den Beiwert c_{nH} und damit $c_{nH}/\alpha_H = \alpha + \delta + \beta$, so erhält man die Folge der in der Zahlentafel 4 niedergelegten Werte des Steuerwinkels β , der in der Abb. 15 auch kurvenmäßig in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt ist.

Der gefundene Verlauf der Steuerung unterscheidet sich, wie man sieht, ziemlich wesentlich von dem des Anstellwinkels. Um den angenommenen allmählichen Anstieg des Anstellwinkels zu erreichen, ist also eine Höhensteuerung erforderlich, die zunächst kaum merklich wächst, weil der erste Anstieg der Bahn hauptsächlich vermöge der dem Flugzeug innewohnenden Wucht ermöglicht wird. Erst nach etwa 3 sek muß das Steuer stärker angezogen werden, bis der Ausschlag auf den Höchstwert $\beta \approx 6^\circ$ angestiegen ist, der sich über 2 sek nur wenig ändert, während beim Abstieg das Steuer wieder verhältnismäßig plötzlich zurückgestellt wird und zuletzt einen kleinen Ausschlag beibehält, damit das Flugzeug wieder mit entsprechend verkleinerter Geschwindigkeit die waagerechte Bewegungsrichtung annimmt.

Abb. 15. Beiwert des Schwerpunktmomentes und Höhensteuerwinkel in Abhängigkeit von der Zeit beim Loopingflug I der Abb. 9.

Die andere, umgekehrte Problemstellung bezieht sich auf die vollständige Durchrechnung einer Bewegung auf Grund eines bestimmt vorgegebenen Zeitdiagramms des Steuerausschlags. Es handelt sich in diesem Falle um die Integration dreier mit einander gekoppelten Differentialgleichungen, wobei die Auffindung der Funktion des Anstellwinkels von der Zeit als wesentlich schwieriger sich erweist als die Bestimmung von $\beta(t)$ aus dem gegebenen $\alpha(t)$, da die Momentengleichung alle Variablen gleichzeitig enthält und daher nur in Verbindung mit den anderen Gleichungen behandelt werden kann. Mit Benutzung einiger in der vorliegenden Arbeit entwickelten Grundsätze hoffe ich bei späterer Gelegenheit zu diesem erweiterten Integrationsproblem einen Beitrag liefern zu können.

(Eingegangen am 19. November 1938.)

Ergänzungen

zu dem Aufsatz in Band IX, Seite I des Ingenieur-Archivs
„Die Knickung der rechteckigen Platte durch Schubkräfte“.

Von S. Iguchi in Sapporo (Japan).

Die Schubknickungsfläche der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte wird durch

$$w = A_{11} \bar{w}$$

mit

$$\begin{aligned} w &= \sum_m \sum_n a_{mn} X_m Y_n \\ &= \sum_m \sum_n a_{mn} \left[\frac{x^3}{a^3} - \frac{2x^2}{a^2} + \frac{x}{a} + (-1)^m \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{y^3}{b^3} - \frac{2y^2}{b^2} + \frac{y}{b} + (-1)^n \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) - \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y \right], \\ a_{mn} &= \frac{A_{mn}}{A_{11}}, \quad m, n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

ausgedrückt. Zur Untersuchung der Ausknickungsgestalt sowie der Knotenlinien der Platte genügt es, nur diese Funktion $\bar{w}$ zu betrachten, weil die wirkliche Auslenkung w des Punktes (x, y) proportional zu $\bar{w}$ ist. Die Werte von a_{mn} können durch Auflösen der aus der Gleichung

$$\alpha_{mn} a_{mn} + \sum_r \beta_{mnr} a_{rn} + \sum_s \gamma_{mns} a_{ms} + \sum_r \sum_s \delta_{mnrs} a_{rs} + T \sum_r \sum_s K_{mnrs} a_{rs} = 0$$

hervorgehenden linearen Gleichungen bestimmt werden, wenn das Seitenverhältnis b/a der Platte, dementsprechend auch der

Abb. 1. Schichtlinien der w -Fläche für die quadratische Platte.

Abb. 2. Schichtlinien der w -Fläche für die Platte mit $b/a = 1,5$.

Abb. 3. Schichtlinien der w -Fläche für die Platte mit $b/a = 2,0$.

Wert von T gegeben ist. Für die erste Knickungsfamilie müssen natürlich die Summen $m + n$ gerade (2, 4, 6...) sein. So findet man insbesondere für die quadratische Platte mit dem niedrigsten Wert von $T = 14,58$ (Tabelle 4) folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1,00000, \\ a_{13} &= a_{31} = 0,15101, \\ a_{33} &= 0,04801, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{15} &= a_{51} = 0,02271, \\ a_{22} &= -0,16805, \\ a_{24} &= a_{42} = 0,00849. \end{aligned}$$

Damit geht der Ausdruck für $\bar{w}$ über in

$$\bar{w} = X_1 Y_1 + 0,15101 (X_1 Y_3 + X_3 Y_1) + 0,04801 X_3 Y_3 \\ + 0,02271 (X_1 Y_5 + X_5 Y_1) - 0,16805 X_2 Y_2 + 0,00849 (X_2 Y_4 + X_4 Y_2),$$

wenn alle Glieder mit $m+n \geq 8$ vernachlässigt werden. Nachdem man die Werte von $\bar{w}$ für verschiedene Punkte der Platte ausgerechnet hat, kann man daraus die Schichtlinien der $\bar{w}$ -Fläche bilden. So stellt Abb. 1 die Schichtlinien mit dem Wert $\bar{w}$ des Mittelpunktes $(a/2, a/2)$ als Einheit dar. Analog zeigt Abb. 2 bzw. 3 dasselbe für die Platte mit $b/a = 1,5$ bzw. $b/a = 2,0$. Man sieht, daß es in jedem dieser Fälle zwei Knotenlinien gibt. Diese Tatsache ist eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit der Schubknickung der Rechteckplatte, weil keine Knotenlinie bei den

Abb. 4 a—c. Schematische Darstellung der einfachsten $\bar{w}_1$ -, $\bar{w}_2$ - und $\bar{w}$ -Flächen für die erste Knickungsfamilie.

den niedrigsten Eigenwerten entsprechenden Druckknickungs- sowie Eigenschwinnungsfällen entsteht. Es ist interessant, aber ganz natürlich, daß die Figuren mit wachsendem b/a allmählich in die Figur von Southwell¹ überzugehen scheinen, die für den Plattenstreifen, d. h. für den Grenzwert $b/a = \infty$ gezeichnet ist.

Da für die erste Knickungsfamilie die Summen $m+n$ immer gleich den geraden Zahlen 2, 4, 6... zu nehmen sind, so müssen die beiden Zeiger m und n gleichzeitig gerade oder ungerade sein. Die Auslenkung $\bar{w}$ kann also durch die Summe

$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$$

mit

$$\bar{w}_1 = \sum_m \sum_n a_{mn} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \right) \cdot \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b} + \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y \right) \\ (m, n = 1, 3, 5 \dots)$$

und

$$\bar{w}_2 = \sum_m \sum_n a_{mn} \left(\frac{2x^3}{a^3} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{x}{a} - \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \right) \cdot \left(\frac{2y^3}{b^3} - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{y}{b} - \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y \right) \\ (m, n = 2, 4, 6 \dots)$$

ausgedrückt werden. Der erste Bestandteil $\bar{w}_1$ bzw. der zweite $\bar{w}_2$ stellt eine symmetrische bzw. ungerade symmetrische Ausknickungsfläche in bezug auf die beiden Mittellinien des Rechtecks dar, wie Abb. 4a und 4b zeigen. Die Fläche $\bar{w}$, d. h. die Superposition der beiden Flächen $\bar{w}_1$ und $\bar{w}_2$ hat daher eine solche Eigenschaft, daß eine beliebig durch den Mittelpunkt des Rechtecks gezogene gerade Linie symmetrisch in bezug auf diesen Punkt ausknickt, wie man auch aus Abb. 1 bis 3 sehen kann.

¹ R. V. Southwell, Phil. Mag. 48 (1924) S. 542.

Diese Tatsache ist ganz natürlich, weil die Beziehung $m + n = 2, 4, 6 \dots$ die Bedingungsgleichung dafür ist, daß der Wert von w (oder von $\bar{w}$) des Punktes (x, y) jenem des Punktes $(a - x, b - y)$ gleich wird.

Analog erkennt man, daß die zur zweiten Knickungsfamilie gehörende Ausknickungsfläche ($m + n = 1, 3, 5 \dots$) aus der Überlagerung der zwei verschiedenen Flächen besteht, deren eine sich symmetrisch bzw. ungerade symmetrisch in bezug auf die Mittellinie $x = a/2$ bzw. $y = b/2$ gestaltet, während die andere symmetrisch bzw. ungerade symmetrisch in bezug auf die Mittellinie $y = b/2$ bzw. $x = a/2$ ist. Die elastische Linie einer beliebig durch den Mittelpunkt des Rechtecks gezogenen geraden Linie verläuft bei diesem Falle ungerade symmetrisch in bezug auf den gleichen Punkt.

Wegen der obenerwähnten Tatsachen muß ich folgende Bemerkungen zu meinem früheren Aufsatz machen¹:

1. Die Behauptung, daß die kleinste Schubkraft der Ausknickungsfläche mit einfacher Wellenform ohne Knotenlinie entspricht, ist nicht richtig. In Wirklichkeit entstehen zwei Knotenlinien schon in dem einfachsten Knickungsfalle, d. h. in der zur niedrigsten Schubknicklast entsprechenden Knickungsfläche.

2. Die Aussage, daß die elastischen Linien der beiden Diagonalen der zur ersten bzw. zweiten Knickungsfamilie gehörenden Knickungsfläche symmetrisch bzw. ungerade symmetrisch in bezug auf den Mittelpunkt des Rechtecks verlaufen, stellt nur zum Teil die Knickungseigenschaft der Platte dar. Derartige Eigenschaften der elastischen Linien gelten nicht nur für die beiden Diagonalen, sondern allgemeiner auch für alle beliebig durch den Mittelpunkt des Rechtecks gezogenen geraden Linien.

¹ Bei dieser Gelegenheit seien einige Druckfehler meines Aufsatzes in Bd. 8, S. 11 des Ing.-Arch. „Die Biegungsschwingungen der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte“ richtig gestellt: Die zweiten Glieder der beiden Formeln (11) und die der zweiten Formeln (17), (30) und (40) sowie die rechte Seite der zweiten Formel (18) müssen mit b^2/a^2 multipliziert werden.

(Eingegangen am 13. August 1938.)