la nature. Cette remarque sert à introduire l'autre question qui est au centre de la huitième conférence de Cambridge : la question métaphysique (ou cosmologique) du continu. Comment peut-on penser, semble se demander Peirce, l'origine et les conditions des possibilités du *kosmos*, sans affirmer une priorité ultime, dont le continu est, pour ainsi dire, la forme logique ? Il s'agit alors de dessiner la possibilité d'un monde qui vient du continu comme une cristallisation accidentelle, comme une configuration qui se réalise par une procédure de détermination progressive de l'univers du possible dans sa plus large généralité. La continuité se présente alors comme la généralité parfaite, l'origine cosmique de la possibilité. Le problème du mathématicien n'est donc pas celui de construire le continu, mais celui de retrouver la forme logico-mathématique qui englobe toute possibilité imaginable, en cherchant ainsi à remonter la route de l'évolution. Une route qui ne va pas (comme seul un point de vue anthropomorphique nous amène à penser) du discret vers le continu, du fini vers l'infini, du particulier vers le général, mais de l'essence du possible à ses déterminations imparfaites.

Le lecteur choisira : il pourra prendre le risque de suivre Peirce dans cette « vaste généralisation » (p. 54) de la notion du continu, ou il pourra se

14. CP, 3. 567.

15. Une définition fort différente, mais répondant aux mêmes exigences, se trouve dans un texte de 1906, voir CP, 6. 174-177.

16. CP, 3. 568.

limiter plus prudemment à réfléchir à la question mathématique. Quel que soit son choix, la lecture des conférences de Cambridge ne sera pas inutile.

Marco PANZA
Centre François Viète d'histoire et philosophie des sciences,
Université de Nantes, Faculté des sciences,
2 rue de la Houssinière, F-44172, Nantes Cedex 03
courrier électronique : panza@unantes.univ-nantes.fr
(juillet 1995).