Homéomorphisme entre ouverts lipschitziens (*).

DENISE CHENAIS (Nice, France)

Résumé. – *Dans cet article, on démontre un résultat concernant l'ensemble $\pi(\theta, h, R)$ des partie uniformément bornées de $\mathbf{R}^n$ qui sont des ouverts uniformément lipschitziens de constantes données θ, h et R. On démontre que si la différence symétrique entre 2 tels ouverts lipschitziens éléments de $\pi(\theta, h, R)$, est de mesure assez petite, alors ces 2 ouverts sont homéomorphes. De plus, l'homéomorphisme est lipschitzien, de constante ne dépendant que de θ, h et R.*

0. – Introduction.

Le problème que nous allons étudier trouve sa motivation dans des questions d'identification de domaines. Rappelons par un exemple ce que nous entendons par identification de domaines:

soient Ω_0 et D deux ouverts réguliers de $\mathbf{R}^n(\Omega_0 \subset D)$, y_d une fonction donnée de $L^2(\Omega_0)$, et f une fonction donnée de $L^2(D)$. On se pose la question suivante: comment trouver un ouvert Ω contenant Ω_0 et contenu dans D tel que la solution faible du problème de Neuman:

$$y_\Omega \in H^1(\Omega): \; (\!(y_\Omega, \varphi)\!)_{H^1(\Omega)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

coïncide « au mieux » avec la fonction donnée y_d sur Ω. Ce type de problème a été étudié dans de nombreux travaux, en considérant la fonctionnelle:

$$J(\Omega) = \|y_\Omega - y_d\|_{L^2(\Omega)}$$

que l'on cherche à minimiser sur un ensemble d'ouverts Ω convenable. On a montré précédemment [3] que cette fonctionnelle atteint son minimum si on cherche l'ouvert optimal dans la famille des ouverts uniformément lipschitziens de constantes données. Pour ceci, on a muni l'ensemble des ouverts étudiés de la topologie de la mesure de la différence symétrique.

Par ailleurs, pour calculer le minimum de cette fonctionnelle, de nombreux auteurs utilisent une méthode de « gradient » (notion à laquelle ils donnent un sens dans ce cas) [2] [5] [7] [8]. Fréquemment, ils utilisent des méthodes demandant que des ouverts « voisins » soient homéomorphes.

(*) Entrata in Redazione il 5 aprile 1977.

On démontre dans cet article que dans la famille des ouverts uniformément lipschitziens, des ouverts suffisamment proches pour le volume de la différence symétrique sont homéomorphes. L'homéomorphisme est bilipschitzien. Donnons une formulation précise de ce résultat (les objets définis ci-dessous sont les mêmes que ceux définis dans [3]):

DÉFINITION 1. – *Etant donné ξ vecteur unitaire de $\mathbf{R}^n$ et 2 réels positifs θ et h $(0 < \theta < \pi/2)$, $C(\xi, \theta, h)$ désigne le cône de révolution de $\mathbf{R}^n$ d'axe ξ, d'angle au sommet θ, de hauteur h:*

$$C(\xi, \theta, h) = \{x \in \mathbf{R}^n;\ \|x\| < h,\ (x, \xi) > \|x\| \cos\theta\}\ .$$

On utilisera aussi

DÉFINITION 1'. – *On définit:*

$$C'(\xi, \theta, h) = \bigcup_{0<\alpha<h} B(\alpha\xi, \alpha \sin\theta)$$

où $B(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre x, de rayon r.

Il est clair qu'il existe h' et h'' tels que:

$$C'(\xi, \theta, h'') \subset C(\xi, \theta, h) \subset C'(\xi, \theta, h')\ .$$

DÉFINITION 2. – *Etant donné D borné de $\mathbf{R}^n$, θ, h, R des réels positifs donnés $(0 < \theta < \pi/2)$, on note $\pi(\theta, h, R)$ l'ensemble des ouverts de $\mathbf{R}^n$ inclus dans D, possédant la propriété suivante, dite propriété de cône uniforme:*

$$\forall \Omega \in \pi(\theta, h, R)\ ,\quad \forall x \in \partial\Omega\ ,\quad \exists \xi_x \in \mathbf{R}^n\ ,\quad \|\xi_x\| = 1 \quad t.q.$$
$$\forall y \in B(x, R) \cap \Omega\colon y + C(\xi_x, \theta, h) \subset \Omega\ .$$

REMARQUE 0.1. – On a montré dans [3] que ces ouverts sont uniformément lipschitziens.

REMARQUE 0.2. – On a montré dans [3] que si la propriété de cône est satisfaite pour Ω elle est aussi satisfaite pour $\complement\bar{\Omega}$ avec d'autres constantes h et R. On en déduit qu'il existe $R' < R$ tel que:

$$\forall y \in B(x, R') \cap \bar{\Omega}\colon\quad y + C(\xi_x, \theta, R') \subset \Omega$$
$$\forall y \in B(x, R') \cap \complement\Omega\colon\ y - C(\xi_x, \theta, R') \subset \complement\bar{\Omega}\ .$$

C'est sous cetta forme que la propriété de cône sera utilisée par la suite. On notera R pour R'.

Remarquons aussi que:

$$\complement\bar{\Omega} = \widehat{\complement\Omega}$$

Ω et $\complement\bar{\Omega}$ jouent donc un rôle symétrique. C'est en fait à $\partial\Omega$ que nous demandons d'être borné.

Nous munissons $\Pi(\theta, h, R)$ de la topologie métrique suivante:

$$\delta(\Omega_1, \Omega_2) = \|\chi_{\Omega_1} - \chi_{\Omega_2}\|_{L^1(D)}$$

où χ_Ω désigne la fonction caractéristique de Ω. Rappelons [3] qu'on définit bien ainsi une topologie sur $\Pi(\theta, h, R)$ car 2 éléments distincts de $\Pi(\theta, h, R)$ diffèrent d'un ensemble de mesure non nulle. De plus, on a montré dans [3] que $\Pi(\theta, h, R)$ est un espace compact.

Le but de cet article est de démontrer le Théorème suivant:

THÉORÈME. – $\exists\varepsilon$ *ne dépendant que de* θ, h *et* R, *tel que*:

$$\left.\begin{array}{l}\Omega, \Omega' \in \Pi(\theta, h, R) \\ \delta(\Omega, \Omega') < \varepsilon\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists F \textit{ homéomorphisme bilipschitzien} \\ \textit{de } \mathbf{R}^n, \textit{ tel que } \Omega' = F(\Omega).\end{array}\right.$$

La topologie étudiée étant métrique, nous montrerons en fait que:

$$\forall\Omega \in \Pi(\theta, h, R) \quad \forall(\Omega_p)_{p\in N} \subset \Pi(\theta, h, R) \quad \Omega_p \to \Omega$$

$\exists P: p > P \Rightarrow \exists F_p$ homéomorphisme bilipschitzien de $\boldsymbol{R}^n$ tel que $\Omega_p = F_p(\Omega)$.

Donnons ici les lignes générales de la démonstration:

Nous considérons un voisinage de $\partial\Omega$ de la forme:

$$\Sigma_\varepsilon = \overline{\bigcup_{x\in\partial\Omega} B(x, \varepsilon)}$$

où ε est un réel positif. Sur Σ_ε, on construit un champ de vecteurs C^∞ tel que pour ε assez petit, Σ_ε soit voisinage tubulaire de $\partial\Omega$ au sens suivant:

DÉFINITION 3. – Σ *voisinage de* $\partial\Omega$ *est un voisinage tubulaire s'il existe un recouvrement de* Σ *par des courbes* $\mathcal{F}_x (x \in \partial\Omega)$ *trajectoires d'un champ de vecteurs* C^∞, *telles que chaque* $\mathcal{F}_x$ *coupe* $\partial\Omega$ *en un point unique, et telles que par tout point de* Σ *passe une trajectoire unique et à un instant unique.*

REMARQUE. – Cette définition coïncide avec la définition classique.

Le champ de vecteurs est ici obtenu par recollement de certains axes de cônes provenant de la condition de cône sur Ω.

Ensuite, on montrera que pour Ω_p suffisamment proche de Ω, il est possible de choisir le champ de vecteurs de façon à ce que Σ_ε soit voisinage tubulaire simultanément de $\partial\Omega$ et $\partial\Omega_p$. On construira l'homéomorphisme cherché en « écrasant » Ω_p sur Ω le long des trajectoires du champ.

Nous aurons besoin de connaître certaines propriétés de régularité d'ouverts voisins d'éléments Ω de $\pi(\theta, h, R)$, ce qui fera l'objet du premier Chapitre.

Dans le Chapitre II, on démontre un résultat géométrique sur les courbes intégrales d'un certain type de champs de vecteurs qui nous permettra d'obtenir par la suite les résultats annoncés.

Dans le Chapitre III, on construit un voisinage tubulaire commun à $\partial\Omega$ et $\partial\Omega'$.

Dans le Chapitre IV, on construit l'homéomorphisme et on montre qu'il est bilipschitzien.

CHAPITRE I

ETUDE DES Ω_δ

Soient θ et R donnés ($0 < \theta < \pi/2$, $R > 0$). Dans tout ce chapitre, Ω désigne un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$ de frontière bornée tel que: $\forall x \in \partial\Omega$, $\exists \xi_x \in \boldsymbol{R}^n$, $\|\xi_x\| = 1$ tel que

$$\begin{cases} \forall y \in B(x, R) \cap \bar{\Omega}: \quad y + C(\xi_x, \theta, R) \subset \Omega \\ \forall y \in B(x, R) \cap \complement\Omega: \; y - C(\xi_x, \theta, R) \subset \complement\bar{\Omega}\,. \end{cases}$$

Pour $\delta > 0$, on définit:

$$\begin{cases} \Omega_\delta = \{y \in \Omega;\ d(y, \partial\Omega) > \delta\} \\ \Omega_{-\delta} = \Omega \cup \{y \in \complement\Omega;\ d(y, \partial\Omega) < \delta\} \end{cases}$$

$$\Sigma_\delta = \overline{\bigcup_{x \in \partial\Omega} B(x, \delta)}$$

LEMME I.1. – On a:

$$\Sigma_\delta = \bigcup_{x \in \partial\Omega} \overline{B(x, \delta)}$$

DÉMONSTRATION. – On a évidemment

$$\bigcup_{x \in \partial\Omega} \overline{B(x, \delta)} \subset \overline{\bigcup_{x \in \partial\Omega} B(x, \delta)}\,.$$

Montrons qu'on a aussi

$$\overline{\bigcup_{x \in \partial\Omega} B(x, \delta)} \subset \bigcup_{x \in \partial\Omega} \overline{B(x, \delta)}\,.$$

Considérons $y \in \overline{\bigcup_{x \in \partial\Omega} B(x, \delta)}$. On a:

$$\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \bigcup B(x, \delta) \quad \text{tel que } y_n \to y$$

$$\Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial\Omega \quad \text{tel que} \begin{cases} \|x_n - y_n\| < \delta & \forall n \\ y_n \to y\,. \end{cases}$$

Etant donné que $\partial\Omega$ est compact, de la suite (x_n) on peut extraire une sous-suite $(x_{n'})$ convergeant vers $x \in \partial\Omega$. Par passage à la limite, on obtient:

$$\|x - y\| \leqslant \delta$$

soit:

$$y \in \overline{B(x, \delta)} \quad \text{c.q.f.d.} \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE I.1.

$$\forall \delta > 0 \quad \Omega_\delta = \Omega \setminus \Sigma_\delta$$

$$\Omega_{-\delta} = \Omega \cup \overset{\circ}{\Sigma}_\delta$$

DÉMONSTRATION. – Par définition de Ω_δ, on a:

$$y \in \Omega_\delta \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} y \in \Omega \\ d(y, \partial\Omega) > \delta \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \Omega \\ y \notin \bigcup \overline{B(x, \delta)}\,. \end{cases}$$

En appliquant le Lemme I.1., on déduit que:

$$\Omega_\delta = \Omega \setminus \Sigma_\delta\,.$$

Par ailleurs, il est évident que:

$$\Omega_{-\delta} = \Omega \cup \overset{\circ}{\Sigma}_\delta = \Omega \cup \{x \in \boldsymbol{R}^n;\ d(x, \partial\Omega) < \delta\} \quad \blacksquare$$

REMARQUE I.1. – La seule propriété de Ω utilisée jusqu'ici est la compacité de son bord. La condition de cône n'intervient pas.

Montrons maintenant que, Ω possédant la propriété du cône, les Ω_δ possèdent une propriété de même type qui nous sera utile par la suite.

PROPOSITION I.1. – *Soit* $r = R/4$. *Alors* $\forall \delta \in]-r, r[$, *on a*:

$$\forall x \in \partial\Omega \quad \text{i) } \forall y \in B(x, r) \cap \bar{\Omega}_\delta\colon \ y + C(\xi_x, \theta, r) \subset \Omega_\delta$$

$$\text{ii) } \forall y \in B(x, r) \cap \complement\Omega_\delta\colon \ y - C(\xi_x, \theta, r) \subset \complement\bar{\Omega}_\delta\,.$$

DÉMONSTRATION. – Nous remarquons qu'il suffit de montrer ce résultat pour $\delta > 0$. On obtiendrait de même le cas concernant $\delta < 0$ en raisonnant sur le complémentaire de $\bar{\Omega}$ au lieu de Ω.

a) Montrons i) (cf. fig. I.1):

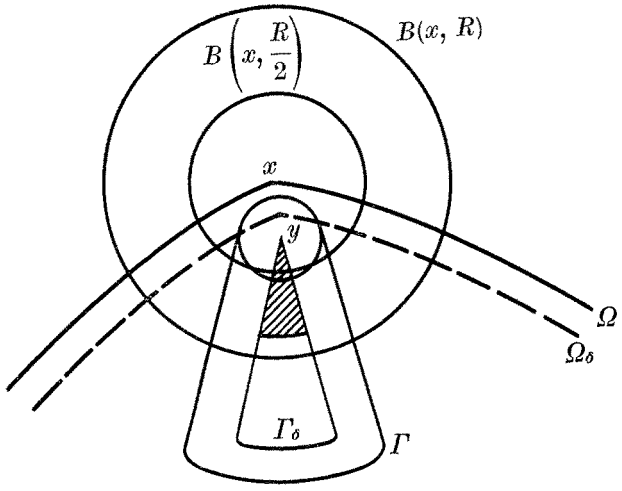


Fig. I.1.

Posons $r_1 = R/2$ et considérons $\delta < r_1$. Fixons un élément x de $\partial\Omega$ auquel est associé un vecteur ξ_x de $\boldsymbol{R}^n$ par la condition de cône au voisinage de x. Considérons par ailleurs un élément quelconque y de $B(x, r_1) \cap \bar{\Omega}_\delta$, et montrons que:

$$y + C(\xi_x, \theta, r_1) \subset \Omega_\delta .$$

La boule ouverte centrée en y de rayon δ est une partie de $B(x, R) \cap \Omega$. Par suite:

$$\forall z \in B(y, \delta): z + C(\xi_x, \theta, R) \subset \Omega$$

soit encore:

$$\Gamma = \bigcup_{z \in B(y,\delta)} z + C(\xi_x, \theta, R) \subset \Omega$$

d'où on déduit:

$$\Gamma_\delta = \{t \in \Gamma;\ d(t, \partial\Gamma) > \delta\} \subset \Omega_\delta .$$

De plus, il est clair que Γ_δ contient le cône $y + C(\xi_x, \theta, r_1)$, donc:

$$\forall y \in B(x, r_1) \cap \bar{\Omega}_\delta:\ y + C(\xi_x, \theta, r_1) \subset \Omega_\delta$$

ce qui entraîne la même relation avec $r = R/4 = r_1/2$. c.q.f.d.

REMARQUE I.2. – De cette propriété on déduit facilement que pour $\delta \in [-(r/2), +(r/2)]$ il existe r' ne dépendant que de r tel que $\Omega_\delta \in \pi(\theta, h, r')$.

b) Montrons maintenant ii) (cf. fig. I.2).

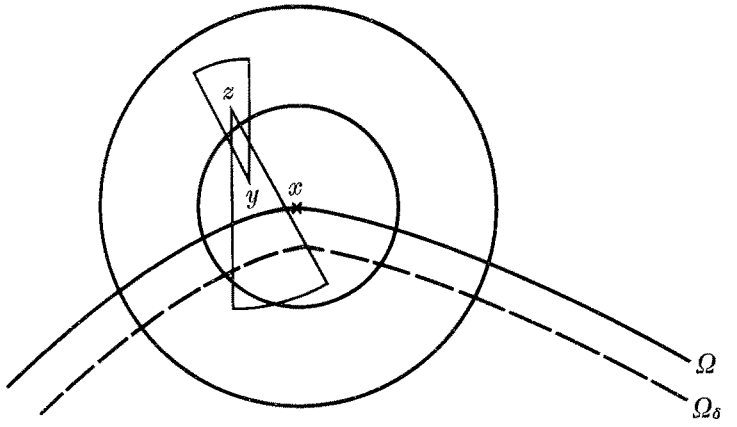


Fig. I.2.

Posons $r = r_1/2 = R/4$, et considérons $y \in B(x, r) \cap \complement\, \Omega_\delta$. Supposons que $y - C(\xi_x, \theta, r)$ ne soit pas inclus dans $\complement\, \bar{\Omega}_\delta$. Ceci signifierait qu'il existerait $z \in (y - C(\xi_x, \theta, r)) \cap \bar{\Omega}_\delta$. De plus, on aurait:

$$\|z - x\| \leqslant \|z - y\| + \|y - x\| < r_1$$

donc $z \in B(x, r_1) \cap \bar{\Omega}_\delta$ et par application de i):

$$z + C(\xi_x, \theta, r_1) \subset \Omega_\delta\,.$$

Or y est un élément de $z + C(\xi_x, \theta, r_1)$ qui n'est pas dans Ω_δ. Il y a donc contradiction. ∎

PROPOSITION I.2.

i) $\forall \delta \in]0, r]$: $\partial(\Omega_\delta) = \{y \in \Omega;\ d(y, \partial\Omega) = \delta\}$

$\forall \delta \in [-r, 0[$: $\partial(\Omega_\delta) = \{y \in \complement\, \Omega;\ d(y, \partial\Omega) = \delta\}$

ii) $\Sigma_r = \bigcup_{-r \leqslant \delta \leqslant r} \partial(\Omega_\delta)$

$\forall \delta \in [0, r]$ $\partial\Sigma_\delta = \partial\Omega_\delta \cup \partial(\Omega_{-\delta})$.

DÉMONSTRATION. – De même que dans la proposition précédente, il suffit de raisonner sur le cas $\delta > 0$. On obtiendrait le cas $\delta < 0$ en raisonnant sur le complémentaire.

i) Soit $\delta \in]0, r]$. Etant donné que

$$\Omega_\delta = \{y \in \Omega;\ d(y, \partial\Omega) > \delta\}$$

on a évidemment:

$$\forall y \in \partial\Omega_\delta\colon d(y, \partial\Omega) = \delta\ .$$

Montrons qu'on a aussi:

$$\left.\begin{array}{l} y \in \Omega \\ d(y, \partial\Omega) = \delta \end{array}\right\} \Rightarrow y \in \partial\Omega_\delta \quad \text{(cf. fig. I.3).}$$

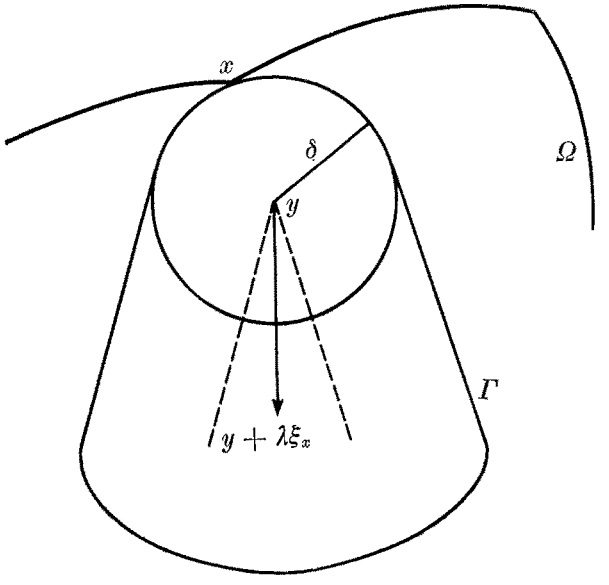


Fig. I.3.

Le raisonnement est du même type que celui fait dans i) de la proposition précédente.

Nous montrons qu'un tel y est limite d'une suite de points de Ω_δ.

$y \in \Omega$, $d(y, \partial\Omega) = \delta$, signifie que:

$$\left\{\begin{array}{l} B(y, \delta) \subset \Omega \\ \exists x \in \partial\Omega\colon \|x - y\| = \delta\ . \end{array}\right.$$

Et, du fait que $\delta \leqslant r = R/4$, $B(y, \delta)$ est aussi une partie de $B(x, R)$. Par conséquent:

$$\Gamma = \bigcup_{z \in B(y,\delta)} z + C(\xi_x, \theta, R) \subset \Omega .$$

De plus, il est clair que les éléments de $\boldsymbol{R}^n$ de la forme $y + \lambda\xi_x$ pour λ positif assez petit sont à une distance de $\partial\Gamma$ strictement supérieure à δ, donc a fortiori à une distance de $\partial\Omega$ supérieure à δ. Ce sont donc des éléments de Ω_δ. On en déduit que y est un élément de $\partial(\Omega_\delta)$.

ii) On a:

$$\begin{aligned}\Sigma_r = \bigcup_{x \in \partial\Omega} \overline{B(x, r)} &= \{y \in \boldsymbol{R}_n;\ d(y, \partial\Omega) \leqslant r\} \\ &= \{y \in \boldsymbol{R}^n;\ \exists \delta \leqslant r\colon d(y, \partial\Omega) = \delta\} \\ &= \bigcup_{-r \leqslant \delta \leqslant r} \partial(\Omega_\delta) .\end{aligned}$$

De plus, d'après le Corollaire I.1., on a évidemment

$$\forall \delta \in [0, r]\colon \partial\Sigma_\delta = \partial\Omega_\delta \cup \partial(\Omega_{-\delta}) = \{y \in \boldsymbol{R}^n;\ d(y, \partial\Omega) = \delta\} \qquad \blacksquare$$

LEMME I.2.

$$\forall \delta \in]0, r \sin\theta[\ , \quad \forall x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_\delta\ ,\ d(x, \partial\Omega_\delta) \leqslant \frac{\delta}{\sin\theta}$$

$$\forall \delta \in]-r \sin\theta, 0[\ , \quad \forall x \in \Omega_{-\delta} \setminus \Omega\ ,\ d(x, \partial\Omega_\delta) \leqslant \frac{\delta}{\sin\theta} .$$

DÉMONSTRATION. – Nous considérons le cas où δ est positif. On raisonnerait de même pour $\delta < 0$, sur le complémentaire de Ω.

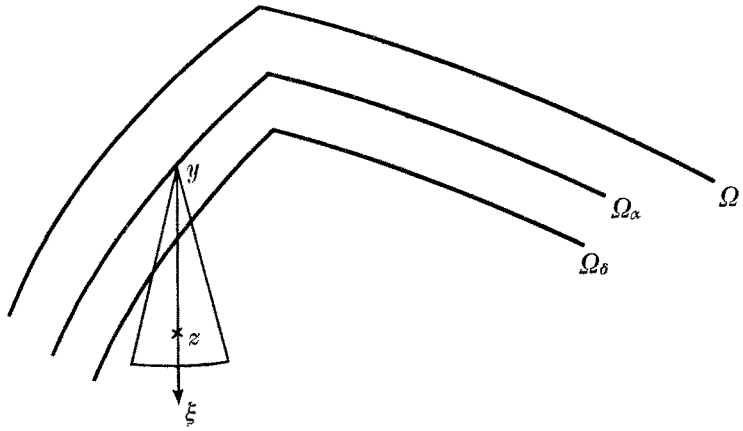


Fig. II.1.

Soit $y \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_\delta$. Il existe $\alpha \leqslant \delta$ tel que $y \in \partial\Omega_\alpha$. De plus, on sait qu'il existe $\xi \in \boldsymbol{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, tel que:

$$y + C(\xi, \theta, r) \subset \Omega_\alpha .$$

Considérons $z = y + \dfrac{\delta}{\sin\theta}\xi$. On a:

$$\|y - z\| = \frac{\delta}{\sin\theta} < r .$$

Par suite z est un élément de $y + C(\xi, \theta, r)$.

De plus:

$$d(z, \partial\Omega) \geqslant d(z, \partial\Omega_\alpha) \geqslant d\big(z, \partial(y + C(\xi, \theta, r))\big)$$

et si δ est assez petit, $d\big(z, \partial(y + C(\xi, \theta, r))\big) = 0$.

z est donc un élément de Ω_δ. Il existe donc sur le segment $]z, y[$ un élément de $\partial\Omega_\delta$. On en déduit:

$$d(x, \partial\Omega_\delta) \leqslant \|z - y\| = \frac{\delta}{\sin\theta} \qquad \blacksquare$$

CHAPITRE II

UNE PROPRIETÉ DE CONVEXITÉ

Etant donné $\Omega \in \pi(\theta, h, R)$, on sait que pour chaque $x \in \partial\Omega$, il existe un vecteur ξ_x unitaire de $\boldsymbol{R}^n$ tel que:

$$\begin{cases} \forall y \in B(x, R) \cap \bar{\Omega}: \quad y + C(\xi_x, \theta, R) \subset \Omega \\ \forall y \in B(x, R) \cap \complement\Omega: \; y - C(\xi_x, \theta, R) \subset \complement\bar{\Omega} . \end{cases}$$

Il est bien clair qu'en général, pour x fixé, un tel axe ξ_x n'est pas unique. Définissons:

DÉFINITION II.1. – *Etant donné $\Omega \in \pi(\theta, h, R)$, $x \in \partial\Omega$ et $\varrho > 0$, on appelle « ϱ-bon axe » en x un élément $\xi \in \boldsymbol{R}^n$ de norme 1 tel que:*

$$\begin{cases} \forall y \in B(x, \varrho) \cap \bar{\Omega}: \quad y + C(\xi, \theta, \varrho) \subset \Omega \\ \forall y \in B(x, \varrho) \cap \complement\Omega: \; y - C(\xi, \theta, \varrho) \subset \complement\bar{\Omega} . \end{cases}$$

On se propose de démontrer dans ce chapitre la propriété de convexité suivante:

soit $x \in \partial\Omega$ donné. Désignons par $\Gamma(x)$ l'ensemble des « R-bons axes » en x. Alors il existe $\varrho > 0$ ne dépendant que de R et θ tel que:

$$\forall \xi \in \mathrm{Co}\,(\Gamma(x)) \quad \text{(enveloppe convexe de } \Gamma(x))$$
$$\chi = \xi/\|\xi\| \quad \text{est un « } \varrho\text{-bon axe » en } x.$$

Nous montrons d'abord quelques résultats préliminaires.

Fixons $x \in \partial\Omega$ et considérons Ω_δ avec $\delta \in]-(r/4), r/4[$. On sait, d'après la proposition I.1 que:

$$\forall \xi \in \Gamma(x), \quad \begin{cases} \forall y \in B(x,r) \cap \bar{\Omega}_\delta: \quad y + C(\xi,\theta,r) \subset \Omega_\delta \\ \forall y \in B(x,r) \cap \complement\Omega_\delta: \; y - C(\xi,\theta,r) \subset \complement\bar{\Omega}_\delta . \end{cases}$$

Choisissons alors $z \in \partial\Omega_\delta \cap B(x, r/2)$. Etant donné que:

$$B\left(z, \frac{r}{2}\right) \subset B(x,r),$$

on a évidemment:

$$\forall \xi \in \Gamma(x): \begin{cases} y \in B\left(z, \frac{r}{2}\right) \cap \bar{\Omega}_\delta: y + C(\xi,\theta,r) \subset \Omega_\delta \\ y \in B\left(z, \frac{r}{2}\right) \cap \complement\Omega_\delta: y - C(\xi,\theta,r) \subset \complement\bar{\Omega}_\delta . \end{cases}$$

PROPOSITION II.1. – *Soient $z \in \partial\Omega_\delta \cap B(x, r/2)$, χ_1 un élément de $\Gamma(x)$, et χ_2 un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^n$ tel que:*

$$z + C(\chi_2, \theta, \varrho_0) \subset \Omega_\delta$$
$$z - C(\chi_2, \theta, \varrho_0) \subset \complement\bar{\Omega}_\delta$$

où ϱ_0 est donné inférieur à r.

Alors il existe

$$\varrho_1 = \frac{1}{2}\varrho_0 \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

tel que:

$$\begin{cases} \forall \chi = \lambda_1\chi_1 + \lambda_2\chi_2 \\ \|\chi\| = 1 \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z + C(\chi,\theta,\varrho_1) \subset \Omega_\delta \\ z - C(\chi,\theta,\varrho_1) \subset \complement\bar{\Omega}_\delta . \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. – Cf. fig. II.1.
On supposera $z = 0$.
Remarquons que du fait qu'on a:

$$C\left(\chi_1, \theta, \frac{r}{2}\right) \subset \Omega_\delta \quad \text{et} \quad -C\left(\chi_1, \theta, \frac{r}{2}\right) \subset \complement\bar{\Omega}_\delta$$
$$C(\chi_2, \theta, \varrho_0) \subset \Omega_\delta \quad \text{et} \quad -C(\chi_2, \theta, \varrho_0) \subset \complement\bar{\Omega}_\delta$$

on a nécessairement:

$$0 \leqslant \text{angle}\,(\chi_1, \chi_2) \leqslant \Pi - 2\theta$$

soit

$$(\chi_1, \chi_2) \geqslant -\cos 2\theta\,.$$

Considérons χ unitaire tel que:

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 > 0 \quad \text{t.q.} \quad \chi = \lambda_1\chi_1 + \lambda_2\chi_2\,.$$

Considérons $\varrho_1 > 0$ et montrons que si ϱ_1 est assez petit, on a:

$$C(\chi, \theta, \varrho_1) \subset \Omega_\delta\,.$$

Soit $y \in C(\chi, \theta, \varrho_1)$. Par définition de $C(\chi, \theta, \varrho_1)$, on sait qu'il existe x_0 colinéaire à χ tel que:

$$\|y - x_0\| < \|x_0\| \sin\theta\,.$$

Posons:

$$x_0 = \alpha\chi \qquad \|x_0\| = \alpha\,.$$

Décomposons x_0 sur χ_1 et χ_2:

$$x_0 = \alpha\lambda_1\chi_1 + \alpha\lambda_2\chi_2$$

ou encore:

$$x_0 = x_1 + x_2 \qquad x_1 = \alpha\lambda_1\chi_1\,, \qquad x_2 = \alpha\lambda_2\chi_2\,.$$

Nous allons montrer qu'on peut écrire y sous la forme:

$$y = y_1 + y_2 \qquad y_1 \in C\left(\chi_1, \theta, \frac{r}{2}\right)$$
$$y_2 \in C(\chi_2, \theta, \varrho_0)$$

de façon à ce que le problème soit alors posé dans $\boldsymbol{R}^2 = \mathfrak{L}(y_1, y_2)$. Nous choisissons la décomposition:

$$y_1 = x_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}(y - x_0)$$

$$y_2 = x_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}(y - x_0)$$

et montrons que pour ϱ assez petit, les conditions requises sont satisfaites.

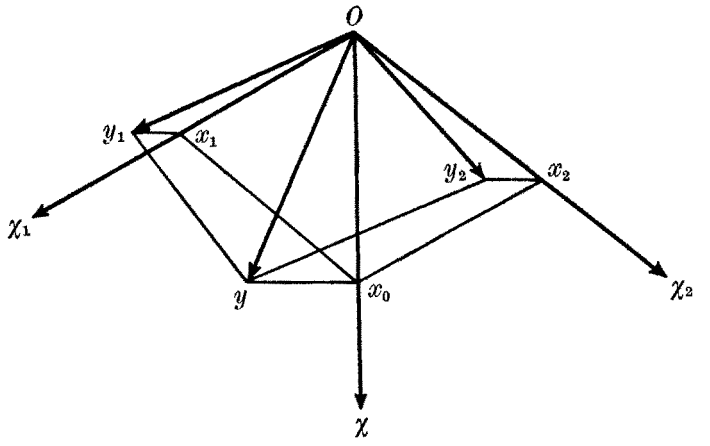


Fig. II.2.

DÉFINITION II.2. – Pour $i = 1, 2$, désignons par $\mathcal{C}(\chi_i, \theta)$ le cône infini à 1 nappe d'axe χ_i et d'angle θ. On a:

$\underline{y_i \in \mathcal{C}(\chi_i, \theta)}$

Il nous suffit de montrer que:

$$\|y_i - x_i\| < \|x_i\| \sin\theta .$$

Or:

$$\|y_i - x_i\| = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}\|y - x_0\| < \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}\|x_0\| \sin\theta = \frac{\alpha\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}\sin\theta .$$

On a de plus:

$$\|\chi\| = 1 \leqslant \lambda_1\|\chi_1\| + \lambda_2\|\chi_2\| = \lambda_1 + \lambda_2 .$$

Par suite:

$$\|y_i - x_i\| < \alpha\lambda_i \sin\theta = \|x_i\| \sin\theta .$$

Montrons que:

$$\|x_i\| < \frac{\alpha}{\sin\theta}\,.$$

Etant donné que $\|x_i\| = \alpha\lambda_i$, il suffit de majorer λ_i. On a

$$\|\chi\|^2 = \|\lambda_1\chi_1 + \lambda_2\chi_2\|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2(\chi_1, \chi_2)$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2(1 - (\chi_1, \chi_2))\,.$$

Or:

$$2\lambda_1\lambda_2 \leqslant (\lambda_1 + \lambda_2)^2/2\,.$$

Donc:

$$1 = \|\chi\|^2 \geqslant (\lambda_1 + \lambda_2)^2\left[1 - \frac{1}{2}(1 - (\chi_1, \chi_2))\right] = (\lambda_1 + \lambda_2)^2\left[\frac{1 + (\chi_1, \chi_2)}{2}\right]$$

et, en raison de la condition sur l'angle entre χ_1 et χ_2:

$$1 \geqslant (\lambda_1 + \lambda_2)^2\frac{1 - \cos 2\theta}{2} = (\lambda_1 + \lambda_2)^2\sin^2\theta\,.$$

On en tire:

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \frac{1}{\sin\theta}$$

et

$$\lambda_1 \leqslant \frac{1}{\sin\theta} \qquad \lambda_2 \leqslant \frac{1}{\sin\theta}$$

d'où

$$\|x_i\| \leqslant \frac{\alpha}{\sin\theta}\,.$$

Montrons maintenant que:

$$\|y_i\| < \alpha\frac{1 + \sin\theta}{\sin\theta}\,.$$

On a:

$$y_i = x_i + (y_i - x_i) \;\Rightarrow\; \|y_i\| \leqslant \|x_i\| + \|y_i - x_i\| < \|x_i\|\,[1 + \sin\theta] \leqslant \alpha\frac{1 + \sin\theta}{\sin\theta}$$
$$\Rightarrow \|y_i\| < \alpha\,\frac{1 + \sin\theta}{\sin\theta}\,.$$

y apparait donc comme somme d'éléments y_1 et y_2 appartenant respectivement à $C(\chi_1, \theta)$ et $C(\chi_2, \theta)$, de norme majorée. Posons maintenant:

$$\varrho_1 = \frac{1}{2}\varrho_0 \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}.$$

On a alors:

$C(\chi, \theta, \varrho_1) \subset \Omega_\delta$.

Soit $y \in C(\chi, \theta, \varrho_1)$. Décomposons-le comme précédemment. On a

$$y_2 \in C(\chi_2, \theta) \quad \text{et} \quad \|y_2\| < \frac{1}{2}, \ \alpha \frac{1+\sin\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{2}\varrho_1 \frac{1+\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{2}\varrho_0 .$$

Par suite, y_2 est un élément de $C(\chi_2, \theta, \varrho_0)$ donc de Ω_δ: De plus, on a aussi:

$$\|y_2\| < r/2 .$$

y_2 est un élément de $B(0, r/2) \cap \Omega$. On a alors:

$$y_2 + C\left(\chi_1, \theta, \frac{r}{2}\right) \subset \Omega_\delta .$$

Or $y = y_2 + y_1$ avec

$$y_1 \in C(\chi_1, \theta) \quad \|y_1\| < \frac{r}{2} .$$

Par suite $y_2 + y_1$ est un élément de $y_2 + C(\chi_1, \theta, r/2)$ donc de Ω_δ. ∎

PROPOSITION II.2. – $\exists \varrho'(R, \theta)$ *tel que*:

$$\forall \chi = \frac{\xi}{\|\xi\|} \qquad \xi \in \mathrm{Co}(\Gamma(x))$$

$$\forall z \in \partial\Omega_\delta \cap B\left(x, \frac{r}{2}\right)$$

$$\begin{cases} z + C(\chi, \theta, \varrho') \subset \Omega_\delta \\ z - C(\chi, \theta, \varrho') \subset \complement\bar{\Omega}_\delta . \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. – Etant donné un élément $\xi \in \mathrm{co}(\Gamma(x))$, on sait [9] qu'il est combinaison convexe d'au plus $n+1$ éléments $(\xi_i, \ i = 0, \ldots, n)$ de $\Gamma(x)$. On a alors:

$$\chi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \xi_i \qquad \lambda_i \geqslant 0$$

$$= \lambda_0 \xi_0 + \lambda_1 \xi_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \xi_i$$

Si on pose alors:

$$\lambda_0\xi_0 + \lambda_1\xi_1 = \zeta_1\,, \qquad \chi_1 = \frac{\zeta_1}{\|\zeta_1\|}, \qquad \varrho_1 = \frac{r}{2}\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

d'après la proposition II.1, on sait que:

$$z + C(\chi_1, \theta, \varrho_1) \subset \Omega_\delta$$

$$z - C(\chi_1, \theta, \varrho_1) \subset \complement\,\bar{\Omega}_\delta\,.$$

De plus, on a:

$$\chi = \|\zeta_1\|\,\chi_1 + \lambda_2\xi_2 + \sum_{i=3}^{n}\lambda_i\xi_i\,.$$

Par réitération du même processus, on obtient:

$$z + C(\chi, \theta, \varrho') \subset \Omega_\delta$$

$$z - C(\chi, \theta, \varrho') \subset \complement\,\bar{\Omega}_\delta$$

avec:

$$\varrho' = \frac{r}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^n. \qquad \blacksquare$$

Montrons maintenant la propriété annoncée:

THÉORÈME II.1. – $\exists\varrho > 0$ *ne dépendant que de* R *et* θ *tel que*:

$$\forall\Omega \in \pi(\theta, h, R)\,, \qquad \forall x \in \partial\Omega\,, \qquad \forall\chi = \frac{\xi}{\|\xi\|} \qquad \xi \in \mathrm{Co}(\Gamma(x))\,,$$

χ *est un «* ϱ*-bon axe» en* x:

$$\forall y \in B(x, \varrho) \cap \bar{\Omega}\colon \quad y + C(\chi, \theta, \varrho) \subset \Omega$$

$$\forall y \in B(x, \varrho) \cap \complement\,\Omega\colon\ y - C(\chi, \theta, \varrho) \subset \complement\,\bar{\Omega}\,.$$

DÉMONSTRATION. – Soit $z \in B(x, r/4) \cap \bar{\Omega}$. Il existe $\delta \in [0, r/4[$ tel que $z \in \partial\Omega_\delta$. Par suite, d'après la proposition II.2, on a:

$$z + C(\chi, \theta, \varrho') \subset \Omega_\delta \subset \Omega$$

ce qui donne la première partie de la proposition.

De même, si $z \in B(x, r/4) \cap \complement\Omega$, il existe alors $\delta \in]-(r/4), 0]$ tel que $z \in \partial\Omega_\delta$, et:

$$z - C(\chi, \theta, \varrho') \subset \complement\bar{\Omega}_\delta \subset \complement\bar{\Omega}\,.$$

On obtient donc le résultat cherché en choisissant:

$$\varrho = \operatorname{Min}\left(\frac{r}{4}, \varrho'\right). \quad \blacksquare$$

CHAPITRE III

INTEGRATION D'UN CHAMP DE VECTEURS θ-TRANSVERSE A UNE SURFACE

Ce Chapitre est consacré à l'étude géométrique des courbes intégrales d'un certain type de champ de vecteurs au voisinage du bord d'ouverts tels que $\Omega \in \pi(\theta, h, r)$, ou des Ω_δ étudiés dans le Chapitre précédent. Le Théorème III.1. est fondamental pour la suite.

Considérons un ouvert $\boldsymbol{\Omega}$ de $\boldsymbol{R}^n$ de frontière incluse dans un ouvert borné D de $\boldsymbol{R}^n$. On suppose donnés:

1) *2 recouvrements* (B_i) *et* (B_i') $i = 1, \ldots, N$ *de* $\partial\boldsymbol{\Omega}$ *par des boules de rayon respectif* $r/2$ *et* r *non nécessairement centrées sur* $\partial\boldsymbol{\Omega}$, *tels que*:

$$H1)\ \Sigma = \overline{\bigcup_{x \in \partial\Omega} B\left(x, \frac{r}{8}\right)} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_i$$

$$H2)\ \forall i\ \exists \chi_i \in \boldsymbol{R}^n,\ \|\chi_i\| = 1 \text{ tel que}$$

$$\forall y \in B_i' \cap \overline{\boldsymbol{\Omega}}:\ y + C(\chi_i, \theta, r) \subset \boldsymbol{\Omega}$$

$$\forall y \in B_i' \cap \complement\boldsymbol{\Omega}:\ y - C(\chi_i, \theta, r) \subset \complement\overline{\boldsymbol{\Omega}}\,.$$

2) *Une partition de l'unité* $(\varphi_i,\ i = 1, \ldots, N)$ $\mathcal{C}^\infty$ *sur* Σ *subordonneé aux* B_i:

$$\begin{cases} \operatorname{supp} \varphi_i \subset B_i \\ \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(y) = 1 \quad \forall y \in \Sigma\,. \end{cases}$$

Considérons alors le champ de vecteurs V suivant défini sur $\boldsymbol{R}^n$:

$$V(y) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(y)\, \chi_i \quad \forall y \in \boldsymbol{R}^n\,.$$

REMARQUE III.1. – L'hypothèse $H2$) peut être interprêtée comme une condition de θ-transversalité du champ V par rapport à la surface $\partial\Omega$.

Dans les chapitres suivants, Ω et Ω_δ joueront le rôle de Ω. On a:

THÉORÈME III.1. – $\exists \varepsilon_1(r, \theta)$ *ne dépendant que de* r *et* θ *tel que pour tout* Ω *satisfaisant les hypothèses précédentes*: $\forall x \in \partial\Omega$, $\exists T_x, T'_x > 0$ *tels que la solution du système*:

$$(I)\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t, x) = V(X(t, x)) \\ X(0, x) = x \end{cases}$$

1) *soit définie sur* $[-T'_x, T_x]$

2)
$$\begin{cases} t > 0 \Rightarrow X(t, x) \in \Omega \\ t < 0 \Rightarrow X(t, x) \in \complement\,\overline{\Omega} \\ \left.\begin{array}{l} X(t, x) \in \partial\Omega \\ t \in [-T'_x, T_x] \end{array}\right\} \Leftrightarrow t = 0 \end{cases}$$

3)
$$d(X(T_x, x), \partial\Omega) > \varepsilon_1$$
$$d(X(-T'_x, x), \partial\Omega) > \varepsilon_1 .$$

La suite de ce Chapitre est consacrée à la démonstration de ce Théorème.

Nous commençons par étudier quelques propriétés géométriques du champ V au voisinage du bord de Ω. Dans la suite, x désigne un élément fixé de $\partial\Omega$.

I. – Résultats préliminaires.

On a par définition:

$$V(y) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(y)\,\chi_i \qquad \forall y \in \boldsymbol{R}^n.$$

$V(y)$ est donc combinaison convexe des vecteurs unitaires χ_i pour les indices i tels que y appartienne à la boule B_i correspondante. On a:

LEMME III.1. – *La boule* $B(x, r/8)$ *possède la proprieté suivante*: *si* $B(x, r/8) \cap B_i \neq \emptyset$, *alors*:

$$\forall z \in B\left(x, \frac{r}{8}\right) \cap \Omega : z + C(\chi_i, \theta, r) \subset \Omega$$

$$\forall z \in B\left(x, \frac{r}{8}\right) \cap \complement\Omega : z - C(\chi_i, \theta, r) \subset \complement\,\Omega .$$

DÉMONSTRATION. – En raison de l'hypothèse $H2$), il nous suffit de voir que si $B(x, r/8)$ coupe B_i, alors $B(x, r/8)$ est incluse dans B_i', ce qui a lieu car:

$$\exists y \in B\left(x, \frac{r}{8}\right) \cap B_i \Rightarrow \|x_i - x\| \leqslant \|x_i - y\| + \|y - x\| < \frac{5r}{8} \quad \blacksquare$$

Pour x fixé sur $\partial\mathbf{\Omega}$, notons $I(x)$ l'ensemble des indices i tels que $B(x, r/8) \cap B_i \neq \emptyset$. Le Lemme précédent nous montre que pour tout élément y de la trajectoire issue

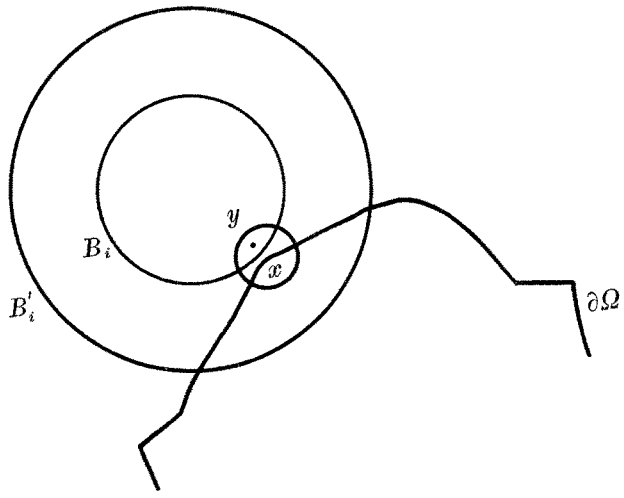


Fig. III.1.

de x qui se trouve dans $B(x, r/8)$, alors $V(y)$ est combinaison convexe de vecteurs $(\chi_i, i \in I(x))$ tels que

$$\forall z \in B\left(x, \frac{r}{8}\right) \cap \mathbf{\Omega}: \quad z + C(\chi_i, \theta, r) \subset \mathbf{\Omega}$$

$$\forall z \in B\left(x, \frac{r}{8}\right) \cap \complement\mathbf{\Omega}: \; z - C(\chi_i, \theta, r) \subset \complement\mathbf{\Omega}\,.$$

Par suite, pour chaque $i \in I(x)$, χ_i est un « $(r/8)$-bon axe » en x. D'après le théorème II.1 on sait alors qu'il existe ϱ ne dépendant que de r et θ tel que toute combinaison convexe normalisée des χ_i $(i \in I(x))$ soit un « ϱ-bon axe » en x.

Pour un élément x fixé de $\partial\mathbf{\Omega}$, notons maintenant:

$$\Gamma = \left\{\chi = \frac{\xi}{\|\xi\|}, \; \xi \in \mathrm{Co}(\chi_i, i \in I(x))\right\}$$

qui est un cône convexe fermé, formé de « ϱ-bons axes » en x. Notons aussi:

$$\mathcal{C} = \mathrm{Co}\Big(\bigcup_{\chi \in \Gamma} C(\chi, \theta, \varrho)\Big)\,.$$

Nous voulons maintenant montrer que:

$$x + \mathcal{C} \subset \mathbf{\Omega}$$
$$x - \mathcal{C} \subset \complement\, \overline{\mathbf{\Omega}}\,.$$

Montrons d'abord:

PROPOSITION III.1. – *Soit* $p \leqslant n$, $\chi_0, \ldots, \chi_p$ *des éléments de* Γ, *et*:

$$y_j \in C(\chi_j, \theta, \varrho) \qquad j = 0, \ldots, p$$
$$\lambda_j > 0 \quad \textit{tels que} \quad \sum_{j=0}^{p} \lambda_j \leqslant 1.$$

Alors: $x + y = x + \sum_{j=0}^{p} \lambda_j y_j \in \mathbf{\Omega}$.

DÉMONSTRATION. – On supposera $x = 0$.
Faisons une récurrence sur p.

a) *Pour* $p = 1$:

On a:

$$y = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 \qquad \lambda_0, \lambda_1 < 1$$

où:

$$y_0 \in C(\chi_0, \theta, \varrho) \subset \mathbf{\Omega}\,.$$

Par conséquent:

$$\lambda_0 y_0 \in B(0, \varrho) \cap \mathbf{\Omega}\,.$$

Par ailleurs, y_1 est un élément de $C(\chi_1, \theta, \varrho)$, donc $\lambda_1 y_1$ aussi. Et comme χ_1 est un « ϱ-bon axe » en x:

$$\forall z \in B(0, \varrho) \cap \mathbf{\Omega}\colon\ z + C(\chi_1, \theta, \varrho) \subset \mathbf{\Omega}\,.$$

On en déduit que:

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 \in \mathbf{\Omega}\,.$$

b) Supposons le résultat vrai pour $p - 1$, montrons qu'il est alors vrai pour p. Soit donc:

$$y = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j y_j$$

avec:

$$y_j \in C(\chi_j, \theta, \varrho)\,, \qquad \chi_j \in \Gamma \qquad \lambda_j > 0 \sum_{j=0}^{p} \lambda_j \leqslant 1\,.$$

Posons:

$$z = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j y_j .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, c'est un élément de $\mathbf{\Omega}$. De plus:

$$\|z\| \leqslant \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j \|y_j\| \leqslant \varrho \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j \leqslant \varrho .$$

Par suite, z est un élément de $B(0, \varrho) \cap \mathbf{\Omega}$. Et comme $\lambda_p y_p \in C(\chi_p, \theta, \varrho)$ et que χ_p est un « ϱ-bon axe » en 0:

$$z + \lambda_p y_p \in \mathbf{\Omega} .$$

Ceci nous permet de démontrer le résultat annoncé:

COROLLAIRE III.1. – *On a*:

$$x + \mathcal{C} \subset \mathbf{\Omega}$$

$$x - \mathcal{C} \subset \complement\mathbf{\Omega} .$$

DÉMONSTRATION. – n étant la dimension de l'espace, on sait [9] que chaque $y \in \mathcal{C}$ est combinaison convexe d'au plus $n + 1$ éléments $y_j \in C(\chi_j, \theta, \varrho)$, où $\chi_j \in \Gamma$:

$$y = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j y_j \qquad \lambda_j \geqslant 0, \ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1 .$$

Il suffit d'appliquer la proposition III.1 dans le cas particulier où

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1$$

pour obtenir le résultat.

On montrerait de même que $x - \mathcal{C} \subset \complement\bar{\Omega}$.

Montrons maintenant:

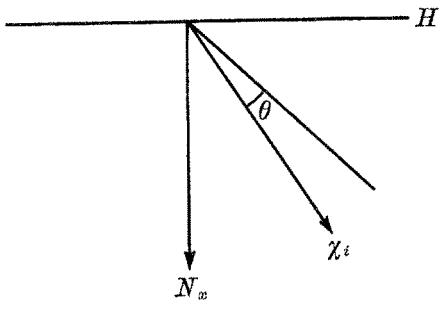
PROPOSITION III.2. – $\forall x \in \partial\mathbf{\Omega}$, $\exists N_x \in \boldsymbol{R}^n$, $\|N_x\| = 1$ *tel que*:

$$\forall y \in B\left(x, \frac{r}{8}\right): \quad (\overrightarrow{V(y)}, \overrightarrow{N_x}) \geqslant \sin\theta .$$

DÉMONSTRATION. – D'après le corollaire III.1, $x + \mathcal{C}$ et $x - \mathcal{C}$ sont des ouverts convexes disjoints qui sont séparables par un hyperplan translaté H dont on notera N_x le vecteur unitaire orienté vers l'intérieur de $\mathbf{\Omega}$.

Soit χ_i un axe de cône tel que $i \in I(x)$. Le cône $C(\chi_i, \theta, \varrho)$ est inclus dans C. On a alors:

$$(\vec{N}_x, \vec{\chi}_i) \geqslant \sin\theta\,.$$



Par ailleurs du fait que:

$$\forall y \in B\left(x, \frac{r}{8}\right): \quad V(y) = \sum_{i \in I(x)} \varphi_i(y)\,\chi_i$$

on a:

$$(\overrightarrow{V(y)}, \overrightarrow{N_x}) = \sum_{i \in I(x)} \varphi_i(y)(\overrightarrow{\chi_i}, \overrightarrow{N_x}) \geqslant \sin\theta \sum_{i \in I(x)} \varphi_i(y) = \sin\theta\,. \qquad \blacksquare$$

REMARQUE III.1. – On a évidemment:

$$\|V(y)\| \geqslant \sin\theta\,.$$

LEMME III.2. – *Soit Γ un cône convexe de $\mathbf{R}^n$, W un champ non singulier de vecteurs C^∞ défini dans une boule $B(0, \alpha)$, tel que*

$$W(y) \in \Gamma \qquad \forall y \in B(0, \alpha)\,.$$

Le systême:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} dy/dt = W(y(t)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique définie su voisinage de 0 telle que:

$$t > 0 \Rightarrow y(t) \in \Gamma$$
$$t < 0 \Rightarrow y(t) \in -\Gamma\,.$$

DÉMONSTRATION. – Le champ W étant C^∞ non singulier au voisinage de 0, l'existence et l'unicité de la solution de (I) résulte des théorèmes généraux sur les équa-

tions différentielles [4]. On sait de plus que la solution $t \mapsto y(t)$ est C^∞. On a:

$$y(t) = \int_0^t W(y(s))\, ds$$

et pour tout t appartenant au domaine de définition de y, on a:

$$\exists s \in [0, t] \quad \text{tel que } y(t) = tW(y(s))$$

d'où le résultat.

Revenons maintenant au champ V intervenant dans les hypothèses du Théorème III.1.

II. – Démonstration du théorème III.1.

ϱ désigne ici la constante trouvée dans le théorème II.1, qu'on supposera, sans restreindre la généralité, inférieure à $r/8$. x étant fixé sur $\partial\Omega$, considérons la boule

$$\mathcal{B}(x) = B(x, \varrho)\,.$$

D'après la remarque III.1, le champ V qui est C^∞, est non singulier. On sait alors [1] que la solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} X(t, x) = V(X(t, x)) \\ X(0, x) = x \end{cases}$$

ou bien est définie jusqu'à l'infini, ou bien atteint $\partial\mathcal{B}(x)$ au bout d'un temps fini (ceci du côté des temps positifs et des temps négatifs).

On est ici nécessairement dans la 2^e cas. En effet, d'après la proposition III.2, il existe un vecteur unitaire N tel que:

$$\forall y \in B\left(x, \frac{r}{8}\right): \quad (\overrightarrow{V(y)}, \overrightarrow{N}) \geqslant \sin\theta\,.$$

Or:

$$(X(t, x) - x, N) = \int_0^t \Big(V(X(s, x)), N\Big)\, ds$$

donc, tant que $X(s, x)$ reste dans $\mathcal{B}(x)$ pour $s \in [0, t]$, on a, pour $t > 0$:

$$(X(t, x) - x, N) \geqslant t \sin\theta$$

ce qui implique

$$\|X(t, x) - x\| \geqslant t \sin\theta .$$

Pour $t < 0$, on a de même:

$$\|X(t, x) - x\| \geqslant |t| \sin\theta .$$

Par suite pour $|t| > \varrho/(\sin\theta)$, $X(t, x)$ est en dehors de $\mathcal{R}(x)$. Notons alors T_x le premier instant positif où $X(T_x, x) \in \partial\mathcal{R}(x)$ et $-T'_x$ le premier instant négatif où $X(-T'_x, x) \in \partial\mathcal{R}(x)$.

REMARQUE III.2. – On a les majorations suivantes:

$$T_x \leqslant \frac{\varrho}{\sin\theta} \qquad T'_x \leqslant \frac{\varrho}{\sin\theta} .$$

D'après le Lemme III.2, en notant $\Gamma = \mathrm{Co}(\chi_i, i \in I(x))$, on sait que:

$$-T'_x \leqslant t < 0 \Rightarrow X(t, x) \in x - \Gamma \subset \complement\Omega$$
$$0 < t \leqslant T_x \Rightarrow X(t, x) \in x + \Gamma \subset \Omega .$$

On obtient 1) et la première partie de 2) du Théorème III.1.

Considérons maintenant un instant t tel que

$$0 < t \leqslant T_x .$$

On sait que $X(t, x) \in x + \Gamma$. Si χ est le vecteur unitaire colinéaire à $X(t, x) - x$, on sait alors que:

$$x + C(\chi, \theta, \varrho) \subset \Omega .$$

Par suite:

$$d(X(t, x), \partial\Omega) \geqslant d\big(X(t, x), \partial(x + C(\chi, \theta, \varrho))\big) > 0 .$$

On raisonnerait de même pour $t < 0$. Ceci nous montre que:

$$\left.\begin{array}{l} X(t, x) \in \partial\Omega \\ t \in [-T'_x, T_x] \end{array}\right\} \Leftrightarrow t = 0 .$$

Enfin, à l'instant T_x on a:

$$X(T_x, x) \in \Gamma \cap \partial\mathcal{R}(x) .$$

De même que précédemment, si χ désigne le vecteur unitaire colinéaire à $X(T_x, x) - x$, on a:

$$x + C(\chi, \theta, \varrho) \subset \Omega$$

et

$$d(X(T_x, x), \partial\Omega) \geqslant d\Big(X(T_x, x), \partial(x + C(\chi, \theta, \varrho))\Big) = \varrho \sin\theta .$$

Il suffit donc de poser:

$$\delta_1 = \varrho \sin\theta$$

pour obtenir la Conclusion 3) (on raisonnerait de même pour $t < 0$).

REMARQUE III.3. – D'après la définition de T_x et T_x' on sait que:

$$\forall t \in]-T_x', T_x[, X(t, x) \in \mathfrak{B}(x) \Rightarrow_t^r \|X(t, x) - x\| < \varrho < \mathrm{Min}\left(\frac{r}{8}, r \sin\theta\right)$$

propriété que nous utiliserons ultérieurement.

CHAPITRE IV

CONSTRUCTION D'UN VOISINAGE TUBULAIRE COMMUN A DEUX OUVERTS UNIFORMEMENT LIPSCHITZIENS PROCHES

Considérons un élément $\Omega \in \pi(\theta, h, R)$. Dans la première partie de ce chapitre, nous montrons qu'il existe $\varepsilon(r, \theta)$ ne dépendant que de $r = R/4$ et θ tel que:

$$\Sigma_{\varepsilon(r,\theta)} = \overline{\bigcup_{x \in \partial\Omega} B(x, \varepsilon(r, \theta))}$$

soit un voisinage tubulaire de $\partial\Omega$ au sens où nous l'avons défini dans l'introduction.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on montrera que si $(\Omega_p)_{p \in N}$ est une suite d'éléments de $\pi(\theta, h, R)$ tendant vers Ω, alors: $\exists P$ tel que $p > P \Rightarrow \Sigma_{\delta(r,\theta/2)}$ est aussi voisinage tubulaire de Ω_p.

A. – Construction d'un voisinage tubulaire de $\partial\Omega$.

Soit donc Ω un élément donné de $\pi(\theta, h, R)$. Nous construisons une famille de champs de vecteurs pour lesquels on montrera qu'il existe ε ne dépendant que de R et θ tel que:

1) Chaque courbe intégrale coupe $\partial\Omega$ en un point unique.

2) Par tout point de Σ_ε passe une courbe intégrale unique à un instant unique.

Une fois choisi le champ de vecteurs, 1) et 2) seront obtenus en appliquant le théorème III.1 en faisant jouer à Ω puis à Ω_δ (pour $|\delta|$ assez petit) le rôle de $\mathbf{\Omega}$. Le champ de vecteurs sera donc choisi de façon à satisfaire les hypothèses du théorème III.1 simultanément pour Ω et pour les Ω_δ.

I) *Définition du champ de vecteurs.*

Rappelons que $r = R/4$ (comme dans le chapitre I). Posons:

$$\Sigma_0 = \overline{\bigcup_{x \in \partial\Omega} B\left(x, \frac{r}{4}\right)}.$$

On sait d'après le chapitre I que:

$$\Sigma_0 = \left\{ y \in \boldsymbol{R}^n;\ d(y, \partial\Omega) \leqslant \frac{r}{4} \right\}.$$

Σ_0 est recouvert par $\bigcup_{x \in \partial\Omega} B(x, r/2)$ dont on peut extraire un recouvrement fini:

$$\exists x_i,\ i = 1, \ldots, N,\ x_i \in \partial\Omega$$

tels que:

$$\Sigma_0 \subset \bigcup_{i=1}^{N} B\left(x_i, \frac{r}{2}\right).$$

Dans toute la suite, nous noterons:

$$B\left(x_i, \frac{r}{2}\right) = B_i$$
$$B(x_i, r) = B_i'.$$

Etant donné que Ω est un élément de $\pi(\theta, h, R)$, par la condition de cône, on peut associer à chaque indice i un vecteur χ_i unitaire de $\boldsymbol{R}^n$ tel que:

$$\forall y \in B_i' \cap \bar{\Omega}: \quad y + C(\chi_i, \theta, R) \subset \Omega$$
$$\forall y \in B_i' \cap \complement\Omega: \ y - C(\chi_i, \theta, R) \subset \complement\bar{\Omega}.$$

Considérons par ailleurs une partition de l'unité $\mathcal{C}^\infty$ sur Σ_0 soit $(\varphi_i,\ i = 1, \ldots, N)$ subordonnée aux B_i:

$$\begin{cases} \operatorname{supp} \varphi_i \subset B_i \\ \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(y) = 1 \quad \forall y \in \Sigma_0. \end{cases}$$

Nous définissons alors:

$$V(y) = \sum_{i=1} \varphi_i(y)\, \chi_i \qquad \forall y \in \Sigma_0 .$$

Il est bien évident que les hypothèses du théorème III.1 du chapitre III sont satisfaites si on fait $\mathbf{\Omega} = \Omega$.

Montrons qu'elles sont aussi satisfaites si on fait $\mathbf{\Omega} = \Omega_\delta$ pour tout $|\delta| \leqslant r/8$.

D'après la proposition I.1, on sait que pour ces valeurs de δ:

$$\forall i = 1, \ldots, N, \quad \forall y \in B_i' \cap \bar{\Omega}_\delta: \quad y + C(\chi_i, \theta, r) \subset \Omega_\delta$$
$$\forall y \in B_i' \cap \complement\, \Omega_\delta: \; y - C(\chi_i, \theta, r) \subset \complement\, \bar{\Omega}_\delta .$$

L'hypothèse H_2 est donc satisfaite.

Montrons que (φ_i) est une partition de l'unité sur

$$\Sigma = \overline{\bigcup_{x \in \partial(\Omega_\delta)} B\left(x, \frac{r}{8}\right)}$$

et pour cela que

$$\Sigma \subset \Sigma_0 .$$

Il suffit pour cela de montrer l'inégalité pour les intérieurs, c'est-à-dire:

$$\bigcup_{x \in \partial(\Omega_\delta)} B\left(x, \frac{r}{8}\right) \subset \bigcup_{x \in \partial\Omega} B\left(x, \frac{r}{4}\right) .$$

D'après la proposition I.2, on a:

$$\partial(\Omega_\delta) = \{y \in \Omega;\ d(y, \partial\Omega) = \delta\}$$

(ceci est vrai pour $\delta > 0$. On raisonnerait de même, pour $\delta < 0$ sur le complementaire de Ω). Donc:

$$z \in \bigcup_{x \in \partial(\Omega_\delta)} B\left(x, \frac{r}{8}\right) \Leftrightarrow \exists y \in \partial(\Omega_\delta)\, t \cdot q \|y - z\| < \frac{r}{8}$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists x \in \partial\Omega: \begin{cases} \|x - y\| = \delta \leqslant \dfrac{r}{8} \\ \|y - z\| < \dfrac{r}{8} . \end{cases}$$

Donc: $\exists x \in \partial\Omega$ tel que $\|x - z\| < r/4$, d'où l'inclusion cherchée.

REMARQUE IV.1. – Le choix des axes χ_i n'est pas unique. Le champ V ne l'est donc pas non plus. Les résultats que nous montrons par la suite concernent donc tous les champs tels que V.

II) *Intégration du champ de vecteurs.*

Etudions maintenant les trajectoires du champ V issues de points de $\partial\Omega$, et pour ceci, intégrons les systèmes différentiels:

$$(I) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} X(t, x) = V(X(t, x)) \\ X(0, x) = x \end{cases}$$

pour chaque $x \in \partial\Omega$.

Le champ V étant C^∞, ces trajectoires sont des courbes C^∞. Appliquons le théorème III.1 en choisissent $\mathbf{\Omega} = \Omega$: il existe $\varepsilon_1(r, \theta)$ et pour chaque $x \in \partial\Omega$ des nombres positifs T_x et T'_x tels que $X(t, x)$ soit définie sur l'intervalle $[-T'_x, T_x]$ et telles que:

$$(1) \qquad \begin{cases} t \in]0, T_x] \quad \Rightarrow X(t, x) \in \Omega \\ t \in [-T'_x, 0[\Rightarrow X(t, x) \in \complement\bar{\Omega} \\ t = 0 \quad\quad\ \Rightarrow X(t, x) = x \\ d(X(T_x, x), \partial\Omega) > \varepsilon_1(r, \theta) \\ d(X(-T'_x, x), \partial\Omega) > \varepsilon_1(r, \theta)\,. \end{cases}$$

Soit alors:

$$\varepsilon_2(r, \theta) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_1(r, \theta) \sin\theta$$

que nous noterons ε_2 dans la suite de ce paragraphe. Nous montrons maintenant que:

$$\Sigma_{\varepsilon_2} = \overline{\bigcup_{x \in \partial\Omega} B(x, \varepsilon_2)}$$

est voisinage tubulaire de $\partial\Omega$.

En raison des conditions (1) on sait que:

$$X(0, x) \in \Sigma_{\varepsilon_2}\,, \qquad X(T_x, x) \notin \Sigma_{\varepsilon_2}\,, \qquad X(-T'_x, x) \notin \Sigma_{\varepsilon_2}\,.$$

Par suite $X(t, x)$ sort de Σ_{ε_2} au moins une fois entre 0 et T_x, et entre $-T'_x$ et 0. Notons α_x et α'_x les instants tels que:

$$X(\alpha_x, x) \in \partial\Sigma_{\varepsilon_2}\,, \qquad X(-\alpha'_x, x) \in \partial\Sigma_{\varepsilon_2}\,, \qquad X(t, x) \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\varepsilon_2} \quad \forall t \in [-\alpha'_x, \alpha_x]$$

et posons:

$$\forall x \in \partial\Omega\colon\ \mathcal{F}_x = \{X(t, x);\ t \in [-\alpha'_x, \alpha_x]\}\,.$$

On a:

PROPOSITION IV.1.

1) $\forall y \in \Sigma_\varepsilon$, $\exists x$ *unique*, $\exists t \in [-\alpha'_x, \alpha_x]$ unique t.q. $y = X(t, x)$.

2) $\forall |\delta| \leqslant \varepsilon_2$, $\forall x \in \partial\Omega$, $\exists t \in [-\alpha'_x, \alpha_x]$ *unique tel que* $X(t, x) \in \partial\Omega_\delta$.

DÉMONSTRATION. – Considérons un élément $y \in \Sigma_{\varepsilon_2}$. D'après la proposition I.2, on sait qu'il existe $\delta \in [-\varepsilon_2, \varepsilon_2]$ tel que:

$$y \in \partial\Omega_\delta$$

et de plus que:

$$d(y, \partial\Omega) = |\delta| .$$

Nous raisonnons sur le cas où δ est positif.

Par application du théorème III.1 avec $\mathbf{\Omega} = \Omega_\delta$, on sait qu'il existe S_y et S'_y tels que $X(s, y)$, solution de:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds} X(s, y) = V(X(s, y)) \\ X(0, y) = y \end{cases}$$

soit définie sur $[-S'_y, S_y]$ et telle que de plus

$$(1) \qquad \begin{cases} s \in [-S'_y, 0[\Rightarrow X(s, y) \in \complement\bar{\Omega}_\delta \\ s \in]0, S_y] \quad \Rightarrow X(s, y) \in \Omega_\delta \\ d(X(-S'_y, y), \partial\Omega_\delta) > \varepsilon_1(r, \theta) \\ d(X(S_y, y), \partial\Omega_\delta) > \varepsilon_1(r, \theta) . \end{cases}$$

Notons:

$$z' = X(-S'_y, y) \qquad z = X(S_y, y) .$$

Montrons qu'on a:

$$z \in \Omega_{\varepsilon_2} \qquad z' \in \complement\bar{\Omega}_- \quad .$$

$z \in \Omega_{\varepsilon_2}$:

il suffit de voir que

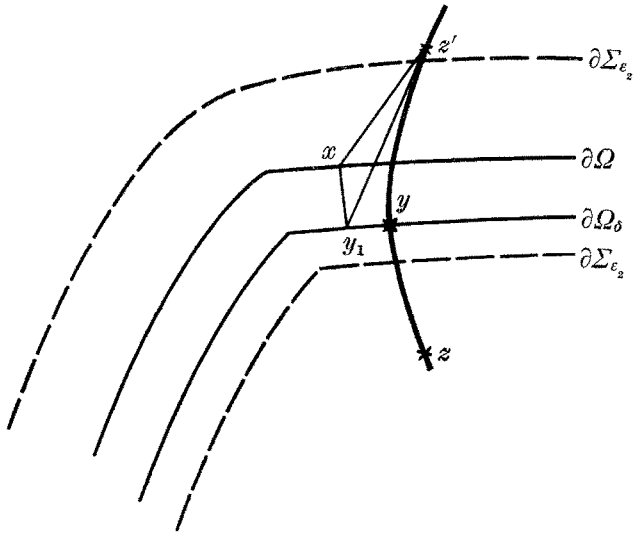
$$d(z, \partial\Omega) > \varepsilon_2 .$$

Or, du fait que $\delta > 0$, on a évidemment

$$d(z, \partial\Omega) > d(z, \partial\Omega_\delta)$$

et d'après (1):

$$d(z, \partial\Omega_\delta) > \varepsilon_1(r, \theta) > \varepsilon_2 .$$



$z' \in \complement\bar{\Omega}_{-\varepsilon_2}$

Il est clair que z' n'est pas dans Ω. En effet, d'après le lemme I.2, les points de $\bar{\Omega} \setminus \Omega_\delta$ sont à une distance de $\partial\Omega_\delta$ inférieure à

$$\frac{\delta}{\sin\theta} < \frac{\varepsilon_2}{\sin\theta} = \frac{\varepsilon_1}{2},$$

ce qui n'est pas le cas de z'.

Il nous suffit alors de montrer que

$$d(z', \partial\Omega) > \varepsilon_2 .$$

Soit x un élément quelconque de $\partial\Omega$. Projetons x en y_1 sur $\partial\Omega_\delta$, on a:

$$\|z' - x\| \geqslant |\,\|z' - y_1\| - \|y_1 - x\|\,| .$$

On sait que

$$\|z' - y_1\| \geqslant d(z', \partial\Omega_\delta) > \varepsilon_1(r, \theta)$$

et d'après le lemme I.2:

$$\|x - y_1\| = d(x, \partial\Omega_\delta) \leqslant \frac{\delta}{\sin\theta} < \frac{\varepsilon_2}{\sin\theta} = \frac{\varepsilon_1(r, \theta)}{2} .$$

Par suite:

$$\|z' - x\| \geqslant \varepsilon_1(r, \theta) - \frac{\varepsilon_1(r, \theta)}{2} > \varepsilon_2 .$$

z' est donc un élément de $\complement \bar{\Omega}_{\varepsilon_2}$.

On déduit de ceci que $z \in \Omega$, $z' \in \complement \bar{\Omega}$, donc il existe $\sigma \in [-S'_y, S_y]$ tel que

$$x = X(\sigma, y) \in \partial\Omega .$$

Posons alors:

$$Y(t, x) = X(t + \sigma, y) \qquad \forall t \in [-\sigma - S'_y, -\sigma + S_y] .$$

On a évidemment:

$$\frac{dY(t, x)}{dt} = V(Y(t, x)) \qquad \forall t \in [-\sigma - S'_y, -\sigma + S_y]$$
$$Y(0, x) = x .$$

Par suite:

$$Y(t, x) = X(t, x) \qquad \forall t \in [-\sigma - S'_y , -\sigma + S_y] \cap [-\alpha'_x, \alpha_x] .$$

Or, du fait que z et z' ne sont pas dans Σ_{ε_2}, on a:

$$Y(-\sigma - S'_y, x) = z' \notin \Sigma_{\varepsilon_2}$$
$$Y(-\sigma + S_y, x) = z \notin \Sigma_{\varepsilon_2}$$

d'où, d'après la définition de α'_x et α_x:

$$[-\alpha'_x, \alpha_x] \subset [-\sigma - S'_y, -\sigma + S_y] .$$

On a donc:

$$\forall t \in [-\alpha'_x, \alpha_x]: X(t, x) = Y(t + \sigma, y)$$

et

1) $X(t + \sigma, y) \in \partial\Omega \Leftrightarrow X(t, x) \in \partial\Omega \Leftrightarrow t = 0$

d'où l'unicité de x dans 1

2) $\left.\begin{array}{l} X(t, x) = y \\ t \in [-\alpha'_x, \alpha_x] \end{array}\right\} \Leftrightarrow X(t + \sigma, y) = y \Leftrightarrow t = -\sigma$

d'où l'unicité de t dans 1

3) $\left.\begin{array}{l} X(t, x) \in \partial\Omega_\delta \\ t \in [-\alpha'_x, \alpha_x] \end{array}\right\} \Leftrightarrow X(t+\sigma, y) \in \partial\Omega_\delta \Leftrightarrow t = -\sigma$

d'où l'unicité de t dans 2. ∎

Cette proprosition montre que Σ_{ε_2} est voisinage tubulaire de $\partial\Omega$.

B. – $\Sigma_{\varepsilon_2(r,\theta/2)}$ est aussi voisinage tubulaire de $\partial\Omega_p$.

Considérons une suite (Ω_p) d'éléments de $\pi(\theta, h, R)$ tendant vers Ω au sens:

$$\|\omega_p - \omega\|_{L^1(D)} \to 0$$

où ω_p et ω désignent les fonctions caractéristiques de Ω et Ω_p.

Nous montrons ici que pour p assez grand, il est possible de choisir le champ V du paragraphe précédent de façon à ce qu'il donne à $\Sigma_{\varepsilon_2(r,\theta/2)}$ une structure de voisinage tubulaire simultanément de $\partial\Omega$ et $\partial\Omega_p$. Pour ceci, on montrera que pour p assez grand, il est possible de choisir les vecteurs χ_i de manière à ce que les hypothèses du Théorème III.1 soient vérifiées simultanément pour Ω et Ω_p. On en déduira que les trajectoires $\mathcal{F}_x$ coupent $\partial\Omega_p$ une fois et une seule, ce qui nous donnera le résultat.

I) *Résultats preliminaires.*

Nous remarquons d'abord que la convergence L^1 des fonctions caractéristiques ω_p vers ω implique la convergence des frontières $\partial\Omega_p$ vers $\partial\Omega$ au sens suivant:

LEMME IV.1. – $\forall \varepsilon > 0$ $\exists p$ *tel que* $p > P \Rightarrow \partial\Omega_p \subset \Sigma_\varepsilon$.

DÉMONSTRATION. – ε étant donné, considérons un élément Ω' de $\pi(\theta, h, r)$ tel que

$$\partial\Omega' \not\subset \Sigma_\varepsilon .$$

Ceci signifie qu'il existe $y \in \partial\Omega'$ qui se trouve à l'extérieur de Σ_ε. La boule centrée en y de rayon ε ne coupe donc pas $\partial\Omega$. On a:

$$\text{ou bien} \quad B(y, \varepsilon) \subset \Omega$$
$$\text{ou bien} \quad B(y, \varepsilon) \subset \complement\,\bar{\Omega} .$$

D'autre part, du fait de la condition de cône pour Ω' au voisinage de y, si on note $K(\varepsilon, \theta)$ le volume du cône d'angle θ et de hauteur ε, on sait que:

$$\int_{B(y,\varepsilon)} \omega'(x)\, dx \geqslant K(\varepsilon, \theta)$$
$$\int_{B(y,\varepsilon)} [1 - \omega'(x)]\, dx \geqslant K(\varepsilon, \theta) .$$

On en déduit que:

$$\int_{R^n} |\omega(x) - \omega'(x)|\, dx \geqslant \int_{B(x,\delta)} |\omega(x) - \omega'(x)|\, dx \geqslant K(\varepsilon, \theta)\,.$$

La distance entre un tel Ω' et Ω est minorée. Par suite, si $\Omega_p \to \Omega$, on en déduit que pour p assez grand, on a:

$$\partial\Omega_p \subset \Sigma_\varepsilon. \quad \blacksquare$$

LEMME IV.2. – $\exists \alpha > 0$ *tel que*:

$$\|\xi - \xi'\| < \alpha \Rightarrow C\left(\xi, \frac{\theta}{2}, R\right) \subset C(\xi', \theta, R)$$

$$C\left(\xi', \frac{\theta}{2}, R\right) \subset C(\xi, \theta, R)\,.$$

DÉMONSTRATION. – Il est clair que cette propriété a lieu dès que l'angle entre ξ et ξ' est inférieur à $\theta/2$, c'est-à-dire:

$$\cos(\xi, \xi') > \cos\frac{\theta}{2}\,.$$

Or:

$$\|\xi - \xi'\|^2 = 2 - 2(\vec{\xi}, \vec{\xi}') = 2 - 2\cos(\xi, \xi')\,.$$

Il suffit donc de choisir:

$$\alpha = \sqrt{2 - 2\cos\frac{\theta}{2}}\,. \quad \blacksquare$$

II) $\Sigma_{\delta_2(r,\theta/2)}$ *est voisinage tubulaire de* $\partial\Omega_p$ *pour* p *assez grand.*

Nous montrons d'abord que pour chaque p assez grand, il est possible de choisir les vecteurs χ_i de façon à ce que les hypothèses du Théorème III.1 soient satisfaites simultanément pour Ω et Ω_p, à condition de remplacer θ par $\theta/2$.

PROPOSITION IV.2. – $\exists P_1$ *tel que* $p > P_1 \Rightarrow \forall i = 1, \ldots, N$ $\exists \chi_i$ *tel que*:

1) $\partial\Omega_p \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_i'$

2) $\forall y \in B_i' \cap \bar{\Omega}_p$: $y + C\left(\chi_i, \frac{\theta}{2}, R\right) \subset \Omega_p$

$\forall y \in B_i' \cap \complement\Omega_p$: $y - C\left(\chi_i, \frac{\theta}{2}, R\right) \subset \complement\bar{\Omega}_p$

3) $\forall y \in B_i' \cap \bar{\Omega}$: $y + C(\chi_i, \theta, R) \subset \Omega$

$\forall y \in B_i' \cap \complement\Omega$: $y - C(\chi_i, \theta, R) \subset \complement\bar{\Omega}$

DÉMONSTRATION. – Du fait qu'on a:

$$\Sigma_0 = \overline{\bigcup_{x\in\partial\Omega} B\left(x, \frac{r}{4}\right)} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_i'$$

la partie 1 de cette Proposition n'est autre que le Lemme IV.1.

$$\exists P_2 : p > P_2 \Rightarrow \partial\Omega_p \subset \Sigma_0 .$$

Par ailleurs, les points x_i étant des éléments de $\partial\Omega$, il est clair avec le Lemme IV.1 que:

$$\forall i = 1, \ldots, N , \quad \forall p \in \boldsymbol{N} , \quad \exists x_i^p \in \partial\Omega_p \quad \text{t.q.} \quad x_i^p \to x_i .$$

Or, on sait par hypothèse que tous les Ω_p satisfont la condition de cône en, θ, R:

$$\forall i = 1, \ldots, N, \quad \forall p \in \boldsymbol{N} , \quad \exists \xi_i^p \in \boldsymbol{R}^n \text{ de norme 1 tel que:}$$

$$(1) \qquad \begin{cases} \forall y \in B(x_i^p, R) \cap \bar{\Omega}_p : & y + C(\xi_i^p, \theta, R) \subset \Omega_p \\ \forall y \in B(x_i^p, R) \cap \complement\Omega_p : & y - C(\xi_i^p, \theta, R) \subset \complement\bar{\Omega}_p . \end{cases}$$

De plus, il est clair qu'il existe P_3 tel que:

$$\forall i = 1, \ldots, N , \quad \forall p > P_3 , \quad B(x_i, r) = B_i' \subset B(x_i^p, R) .$$

On a donc:

$$\forall p > \operatorname{Max}(P_2, P_3) = P_4$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \forall y \in B_i' \cap \bar{\Omega}_p : & y + C(\xi_i^p, \theta, R) \subset \Omega_p \\ \forall y \in B_i' \cap \complement\Omega_p : & y - C(\xi_i^p, \theta, R) \subset \complement\bar{\Omega}_p . \end{cases}$$

Pour chaque indice i, désignons alors par A_i l'ensemble des points d'accumulation de la suite $(\xi_i^p)_{p\in\boldsymbol{N}}$. On a démontré dans un article précédent [3] que:

$$(3) \qquad \begin{cases} \forall \xi \in A_i , & \forall y \in B(x_i, R) \cap \bar{\Omega} : \quad y + C(\xi, \theta, R) \subset \Omega \\ & \forall y \in B(x_i, R) \cap \complement\bar{\Omega} : \quad y - C(\xi, \theta, R) \subset \complement\bar{\Omega} . \end{cases}$$

Or, les suites $(\xi_i^p)_{p\in\boldsymbol{N}}$ étant bornées:

$$\forall \alpha > 0 , \quad \forall i , \quad \exists P_5^i \quad \text{tel que} \quad p > P_5^i \Rightarrow \exists \chi_i \in A \quad \text{tel que} \quad \|\xi_i^p - \chi_i\| < \alpha$$

et même, du fait que les indices i sont en nombre fini:

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists P_5 \quad \text{tel que } \forall i , \quad \forall p > P_5 \quad \exists \chi_i \in A \quad \text{tel que} \quad \|\xi_i^p - \chi_i\| < \alpha .$$

Alors pour $p > \text{Max}\ (P_4, P_5) = P_1$, de (2) et du Lemme IV.2, on déduit:

$$\forall y \in B_i' \cap \bar{\Omega}_p \ : \quad y + C\left(\xi_i, \frac{\theta}{2}, R\right) \subset \Omega_p$$

$$\forall y \in B_i' \cap \complement\Omega_p : \quad y - C\left(\xi_i, \frac{\theta}{2}, R\right) \subset \complement\bar{\Omega}_p$$

ce qui, avec (3) nous donne la Proposition IV.2.

Dorénavant, on notera $\delta = \delta_2(r, \theta/2) = \frac{1}{2}\delta_1(r, \theta/2) \sin(\theta/2)$, où $\delta_1(r, \theta/2)$ désigne la constante trouvée dans le Théorème III.1.

D'après les résultats du Paragraphe A de ce Chapitre et d'après la Proposition IV.2, on sait que le champ V construit par recollement des vecteurs χ_i trouvés dans la Proposition IV.2. a des courbes intégrales $\mathcal{F}_x$ ($x \in \partial\Omega$) qui munissent Σ_ε d'une structure de voisinage tubulaire.

REMARQUE. – On a montré que pour chaque p assez grand, il existe un champ V ayant les propriétés requises. *Ce champ dépend de p.* Considérons maintenant P_6 tel que

$$p > P_6 \Rightarrow \partial\Omega_p \subset \Sigma_{\varepsilon/2}$$

et pour $p > P = \text{Max}\ (P_1, P_7)$ considérons le champ V trouvé précédemment. On a:

PROPOSITION IV.3. – Chaque courbe $\mathcal{F}_x$ coupe $\partial\Omega_p$ en un point unique.

DÉMONSTRATION. – On note encore α_x et $-\alpha_x'$ les 1$^{\text{ers}}$ instants tels que

$$X(\alpha_x, x) \in \partial\Omega_\varepsilon\,, \qquad X(-\alpha_x', x) \in \partial\Omega_{-\varepsilon}\,.$$

Considérons $x \in \partial\Omega$. On sait que:

$$X(\alpha_x, x) \in \partial\Omega_\varepsilon \Rightarrow X(\alpha_x, x) \in \Omega_p$$

$$X(-\alpha_x', x) \in \partial\Omega_{-\varepsilon} \Rightarrow X(-\alpha_x', x) \in \complement\bar{\Omega}_p\,.$$

Il existe donc $t \in [-\alpha_x', \alpha_x]$ tel que:

$$X(t, x) \in \partial\Omega_p\,.$$

Montrons qu'un tel t est unique. Le principe de la démonstration est le même que celui de la Proposition IV.I. Posons $y = X(t, x)$ et intégrons:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds} X(s, y) = V(X(s, y)) \\ X(0, y) = y\,. \end{cases}$$

Ω_y remplissant les hypothèses du Théorème III.1., on sait que $X(s, y)$ est défini sur un intervalle $[-S'_y, S_y]$ tel que:

$$\begin{cases} s \in [-S'_y, 0[& \Rightarrow X(s, y) \in \complement\bar{\Omega}_y \\ s \in]0, S_y] & \Rightarrow X(s, y) \in \Omega_y \\ d(X(-S'_y, y), \partial\Omega_y) & > \varepsilon_1(r, \theta/2) \\ d(X(S_y, y), \partial\Omega_y) & > \varepsilon_1(r, \theta/2)\,. \end{cases}$$

Posons

$$z = X(S_y, y) \qquad z' = X(-S'_y, y)$$

et montrons que $z \in \Omega_\varepsilon$, $z' \in \complement\bar{\Omega}_{-\varepsilon}$.

$z \in \Omega_\varepsilon$

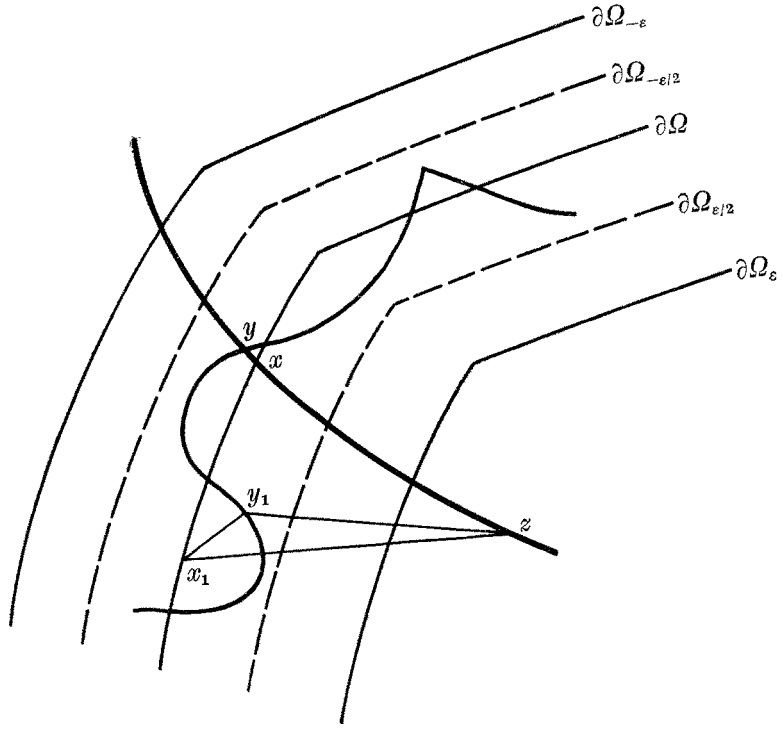
z étant donné dans Ω_y à une distance supérieure à $\varepsilon_1(r, \theta/2)$ de $\partial\Omega_y$, il est aussi dans Ω (si du moins ε_1 n'est pas trop grand, ce qu'on peut supposer sans restreindre la généralité).

Il nous suffit de voir que

$$d(z, \partial\Omega) > \varepsilon\,.$$

Considérons un élément quelconque x_1 de $\partial\Omega$. Projetons x_1 en y_1 sur $\partial\Omega_y$. On a:

$$\|z - x_1\| \geqslant |\,\|z - y_1\| - \|x_1 - y_1\|\,|\,.$$



On a évidemment:

$$\|z - y_1\| \geqslant \varepsilon_1\left(r, \frac{\theta}{2}\right).$$

On a aussi:

$$\|x_1 - y_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \sin \theta/2}.$$

En effet:

si $x_1 \notin \Omega_p$, du fait que $\Omega_p \subset \Omega_{\varepsilon/2}$, on a:

$$d(x_1, \partial\Omega_p) \leqslant d(x_1, \partial\Omega_{\varepsilon/2})$$

et d'après le Lemme I.2:

$$d(x_1, \partial\Omega_{\varepsilon/2}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \sin \theta/2}.$$

On en déduit que

$$\|x_1 - y_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \sin \theta/2}.$$

On raisonnerait de même si $x_1 \in \Omega_p$ en utilisant $\Omega_{-\varepsilon/2}$. On a donc:

$$\|z - x_1\| \geqslant \varepsilon_1\left(r, \frac{2}{\theta}\right) - \frac{\varepsilon}{2 \sin \theta/2}.$$

Et comme:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(r, \frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} \qquad \|z - x_1\| \geqslant \frac{3\varepsilon_1}{4} > \frac{1}{2}\varepsilon_1 \sin\frac{\theta}{2} = \varepsilon.$$

On en déduit que $z \in \Omega_\varepsilon$.

On montrerait de même que $z' \in \complement\,\overline{\Omega}_{-\varepsilon}$.

La fin de la démonstration de cette proposition est alors la même que celle de la Proposition IV.1. ∎

Ceci montre que Σ_ε est voisinage tubulaire de $\partial\Omega_p$.

CHAPITRE V

CONSTRUCTION DE L'HOMÉOMORPHISME BILIPSCHITZIEN

Dans ce Chapitre, nous construisons dans le § I un homéomorphisme F de $\boldsymbol{R}^n$ tel que $F(\Omega) = \Omega_p$. Dans le § II, nous montrons que cet homémorphisme est bilipschitzien.

Commençons par un bilan du Chapitre IV: pour p assez grand, on a:

$$\partial\Omega_p \subset \Sigma_{\varepsilon/2}\,.$$

Et les courbes intégrales $\mathcal{F}_x$ des systèmes

$$(I) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t,x) = V(X(t,x)) \\ X(0,x) = x \qquad\qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

sont définies sur des intervalles $[-\alpha'_x, \alpha_x]$ tels que:

$$X(-\alpha'_x, x) \in \partial\Sigma_\varepsilon \qquad X(\alpha_x, x) \in \partial\Sigma_\varepsilon$$
$$\forall t \in [-\alpha'_x, \alpha_x]:\ X(t,x) \in \mathring{\Sigma}_\varepsilon\,.$$

De plus:

1) $\forall y \in \Sigma_\varepsilon,\ \exists!x,\ \exists!t \in [-\alpha'_x, \alpha_x]$ tel que $y = X(t,x)$;

2) $\forall \delta \in [-\varepsilon, \varepsilon],\ \forall x \in \partial\Omega,\ \exists!t$ t.q. $X(t,x) \in \partial\Omega_\delta$;

3) $\forall x \in \partial\Omega,\ \exists!t$ t.q. $X(t,x) \in \partial\Omega_p$.

I. – Définition de l'homéomorphisme (cf. fig. V.1).

On suppose maintenant p fixé tel que $\partial\Omega_p \subset \Sigma_{\varepsilon/2}$. On notera $F: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ l'homéomorphisme cherché. Tout d'abord, si y n'est pas dans Σ_ε, on définira:

$$F(y) = y\,.$$

Soit maintenant y un élément de Σ_ε. Considérons la trajectoire $\mathcal{F}_x$ de (I) qui passe par y. Notons:

$$\{x\} = \mathcal{F}_x \cap \partial\Omega \quad = \{X(0,x)\}$$
$$\{\xi\} = \mathcal{F}_x \cap \partial\Omega_p \quad = \{X(\sigma_x, x)\}$$
$$\{z\} = \mathcal{F}_x \cap \partial\Omega_\varepsilon \quad = \{X(\alpha_x, x)\}$$
$$\{z'\} = \mathcal{F}_x \cap \partial\Omega_{-\varepsilon} = \{X(-\alpha'_x, x)\}$$
$$y = X(t,x)\,.$$

Le point $F(y)$ que nous définissions est un point de $\mathcal{F}_x$, que nous définissons par l'instant de passage. C'est-à-dire que nous nous donnons une application:

$$\mathcal{C}_x: [-\alpha'_x, \alpha_x] \to [-\alpha'_x, \alpha_x]: t \to \tau$$

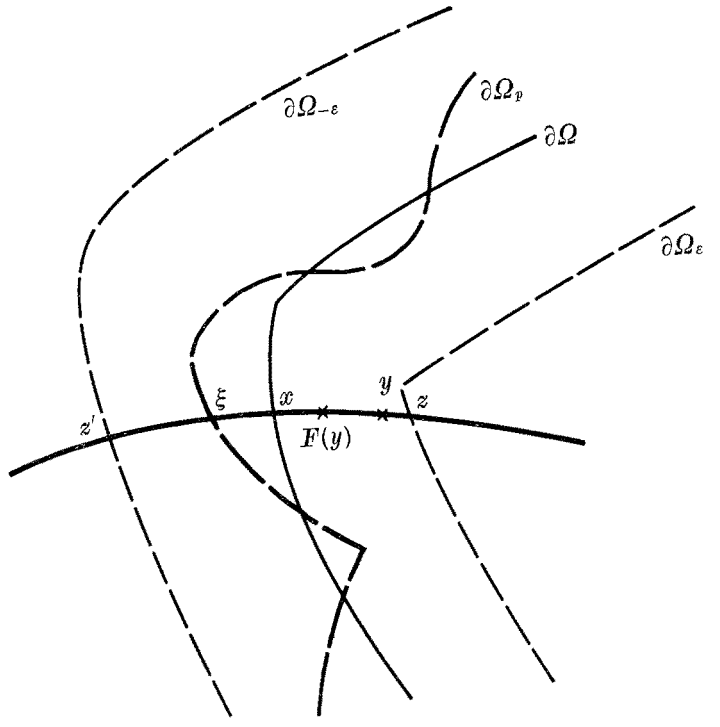


figure dans R^n

bijective. On prendra alors:

$$F(y) = X\big(\mathcal{C}_x(t), x\big) .$$

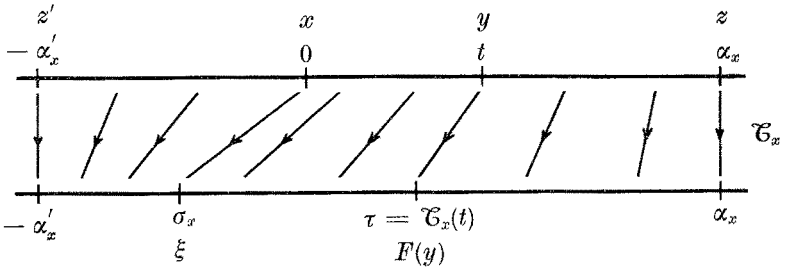


figure dans l'espace temps
Fig. V.1.

DÉFINITION DE $\mathcal{C}_x$. – x étant fixé, nous définissons $\mathcal{C}_x$ par recollement de 2 affinités respectivement sur les temps négatifs et les temps positifs, telles que:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_x(0) & = \sigma_x \\ \mathcal{C}_x(\alpha_x) & = \alpha_x \\ \mathcal{C}_x(-\alpha'_x) & = -\alpha'_x . \end{cases}$$

L'expression analytique de $\mathcal{C}_x$ est:

$$\mathcal{C}_x(t) = \begin{cases} \sigma_x + \dfrac{\alpha_x - \sigma_x}{\alpha_x} t & \text{pour } t \geqslant 0 \\ \sigma_x + \dfrac{\alpha'_x + \sigma_x}{\alpha'_x} t & \text{pour } t \leqslant 0 \end{cases}$$

F est alors définie par:

$$\begin{aligned} &y \notin \Sigma_\varepsilon: && F(y) = y \\ &y \in \Sigma_\varepsilon: && \text{si} \quad y = X(t, x) \\ &&& \text{alors} \quad F(y) = X(\tau, x) \\ &&& \text{avec} \quad \tau = \mathcal{C}_x(t) = \begin{cases} \sigma_x + \dfrac{\alpha_x - \sigma_x}{\alpha_x} t & t \geqslant 0 \\ \sigma_x + \dfrac{\alpha'_x + \sigma_x}{\alpha'_x} t & t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

F est une bijection de $\boldsymbol{R}^n$.

II. – F est bilipschitzien.

Nous montrons d'abord que F est localement uniformément lipschitzienne sur $\mathring{\Sigma}_\varepsilon$, c'est-à-dire:

$$\exists K > 0 : \forall y_0 \in \mathring{\Sigma}_\varepsilon , \quad \exists \mu > 0 \quad \text{t.q.} \quad \|y - y_0\| < \mu \Rightarrow \|F(y) - F(y_0)\| \leqslant K \|y - y_0\| .$$

On montrera ensuite que F_1 est globalement lipschitzienne sur $\boldsymbol{R}^n$.

On montrerait de même que F^{-1} est lipschitzienne.

Fixons un élément y_0 de $\mathring{\Sigma}_\varepsilon$. Dans toute la suite pour $y \in \Sigma_\varepsilon$ nous noterons x l'élément de $\partial\Omega$ tel que $y \in \mathcal{F}_x$, et t l'instant de passage en x:

$$y = X(t, x) .$$

Nous étudierons F en la décomposant et en la considérant comme une fonction de fonction. Pour ceci, nous étudierons les applications

$$\begin{cases} y \mapsto x , \quad t \mapsto \tau , \quad (x, s) \mapsto X(s, x) \\ y \mapsto t . \end{cases}$$

Ceci est fait dans les lemmes et propositions qui suivent. On montrera ensuite que F est lipschitzienne.

LEMME V.1. – *Les applications*:

$$y \mapsto t\colon \Sigma_\varepsilon \to \mathbf{R}$$

$$y \mapsto x\colon \Sigma_\varepsilon \to \partial\Omega$$

sont continues.

DÉMONSTRATION. – Soit $(y_p)_{p\in N}$ une suite d'éléments de Σ_ε convergeant vers un élément $y \in \Sigma_\varepsilon$.

En notant:

$$y_p = X(t_p, x_p)$$

$$y = X(t, x)$$

il nous suffit de montrer que:

$$t_p \to t$$

$$x_p \to x\,.$$

D'après la Remarque III.2, on sait que la suite $\{t_p\}$ est bornée, donc compacte. De plus (x_p) est une partie de $\partial\Omega$ qui est compacte. Il suffit donc de montrer que t et x sont les seuls points adhérents respectivement à (x_p) et (t_p).

Soient t^* et x^* 2 tels points adhérents. On sait évidemment que x^* est un élément de $\partial\Omega$.

Par ailleurs, si on définit pour chaque $y \in \Sigma_\varepsilon$:

$$I_y = \{s;\ X(s, y) \in \Sigma_\varepsilon\}$$

I_y est un translaté de l'intervalle $[-\alpha'_x, \alpha_x]$ correspondant. C'est donc un fermé. La fonction $X(s, y)$ est alors définie sur l'ensemble:

$$K = \{(s, y);\ y \in \Sigma_\varepsilon,\ s \in I_y\}$$

qui est un compact de $\mathbf{R}^{n+1}$. Et, du fait que V est un champ C^∞, X est C^∞ sur K.

L'élément (t^*, x^*) de $\mathbf{R}^{n+1}$ est un élément de K, qui est limite d'une suite $(t_{p'}, x_{p'})$ extraite de (t_p, x_p). On a alors:

$$X(t^*, x^*) = \lim_{p'\to\infty} X(t_{p'}, x_{p'}) = \lim_{p'\to\infty} y_{p'} = y\,.$$

Or, le couple (t, x) tel que $y = X(t, x)$ est unique. Par suite:

$$t^* = t$$

$$x^* = x\,. \qquad \blacksquare$$

Etudions maintenant la fonction $(s, y) \to X(s, y)$. On notera encore, comme dans le lemme précédent:

$$\forall y \in \Sigma_\varepsilon\colon\ I_y = \{s \in \boldsymbol{R};\ X(s, y) \in \Sigma_\varepsilon\}$$

$$K = \{(s, y);\ y \in \Sigma_\varepsilon,\ s \in I_y\}$$

qui est compact.

LEMME V.2. – $\exists k_1 > 0$ *tel que*:

$$\forall y \in \Sigma_\varepsilon\,, \quad \forall s_1, s_2 \in I_y\colon \|X(s_1, y) - X(s_2, y)\| \leqslant k_1 |s_1 - s_2|$$

$$\forall y_1, y_2 \in \Sigma_\varepsilon\,, \quad \forall s \in I_{y_1} \cap I_{y_2}\colon \|X(s, y_1) - X(s, y_2)\| \leqslant k_1 \|y_1 - y_2\|$$

DÉMONSTRATION. – La fonction $X(s, y)$ est de classe C^∞ sur K qui est un compact. Il suffit de prendre pour k_1 la borne supérieure de toutes ses dérivées premières, qui est atteinte. ■

LEMME V.3. – $\exists k_2 > 0$ *tel que*:

$$\forall x \in \partial\Omega\,, \quad \forall t_1, t_2 \in]-\alpha'_x, \alpha_x]\colon |\mathcal{C}_x(t_1) - \mathcal{C}_x(t_2)| \leqslant k_2 |t_2 - t_1|$$

DÉMONSTRATION. – On a évidemment:

$$|\mathcal{C}_x(t_2) - \mathcal{C}_x(t_1)| \leqslant \operatorname{Max}\left[\frac{\alpha_x - \sigma_x}{\alpha_x}\,,\ \frac{\alpha'_x + \sigma_x}{\alpha'_x}\right] |t_2 - t_1|\,.$$

Il nous suffit donc de voir que les 2 nombres dont on a pris le max sont bornés.

Nous montrons que le premier l'est. On montrerait de même que le second l'est.

On sait que:

$$-\alpha'_x < \sigma_x < \alpha_x\,.$$

On en déduit que:

$$\left|\frac{\alpha_x - \sigma_x}{\alpha_x}\right| < \operatorname{Max}\left[\frac{\alpha_x + \alpha'_x}{\alpha_x}\,,\ \frac{2\alpha_x}{\alpha_x}\right].$$

Minorons le dénominateur α_x. Du fait que $X(\alpha_x, x)$ appartient au bord de Σ_ε, on a:

$$\|X(\alpha_x, x) - x\| \geqslant \varepsilon\,.$$

D'où:

$$\varepsilon \leqslant \|X(\alpha_x, x) - x\| = \left\| \int_0^{\alpha_x} V(X(s, x))\, ds \right\| \leqslant \alpha_x \qquad (\text{car } \|V\| \leqslant 1)\,.$$

Majorons maintenant le numérateur. On sait que:

$$0 < \alpha_x \leqslant T_x$$
$$0 < \alpha'_x \leqslant T'_x .$$

Or, on a vu dans la Remarque III.2 qu'il existe $C = \varrho/\sin\theta$ positif tel que:

$$\forall x \in \partial\Omega: T_x < C \qquad T'_x < C .$$

On a donc:

$$\forall x \in \partial\Omega \qquad \frac{\alpha_x + \alpha'_x}{\alpha_x} < \frac{2C}{\varepsilon} .$$

Il suffit donc de poser:

$$k_2 = \frac{2C}{\varepsilon} . \qquad \blacksquare$$

Nous voulons maintenant montrer que les applications $y \to x$ et $y \to t$ sont lipschitziennes. Ces résultats seront montrés localement. Dorénavant, y_0 désignera un élément fixé dans Σ_ε, se trouvant sur la trajection $\mathcal{T}_{x_0}$.

Nous utilisons ici le fait que les éléments de $\pi(\theta, h, R)$ sont localement épigraphes de fonctions lipschitziennes. Plus précisément (cf. [3]), on sait qu'il existe un système de coordonnées tel que x_0 soit centre d'un cylindre $P = (\hat{P} \times I)$ où $\hat{P}$ désigne la boule de $\boldsymbol{R}^{n-1}$ de rayon $R \sin\theta$, I désigne un intervalle de $\boldsymbol{R}$, et une fonction lipschitzienne $f: \hat{P} \to I$ de constante de lipschitz $\operatorname{cotg}\theta$, tels que:

$$\Omega \cap P = \{(\hat{y}, y^n) \in \hat{P} \times I;\ y^n > f(\hat{y})\} .$$

($\hat{y}$ désigne la projection de y dans $\boldsymbol{R}^{n-1}$).

Pour montrer que $y \mapsto t$ et $y \mapsto x$ sont des applications lipschitziennes, nous définissons, pour y voisin de y_0 et $s \in I_y$ la fonction:

$$g(s, y) = X^n(s, y) - f(\hat{X}(s, y)) .$$

Nous montrons d'abord (Lemme V.4.) qu'il existe un voisinage W de y_0 tel que g soit définie sur l'ensemble $\{(s, y);\ y \in W,\ s \in I_y\}$. Nous montrons ensuite (Prop. V.1. et Lemme V.6.) qu'elle vérifie les inégalités suivantes

$$\exists \mu > 0 \quad \text{tel que} \quad g(s_1, y) - g(s_2, y) > \mu(s_1 - s_2) \qquad (s_1 > s_2)$$
$$\exists k_3 > 0 \quad \text{tel que} \quad |g(s, y_1) - g(s, y_2)| \leqslant k_3 \|y_1 - y_2\| .$$

On en déduira que $y \mapsto t$ et $y \mapsto x$ sont localement lipschitziennes.

LEMME V.4. – *Il existe un voisinage W de y_0 tel que*:

$$y \in W\,, \quad s \in I_y \Rightarrow \hat{X}(s, y) \in \hat{P}\,.$$

DÉMONSTRATION. – (Cf. fig. V.2).

Rappelons la Remarque III.3. du Chapitre III. On a pour chaque $x \in \partial\Omega$ et chaque $s \in]-T'_x, T_x[$

$$\|X(s, x) - x\| < \varrho < r \sin\theta\,.$$

On en déduit que, pour tout $y \in \Sigma_\varepsilon$ et tout $s \in I_y$ (pour lequel $X(s, y)$ appartient nécessairement à Σ_ε):

$$\|X(s, y) - x\| < \varrho < r \sin\theta\,.$$

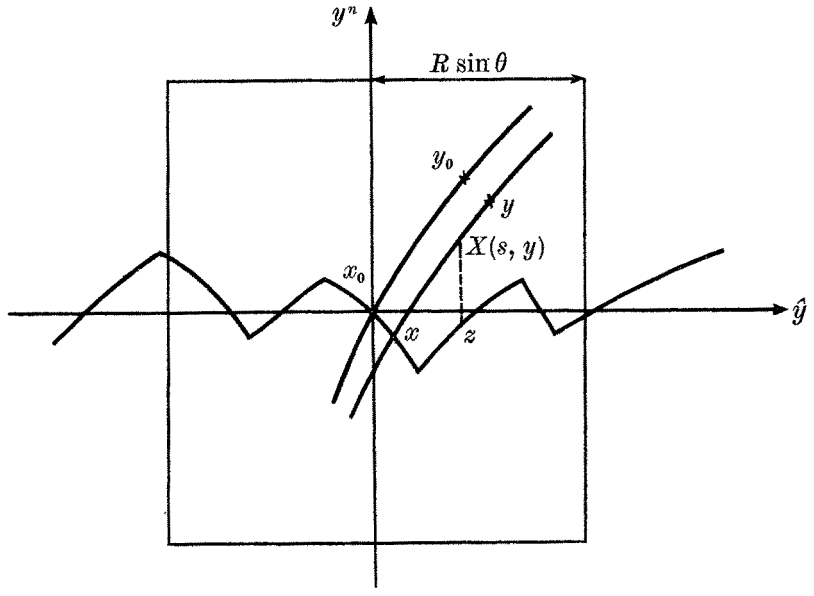


Fig. V.2.

En particulier, pour $s \in I_{y_0}$, on a:

$$\|X(s, y_0) - x_0\| < r \sin\theta\,.$$

D'où:

$$\|\hat{X}(s, y_0) - \hat{x}_0\| < r \sin\theta$$

et comme $r = R/4$, $\hat{X}(s, y_0)$ appartient à $\hat{P}$.

Etudions maintenant le cas d'un $y \in \Sigma_\varepsilon$, différent de y_0. Pour $s \in I_y$, on a:

$$\begin{aligned}\|X(s, y) - x_0\| &\leqslant \|X(s, y) - x\| + \|x - x_0\| \\ &< r \sin\theta + \|x - x_0\| .\end{aligned}$$

Or, on sait (Lemme V.1.) que l'application $y \to x$ est continue. Donc:

$$\forall \varepsilon \cdot \exists \eta \quad \text{tel que} \quad \|y - y_0\| \leqslant \eta \Rightarrow \|x - x_0\| < \varepsilon .$$

Il existe alors évidemment η tel que:

$$\begin{aligned} y \in W = \{y;\ \|y - y_0\| \leqslant \eta\} &\Rightarrow \|X(s, y) - x_0\| < R \sin\theta \\ \text{donc aussi} \qquad &\|\hat{X}(s, y) - \hat{x}_0\| < R \sin\theta \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du Lemme V.4. ∎

Considérons maintenant un élément $y \in \Sigma_\varepsilon$, $s \in I_y$, et désignons par z l'élément:

$$z = \left(\hat{X}(s, y), f(\hat{X}(s, y))\right) \in \partial\Omega .$$

On a:

LEMME V.5. – (Cf. fig. V.2)

$$X(s, y) \in B_i \Rightarrow z \in B\left(x_i, \frac{5r}{2}\right).$$

DÉMONSTRATION. – On a:

$$\|z - x_i\| \leqslant \|z - X(s, y)\| + \|X(s, y) - x_i\| .$$

Evaluons le premier terme de cette somme:

$$\|z - X(s, y)\| \leqslant \|z - x\| + \|x - X(s, y)\| .$$

On sait que: $\|x - X(s, y)\| < r \sin\theta$.

Evaluons $\|z - x\|$:

$$\|z - x\|^2 = \|\hat{X}(s, y) - \hat{x}\|^2 + |f(\hat{X}(s, y)) - f(\hat{x})|^2 .$$

Or f est lipschitzienne de constante $\operatorname{cotg}\theta$. Donc:

$$\|z - x\|^2 \leqslant \|\hat{X}(s, y) - \hat{x}\|^2 \left[1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right] \leqslant r^2 \sin^2\theta \frac{1}{\sin^2\theta} \Rightarrow \|z - x\| \leqslant r .$$

On a donc:

$$\|z - X(s, y)\| \leqslant r + r \sin\theta < 2r$$

et

$$\|z - x_i\| \leqslant 2r + \frac{r}{2} = \frac{5r}{2} < R\,. \quad \blacksquare$$

De cette proposition on déduit qu'en un tel point $X(y, s)$, le vecteur vitesse $V(X(y, s))$ est combinaison convexe de vecteurs $(\chi_i, i \in J)$ tels que:

$$\begin{aligned} \forall i \in J \quad & \forall z' \in B(z, r) \cap \bar{\Omega} \qquad z' + C(\chi_i, \theta, r) \subset \Omega \\ & \forall z' \in B(z, r) \cap \complement\Omega \qquad z' - C(\chi_i, \theta, r) \subset \complement\bar{\Omega}\,. \end{aligned}$$

A l'aide du théorème II.1, on déduit:

$$\begin{cases} z + C\big(V(X(s, y)), \theta, \varrho\big) \subset \Omega \\ z - C\big(V(X(s, y)), \theta, \varrho\big) \subset \complement\bar{\Omega}\,. \end{cases}$$

PROPOSITION V.1. – *Il existe μ ne dépendant que de r, θ et Ω tel que*:

$$\begin{aligned} & \forall y \in W\,, \quad \forall s_1, s_2 \in I_y \quad s_1 \geqslant s_2 : \\ & g(s_1, y) - g(s_2, y) > \mu(s_1 - s_2)\,. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. – Le fait que $y \in W$ assure que g est bien définie aux points (s, y) tels que $s \in I_y$.

La fonction $s \to g(s, y) : I_y \subset \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ est une fonction lipschitzienne, donc dérivable presque partout, et:

$$g(s_2, y) - g(s_1, y) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds}\, g(s, y)\, ds$$

avec

$$\text{p.p. } s \in I_y : \frac{d}{ds}\, g(s, y) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{g(s + \sigma) - g(s)}{\sigma}\,.$$

Evaluons ce quotient différentiel.

Etant donné que y est ici fixé, pour alléger les notations, nous noterons $X(s)$ et $g(s)$ pour $X(s, y)$ et $g(s, y)$. Nous noterons aussi:

$$V(X(s)) = \chi \quad \big(\hat{X}(s), f(\hat{X}(s))\big) = z\,.$$

On a:

$$g(s + \sigma) - g(s) = X^n(s + \sigma) - X^n(s) - \big[f\big(\hat{X}(s + \sigma)\big) - f\big(\hat{X}(s)\big)\big]\,.$$

Etant donné que $X(s)$ est une fonction C^∞:

$$X^n(s + \sigma) - X^n(s) = \frac{d}{ds}\, X^n(s) \cdot \sigma + \sigma\varepsilon(\sigma) = X^n \cdot \sigma + \sigma\varepsilon(\sigma)$$

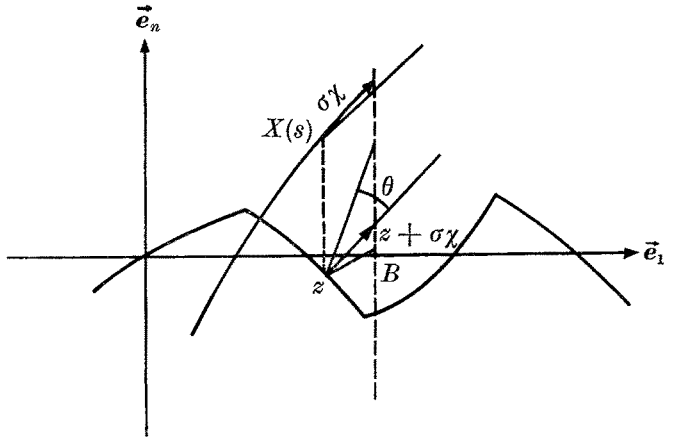


Fig. V.3.

et de même pour $\hat{X}$. Et de plus, du fait que f est lipschitzienne:

$$f(\hat{X}(s+\sigma)) = f(\hat{X}(s) + \sigma\hat{\chi}) + \sigma\varepsilon(\sigma)\,.$$

D'où:

$$g(s+\sigma) - g(s) = \sigma\chi^n - [f(\hat{z}+\sigma\hat{\chi}) - f(\hat{z})] + \sigma\varepsilon(\sigma)\,.$$

Supposons d'abord que χ n'est pas vertical. Etudions la figure dans le plan $\mathfrak{L}(\vec{e}_n, \vec{\chi})$ (cf. fig. V.3). Soit $\vec{e}_1$ le vecteur de base horizontal dans ce plan, choisi de façon à ce que χ ait un angle polaire $\omega \in]-(\pi/2), +(\pi/2)[$.

D'après le lemme précédent, on sait que:

$$z + C(\chi, \theta, \varrho) \subset \Omega\,.$$

On en déduit que pour σ assez petit, le point le plus bas de $z + C(\chi, \theta, \varrho)$ ayant pour abscisse $\hat{X}(s) + \sigma\hat{\chi}$, soit B, est au-dessus du point de même abscisse situé sur le graphe de f. Désignons alors par C l'extrémité de $z + \sigma\chi$. On a alors (cf. fig. V.4)

$$g(s+\sigma) - g(s) \geqslant \overline{BC} + \sigma\varepsilon(\sigma)$$

On peut remarquer que:

$$-\frac{\pi}{2} + \theta < \omega < \frac{\pi}{2}\,.$$

Evaluons $\overline{BC}$:

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$$
$$\overline{AC} = \sigma\|\chi\| \sin\omega$$
$$\overline{AB} = \overline{OA}\ \mathrm{tg}\,(\omega - \theta) \qquad \overline{OA} = \sigma\|\chi\| \cos\omega\,.$$

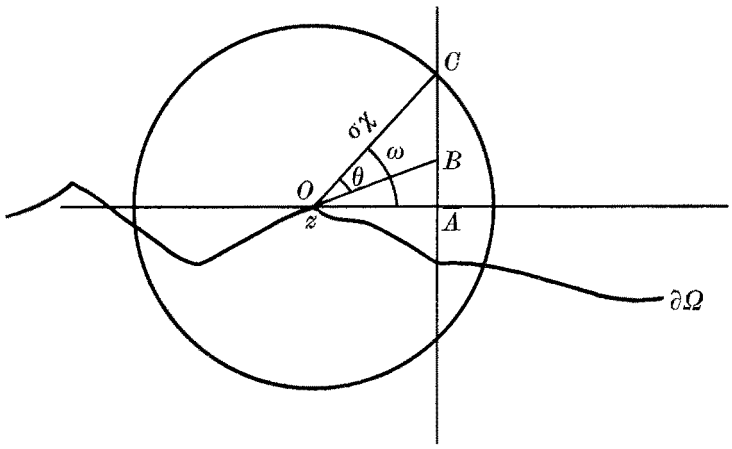


Fig. V.4.

Donc:

$$\overline{BC} = \sigma\|\chi\|\,[\sin\omega - \cos\omega\,\mathrm{tg}\,(\omega-\theta)] = \sigma\|\chi\|\,\frac{\sin\theta}{\cos(\omega-\theta)}\,.$$

Et comme $0 < \cos(\omega-\theta) < 1$

$$\overline{BC} \geqslant \sigma\|\chi\|\sin\theta\,.$$

On en déduit donc:

$$g(s+\sigma) - g(s) \geqslant \sigma\|\chi\|\sin\theta + \sigma\varepsilon(\sigma)\,.$$

Si on suppose maintenant $\sigma > 0$, on a:

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \frac{g(s+\sigma)-g(s)}{\sigma} \geqslant \|\chi\|\sin\theta\,.$$

Supposons maintenant χ vertical. On a alors:

$$g(s+\sigma) - g(s) = \sigma\|\chi\| + O(\sigma^2) \Rightarrow \frac{g(s+\sigma)-g(s)}{\sigma} \to \|\chi\| > \|\chi\|\sin\theta\,.$$

On en déduit que pour presque tout $s \in I_y$, on a:

$$\frac{d}{ds}g(s) \geqslant \|\chi\|\sin\theta\,.$$

Enfin, d'après la Remarque III.1, on sait que:

$$\|\chi\| \geqslant \sin\theta\,.$$

Donc:

$$\frac{d}{ds}g(s) \geqslant \sin^2\theta \Rightarrow g(s_1) - g(s_2) \geqslant \sin^2\theta(s_1 - s_2)\,. \quad \blacksquare$$

LEMME V.6. – $\exists k_3 > 0$ *indépendant de* y_0 *tel que*:

$$\forall y_1, y_2 \in W\,, \quad \forall s \in I_{y_1} \cap I_{y_2}:$$
$$|g(s, y_1) - g(s, y_2)| \leqslant k_3 \|y_1 - y_2\|\,.$$

DÉMONSTRATION.

$$g(s, y) = X^n(s, y) - f(\hat{X}(s, y))$$

est différence de 2 fonctions lipschitziennes. C'est donc une fonction lipschitzienne. La constante de lipschitz ne dépend que de la constante de lipschitz de X et de celle de f. Elle ne dépend donc pas de y_0. ■

Rappelons que pour $y \in \Sigma_\varepsilon$, x désigne l'élément de $\partial\Omega$ tel que $y \in \mathcal{T}_x$, et t l'instant tel que:

$$y = X(t, x)\,.$$

On a alors aussi:

$$x = X(-t, y)$$

et:

$$g(-t, y) = 0\,.$$

LEMME V.7. – $\exists W_1 \subset W$ *tel que*:

$$y \in W_1 \Rightarrow -t \in I_{y_0}\,.$$

DÉMONSTRATION. – On sait évidemment que $-t_0$ est un point de l'intérieur de I_{y_0}. De plus, d'après le Lemme V.1., l'application $y \mapsto t$ est continue. Par suite $t \to t_0$ lorsque $y \to y_0$ Et,. pour y assez proche de y_0, $-t$ se trouve dans I_{y_0}, D'où l'existence de W_1. ■

PROPOSITION V.2. – *Il existe* $k_4 > 0$ *indépendant de* y_0 *tel que*:

$$\forall y \in W_1 \quad |t - t_0| \leqslant k_4 \|y - y_0\|\,.$$

DÉMONSTRATION. – Comme nous l'avons remarqué précédemment, on a:

$$g(-t_0, y_0) = g(-t, y) = 0\,.$$

D'autre part, d'après le lemme précédent, on sait que g est définie au point $(-t, y_0)$. On a donc:

$$\begin{aligned} |g(-t, y_0)| &= |g(-t_0, y_0) - g(-t, y_0)| \geqslant \mu |t_0 - t| \qquad \text{(Prop. V.1)} \\ &= |g(-t, y) - g(-t, y_0)| \leqslant k_3 \|y - y_0\| \qquad \text{(Lemme V.6)} . \end{aligned}$$

Par suite:

$$|t_0 - t| \leqslant \frac{k_3}{\mu} \|y_0 - y\| .$$

La constante $k_4 = k_3/\mu$ ne dépend pas de y_0. ∎

LEMME V.8. – $\exists k_5 > 0$ *indépendant de* y_0 *tel que*:

$$\forall y \in W_1 : \|x - x_0\| \leqslant k_5 \|y - y_0\| .$$

DÉMONSTRATION. – Etant donné que y est dans W_1, X est définie au point $(-t, y_0)$ (Lemme V.7.). On a alors:

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \|X(-t, y) - X(-t_0, y_0)\| \\ &\leqslant \|X(-t, y) - X(-t, y_0)\| + \|X(-t, y_0) - X(-t_0, y_0)\| \\ &\leqslant k_1 \|y - y_0\| + k_1 |t - t_0| \qquad \text{(Lemme V.2.)} \\ &\leqslant k_1 \|y - y_0\| + k_1 k_4 \|y - y_0\| \qquad \text{(Prop. V.2.)} \end{aligned}$$

Il suffit de choisir:

$$k_5 = k_1 + k_1 k_4 , \qquad ∎$$

Supposons maintenant que $y_0 \in \overset{\circ}{\Sigma}_\varepsilon$.

LEMME V.9. – $\exists W_2 \subset W_1$ *voisinage de* y_0 *tel que*:

$$y \in W_2 \Rightarrow 1)\ t \in]-\alpha'_{x_0}, \alpha_{x_0}[$$
$$2)\ \mathcal{C}_x(t) \in]-\alpha'_{x_0}, \alpha_{x_0}[.$$

DÉMONSTRATION. – y_0 étant intérieur à Σ_ε, $t_0 \in]-\alpha'_{x_0}, \alpha_{x_0}[$ et $\mathcal{C}_{x_0}(t_0) \in]-\alpha'_{x_0}, \alpha_{x_0}[$. 1) est obtenu par continuité avec le Lemme V.1. Pour obtenir 2), il nous suffit de montrer la propriété de continuité suivante:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \eta \quad \text{t.q.} \quad \|y - y_0\| < \eta \Rightarrow |\mathcal{C}_x(t) - \mathcal{C}_{x_0}(t_0)| < \delta .$$

L'application $\mathcal{C}_x$ est de la forme:

$$\mathcal{C}_x(t) = a(x)\,t + b(x)\,.$$

On pourrait montrer de la même façon que dans le Lemme V.1. que α_x, σ_x et α'_x sont des fonctions continues de x. De plus, ces 3 nombres sont bornés et α'_x et α_x ne s'annulent pas. On en déduit que $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues et bornées de x. On a:

$$|\mathcal{C}_x(t) - \mathcal{C}_{x_0}(t_0)| \leqslant |b(x) - b(x_0)| + |t||a(x) - a(x_0)| + |a(x_0)||t - t_0|\,.$$

En notant:

$$M_1 = \operatorname*{Max}_{x\in\partial\Omega} (\alpha_x, \alpha'_x)$$

$$M_2 = \operatorname*{Max}_{x\in\partial\Omega} |a(x)|$$

et en remarquant que $|t| < M_1$:

$$|\mathcal{C}_x(t) - \mathcal{C}_{x_0}(t_0)| \leqslant |b(x) - b(x_0)| + M_1|a(x) - a(x_0)| + M_2|t - t_0|\,.$$

Du fait que les applications:

$$y \mapsto x$$

$$y \mapsto t$$

$$x \mapsto a(x)$$

$$x \mapsto b(x)$$

sont continues, on obtient le résultat annoncé. ∎

LEMME V.10. – $\exists k_6 > 0$ *indépendant de* y_0 *et* $W_3 \subset W_2$ *voisinage de* y_0 *tel que*

$$y \in W_3 \Rightarrow |\alpha_x - \alpha_{x_0}| \leqslant k_6\|x - x_0\|$$
$$|\alpha'_x - \alpha'_{x_0}| \leqslant k_6\|x - x_0\|$$
$$|\sigma_x - \sigma_{x_0}| \leqslant k_6\|x - x_0\|\,.$$

DÉMONSTRATION. – Ceci se démontre de la même façon qu'on a montré que $|t - t_0| \leqslant$ $\leqslant k\|y - y_0\|$ (Prop. V.2.). En effet, de la Proposition I.1. du Chapitre I, on déduit que Ω_ε est aussi un ouvert lipschitzien. On peut alors raisonner comme dans la Proposition V.1. en faisant jouer à Ω_ε le rôle que jouait Ω, et à x_0 le rôle que jouait y_0. On trouvera alors un voisinage $\mathcal{W}$ de x_0 et un nombre $k_6 > 0$ tels que:

$$x \in \partial\Omega \cap \mathcal{W} \Rightarrow |\alpha_x - \alpha_{x_0}| \leqslant k_6\|x - x_0\|\,.$$

On obtiendra le voisinage W_3 par la continuité de l'application $y \to x$. On raisonnerait de même pour les 2 autres inégalités.

LEMME V.11. – $\exists k_7 > 0$ *ne dépendant pas de* y_0 *tel que*:

$$y \in W_3 \Rightarrow |\mathcal{C}_x(t) - \mathcal{C}_{x_0}(t)| \leqslant k_7 \|x - x_0\|$$

DÉMONSTRATION. – On remarque d'abord, que du fait que $y \in W_2$, $\mathcal{C}_{x_0}$ est défini au point t (Lemme V.9.). D'autre part, rappelons qu'on a vu dans le Lemme V.3. qu'il existe m et M ne dépendant pas de x tels que:

$$m \leqslant \alpha_x \leqslant M$$
$$m \leqslant \alpha'_x \leqslant M$$

Notons:

$$\alpha = \alpha_x \quad \alpha' = \alpha'_x \quad \sigma = \sigma_x$$
$$\alpha_0 = \alpha_{x_0} \quad \alpha'_0 = \alpha'_{x_0} \quad \sigma_0 = \sigma_{x_0}.$$

On a (pour $t > 0$. On raisonnerait de même pour $t < 0$):

$$|\mathcal{C}_x(t) - \mathcal{C}_{x_0}(t)| \leqslant |t| \left| \frac{\alpha - \sigma}{\alpha} - \frac{\alpha_0 - \sigma_0}{\alpha_0} \right| + |\sigma - \sigma_0| \leqslant \frac{|t|}{\alpha\alpha_0} |\alpha\sigma_0 - \alpha_0\sigma| + |\sigma - \sigma_0|$$
$$\leqslant \frac{|t|}{\alpha\alpha_0} [|\alpha - \alpha_0| \sigma_0 + \alpha_0 |\sigma - \sigma_0|] + |\sigma - \sigma_0|$$
$$\leqslant \frac{M}{m^2} [M k_6 \|x - x_0\| + M k_6 \|x - x_0\|] + k \|x - x_0\| = k_7 \|x - x_0\| \quad \blacksquare$$

Nous montrons maintenant que F est localement lipschitzienne sur $\overset{\circ}{\Sigma}_\varepsilon$.

THÉORÈME V.1. – $\exists K > 0$ *tel que* $\forall y_0 \in \overset{\circ}{\Sigma}_\varepsilon$ $\exists W$ *voisinage de* y_0 *t.q.*

$$\forall y \in W: \ \|F(y_0) - F(y)\| \leqslant K \|y - y_0\|.$$

DÉMONSTRATION. – Soit $y_0 \in \overset{\circ}{\Sigma}_\varepsilon \cdot y_0$ est de la forme:

$$y_0 = X(t_0, x_0) \quad \text{avec} \quad t_0 \in]-\alpha'_{x_0}, \alpha_{x_0}[.$$

Choisissons comme voisinage W le voisinage W_3 trouvé dans le Lemme V.10. On sait que:

$$y \in W_3 \Rightarrow \mathcal{C}_x(t) \in]-\alpha'_{x_0}, \alpha_{x_0}[\quad \text{(Lemme V.9.)}.$$

$X(\mathcal{C}_x(t), x_0)$ a donc un sens. On a:

$$\|F(y) - F(y_0)\| = \|X(\mathcal{C}_x(t), x) - X(\mathcal{C}_{x_0}(t_0), x_0)\|$$

LEMME V.9. $\Rightarrow \leqslant \|X(\mathcal{C}_x(t), x) - X(\mathcal{C}_x(t), x_0)\| + \|X(\mathcal{C}_x(t), x_0) - X(\mathcal{C}_{x_0}(t_0), x_0)\|$

LEMME V.2. $\Rightarrow \leqslant k_1\|x - x_0\| + k_1|\mathcal{C}_x(t) - \mathcal{C}_{x_0}(t_0)|$

LEMME V.8. $\Rightarrow \leqslant k_1 k_5\|y - y_0\| + k_1[|\mathcal{C}_x(t) - \mathcal{C}_{x_0}(t)| + |\mathcal{C}_{x_0}(t) - \mathcal{C}_{x_0}(t_0)|]$

LEMME V.11. / V.3. $\Rightarrow \leqslant k_1 k_5\|y - y_0\| + k_1 k_7\|x - x_0\| + k_1 k_2|t - t_0|$

LEMME V.8. / PROP. V.1. $\Rightarrow \leqslant k_1 k_5\|y - y_0\| + k_1 k_7 k_5\|y - y_0\| + k_1 k_2 k_4\|y - y_0\|$

$\Rightarrow \|F(y) - F(y_0)\| \leqslant \|y - y_0\|$

K est indépendant de y_0. ■

THÉORÈME V.2. – *F est lipschitzienne sur $\boldsymbol{R}^n$:*

$$\exists K' > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall y, y' \in \boldsymbol{R}^n \quad \|F(y) - F(y')\| \leqslant K'\|y - y'\|$$

DÉMONSTRATION.

a) Soient y et y' 2 éléments de $\complement\overline{\Sigma_\varepsilon}$:

$$\|F(y) - F(y')\| = \|y - y'\|$$

la constante de lipschitz est ici 1.

b) Soient y et y' 2 éléments de $\overset{\circ}{\Sigma}_\varepsilon$ tels que le segment $[y_1, y_2]$ soit dans $\overset{\circ}{\Sigma}_\varepsilon$. A chaque y'' de ce segment est associé par le Théorème V.1. un voisinage W que nous supposerons être une boule centrée en y'', de rayon $r_{y''}$. Par compacité, on peut recouvrir le segment $[y, y']$ par un nombre fini p de boules $B(y_i, r_i/2)$ où $y_i \in [y, y']$, et où on a noté r_i pour r_{y_i}. On peut supposer que ces boules sont telles que les y_i soient ordonnés de y vers y' et vérifient:

$$y \in B\left(y_1, \frac{r_1}{2}\right) \qquad B\left(y_i, \frac{r_i}{2}\right) \cap B\left(y_{i+1}, \frac{r_{i+1}}{2}\right) \neq \emptyset \qquad y' \in B\left(y_p, \frac{r_p}{2}\right).$$

(S'il n'en était pas ainsi, certaines boules seraient incluses dans les autres, on pourrait les enlever du recouvrement). On a alors:

$$\|y - y_1\| < r_1 \qquad \|y_i - y_{i+1}\| < \frac{r_i}{2} + \frac{r_{i+1}}{2} \leqslant \operatorname{Max}(r_i, r_{i+1}) \qquad \|y' - y_p\| < r_p$$

d'où:

$$\begin{aligned}\|F(y)-F(y_1)\| &\leqslant K\|y-y_1\|\\ \|F(y')-F(y_p)\| &\leqslant K\|y'-y_p\|\\ \|F(y_i)-F(y_{i+1})\| &\leqslant K\|y_i-y_{i+1}\|\ .\end{aligned}$$

On en déduit que:

$$\|F(y)-F(y')\|\leqslant\|F(y)-F(y_1)\|+\|F(y_p)-F(y')\|+\sum_{i=1}^{p-1}\|F(y_i)-F(y_{i+1})\|$$
$$\Rightarrow\ \|F(y)-F(y')\|\leqslant K\|y-y'\|\ .$$

c) Soient $y\in\partial\Sigma_\varepsilon$ et y' tels que $]y,y'[\subset\overset{\circ}{\Sigma}_\varepsilon$: à partir des lemmes précédents, il est facile de montrer que F est une application continue sur $\boldsymbol{R}^n$. y est alors limite d'une suite d'éléments $y_n\in\overset{\circ}{\Sigma}_\varepsilon$ (car $\partial\Sigma_\varepsilon$ est une surface lipschitzienne) on a:

$$\|F(y)-F(y')\|=\lim_{n\to\infty}\|F(y_n)-F(y')\|$$

et d'après *b*):

$$\|F(y_n)-F(y')\|\leqslant K\|y_n-y'\|\ .$$

Par suite, en passant à la limite:

$$\|F(y)-F(y')\|\leqslant K\|y-y'\|\ .$$

d) Soit maintenant $y\in\overset{\circ}{\Sigma}_\varepsilon$ et y' quelconque. Notons z l'élément du segment $]y,y'[$ le plus proche de y appartenant à $\partial\Sigma_\varepsilon$, et z' celui qui est le plus proche de y'. On a:

$$\begin{aligned}\|F(y)-F(y')\|&\leqslant\|F(y)-F(z)\|+\|F(z)-F(z')\|+\|F(z')-F(y)'\|\\ &=\|F(y)-F(z)\|+\|z-z'\|+\|F(z')-F(y')\|\end{aligned}$$

et d'après *a*) et *c*):

$$\|F(y)-F(y')\|\leqslant\mathrm{Max}\,(K,1)\|y-y'\|\ .\qquad\blacksquare$$

Conclusion.

Nous avons maintenant démontré que:

$$\forall\theta,\ h,\ R,\quad\forall\Omega\in\pi(\theta,h,R)\ ,\quad\forall(\Omega_p)_{p\in N}\subset\pi(\theta,h,R)$$

telle que $\Omega_p \to \Omega$:

$$\exists P \quad \text{tel que} \quad p > P \Rightarrow \Omega_p = F_p(\Omega) .$$

L'espace $\pi(\theta, h, R)$ étant métrique, on a aussi:

PROPOSITION. – $\forall \Omega \in \pi(\theta, h, R)$, $\exists \varepsilon(\Omega, \theta, h, R)$ *tel que*:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega' \in \pi(\theta, h, R) \\ \delta(\Omega, \Omega') < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists F \textit{ homéomorphisme bilipschitzien} \\ \textit{de } \mathbf{R}^n \textit{ tel que } \Omega' = F(\Omega). \end{array}\right.$$

Montrons maintenant qu'on a même:

THÉORÈME. – $\forall \theta, h, R$ $\exists \varepsilon(\theta, h, R)$ *tel que*:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega, \Omega' \in \pi(\theta, h, R) \\ \delta(\Omega, \Omega') < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists F \textit{ homéomorphisme bilipschitzien} \\ \textit{de } \mathbf{R}^n \textit{ tel que } \Omega' = F(\Omega). \end{array}\right.$$

DÉMONSTRATION. – Considérons dans $\pi(\theta, h, R)$ la relation d'équivalence:

$$\Omega \sim \Omega' \Leftrightarrow \Omega' = F(\Omega) .$$

En raison de la proposition précédente, les classes d'équivalence sont ouvertes (car voisinages de chacun de leurs points).

$\pi(\theta, h, R)$ étant compact [3], on peut extraire de l'ensemble des classes d'équivalence $\mathcal{C}$ un recouvrement fini:

$$\pi(\theta, h, R) \subset \bigcup_{i=i}^{\nu} \mathcal{C}_i .$$

Les classes d'équivalence formant une partition de $\pi(\theta, h, R)$ sont donc en nombre fini.

Chaque classe étant alors le complémentaire de la réunion des autres est aussi fermée.

Les classes $\mathcal{C}_i$ sont des compacts disjoints en nombre fini, donc:

$$\forall i = 1, \ldots, \nu: \quad d\Big(\mathcal{C}_i, \bigcup_{j \neq 1} \mathcal{C}_j\Big) = \varepsilon_i > 0 .$$

Il suffit alors de choisir:

$$\varepsilon = \operatorname*{Min}_{i=1,\ldots,\nu} \varepsilon_i$$

pour obtenir le résultat cherché.

REFERENCES

[1] ARNOLD, *Équations différentielles ordinaires*, Editions de Moscou.
[2] BEN DALI-DJAADANE, Thèse de l'Université d'Alger, 1975.
[3] CHENAIS, *On the existence of a solution in a domain identification problem*, Journal of Math. Anal. and Applic. (Nov. 1975).
[4] HUREWICZ: *Lectures on ordinary differential equations*, M.I.T. Press.
[5] MURAT - SIMON, *Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique*, Cahier I.R.I.A. 76015.
[6] DERVIEUX - PALMERIO, *Une formule de Hadamard dans des problèmes d'identification de domaines* (I) *et* (II), C.R.A.S., T. 280, série A, p. 1697 et p. 1761.
[7] ROUSSELET, Thèse de l'Université de Nice, 1977.
[8] ZOLESIO, *Un résultat d'existence de vitesse convergente dans des problèmes d'identification de domaines*, C.R.A.S., T. 283, série A, p. 855; *Localisation du support d'un contrôle optimal*, C.R.A.S. à paraître.
[9] BOURBAKI, Livre V, *Espaces vectoriels topologiques*, Chapître II, exercice 8.