Bericht zur Prüfung im Oktober 2003 über Mathematik der Lebensversicherung (Grundwissen)

Jürgen Strobel (Köln) and Hans-Jochen Bartels (Mannheim)

Blätter der DGVFM Band XXVI, Heft 3 (Mai 2004), 511 - 516.

3. Aufgabe (25 Punkte)

$$f_0 B - a_0 V_1 = c_0$$

$$f_t B + V_t - a_t V_{t+1} = c_t \text{ für } t = 1, \dots, n-2$$

und

$$f_{n-1} B + V_{n-1} = c_{n-1}$$

sei das einen Versicherungsvertrag beschreibende lineare Gleichungssystem mit:

- $0 < a_t < 1$ für $t = 0, 1, \dots, n-2$,
- den Beitragszahlungsmodalitäten $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$,
- den Zahlen $c_t > 0$ $t = 1, \dots, n-1$, welche die Leistungen des Tarifs beschreiben, und
- den zugehörigen Deckungsrückstellungen V_t für $t = 1, \dots, n-1$.

Es gelte $f_{n-1} B = c_{n-1}$ und $f_t B < c_t$ für $t = 0, 1, 2, \dots, m$ mit $m < n-2$ und $f_t B > c_t$ für $t = m+1, \dots, n-2$.

Man zeige: Mindestens $m+1$ Deckungsrückstellungen in der Folge $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$ sind negativ.

Lösung

Aus $f_0 B = c_0 + a_0 V_1$ folgt wegen $f_0 B < c_0$ die Beziehung $V_1 < 0$, und hieraus ergibt sich rekursiv aus den angegebenen Bedingungen wegen $f_t B - c_t + V_t = a_t V_{t+1}$ und $a_t > 0$ sofort: $V_2, V_3, \dots, V_{m+1} < 0$ und damit insgesamt die Behauptung. Es gilt ferner $V_{n-1} = 0$, wegen $f_{n-2} B + V_{n-2} = c_{n-2}$ sowie $f_{n-2} B > c_{n-2}$ folgt hieraus $V_{n-2} < 0$. Rekursiv folgt dann sogar $V_{n-3}, \dots, V_{m+2} < 0$.

In Worten formuliert heißt dies, daß man durch nicht ausreichende Prämien zu Beginn negative Deckungskapitale aufbaut, danach - d.h. nach dem Jahr m - werden die negativen Deckungskapitale zwar wieder aufgefüllt, bleiben aber noch negativ, bis schließlich $V_{n-1} = 0$ wird und damit letztlich die Äquivalenzgleichungen erfüllt werden. Solche Tarifgestaltungen sind auf jeden Fall zu vermeiden, da negative Deckungsrückstellungen im Stornofall zu Verlusten des Versicherungsunternehmens führen und aus Sicht des Kunden einen zu billigen Versicherungsschutz bieten (bei gezieltem Storno zum richtigen Zeitpunkt).