Berichtigung und Ergänzung zu „Eine Kennzeichnung der endlichen affinen Räume“

Von

PETER DEMBOWSKI

Das Hauptergebnis der im Titel erwähnten Arbeit [2] muß richtig folgendermaßen lauten:

Satz 1. *Die folgenden Eigenschaften einer endlichen, den Axiomen (I)–(IV) genügenden Inzidenzstruktur $\mathcal{B}$ mit $n(\mathcal{B}) > 2$ sind gleichbedeutend:*

- (i) $\mathcal{B}$ ist dem System der Punkte und Hyperebenen eines endlichen affinen Raumes isomorph.
- (ii) Jede Gerade von $\mathcal{B}$ trägt genau $n(\mathcal{B})$ Punkte.
- (iii) In $\mathcal{B}$ trifft jede Gerade jeden nichtparallelen Block.

Zur Terminologie vgl. [2]. Die Voraussetzung „ $n(\mathcal{B}) > 2$ “ wurde dort weggelassen, sie ist aber für den Beweis wesentlich, wie wir unten sehen werden. Satz 1 liefert also nur eine Kennzeichnung der endlichen affinen Räume mit wenigstens drei Punkten auf jeder Geraden; die affinen Räume über $GF(2)$ bleiben ausgeschlossen. Diese Ausnahmefälle lassen sich aber auf folgende Weise ähnlich kennzeichnen:

Satz 2. *Es sei $\mathcal{B}$ eine (I)–(IV) genügende Inzidenzstruktur mit $n(\mathcal{B}) = 2$. Genau dann ist $\mathcal{B}$ dem System der Punkte und Hyperebenen eines affinen Raumes über $GF(2)$ isomorph, wenn jede Ebene von $\mathcal{B}$ vier verschiedene Punkte enthält.*

Beide Beweise werden wie in [2] geführt; die neuen Voraussetzungen sind notwendig, um den dortigen Beweisteil (4.4) in Ordnung zu bringen. Die im Beweis von (4.4) benutzte Gerade h braucht nicht zu existieren, wenn $n = 2$ ist; wir zeigen, daß sie unter den Voraussetzungen der eben formulierten Sätze 1 und 2 doch existiert: Es seien X und Y zwei verschiedene Punkte der Geraden g .

(a) Ist $n > 2$, so enthält die Gerade PX außer P und X noch einen dritten Punkt Z , und $h = YZ$ hat die gewünschten Eigenschaften.

(b) Ist $n = 2$ und enthält p vier verschiedene Punkte, so gibt es außer P, X, Y noch einen Punkt $Q \in p$. Dieser kann wegen $n = 2$ weder auf PX noch auf g liegen; also leistet z. B. $h = XQ$ das Gewünschte.

Um zu zeigen, daß die neuen Voraussetzungen tatsächlich unentbehrlich sind, geben wir nun noch eine Klasse von affinen Blockplänen $\mathcal{B}$ mit $n(\mathcal{B}) = 2$ an, für die die Aussage (i) von Satz 1 falsch ist. Da die Anzahl der Punkte auf einer Geraden

stets ≥ 2 und $\leq n$ sein muß, sind die Bedingungen (ii) und (iii) für diese Blockpläne erfüllt. Die folgende Konstruktion stammt im wesentlichen von BOSE [1].

Es sei $\mathcal{H}$ ein Blockplan, dessen Parameter v, b, k, r, λ den Gleichungen

$$(1) \quad v = b = 4\lambda + 3$$

oder, wegen $\lambda(v - 1) = r(k - 1)$ damit gleichwertig, den Gleichungen

$$(2) \quad k = r = 2\lambda + 1$$

genügen. (Diese Blockpläne hängen eng mit einem HADAMARDSchen Determinantenproblem zusammen, vgl. [4, p. 107]; sie existieren vermutlich für jedes λ . Für unsere Zwecke genügt es zu wissen, daß solche Blockpläne jedenfalls dann existieren, wenn v eine Primzahlpotenz $\equiv -1 \pmod{4}$ ist; vgl. PALEY [3].) Zu $\mathcal{H}$ adjungieren wir einen neuen Punkt, der mit allen Blöcken von $\mathcal{H}$ inzidiert; sodann definieren wir als neue Blöcke die Komplementärmengen der Blöcke dieser erweiterten Struktur (wir können die Blöcke als Punktmengen auffassen). Zu jedem alten Block $\mathfrak{B}$ gehört dann ein eindeutig bestimmter neuer Block $\mathfrak{B}'$, und man sieht, daß die zwei-elementigen Blockmengen $\{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'\}$ „Parallelenscharen“ im Sinne der Bedingung (III) aus [2] sind. Ferner zeigt eine einfache Abzählung, daß die Inzidenzstruktur $\mathcal{H}^*$ der alten und neuen Punkte und Blöcke auch den Bedingungen (I), (II) und (IV) von [2] genügt, also ein affiner Blockplan mit $n(\mathcal{H}^*) = 2$ ist. Die Parameter von $\mathcal{H}^*$ sind:

$$(3) \quad v^* = 4(\lambda + 1), \quad b^* = 2(4\lambda + 3), \quad r^* = 4\lambda + 3, \quad k^* = 2(\lambda + 1), \quad \lambda^* = 2\lambda + 1.$$

Die Blockpläne aus Punkten und Hyperebenen von affinen Räumen über $GF(2)$ sind von dem soeben erklärten Typus $\mathcal{H}^*$: Dazu braucht man nur zu verifizieren, daß man beim Weglassen eines Punktes und aller nicht mit ihm inzidenten Hyperebenen einen Blockplan erhält, der (1) und (2) genügt. Aber die Klasse der $\mathcal{H}^*$ ist allgemeiner: ist v eine Primzahlpotenz $\equiv -1 \pmod{4}$, die nicht eine Mersennesche Primzahl ist, so ist $v^* = v + 1$ keine Potenz von 2, und folglich liefert der zu v gehörige PALEYsche Blockplan $\mathcal{H}$ ein $\mathcal{H}^*$, das nicht affiner Raum über $GF(2)$ sein kann.

Literaturverzeichnis

- [1] R. C. BOSE, On a resolvable series of balanced incomplete block designs. *Sankhyā* 8, 249—256 (1947).
- [2] P. DEMBOWSKI, Eine Kennzeichnung der endlichen affinen Räume. *Arch. Math.* 15, 146—154 (1964).
- [3] R. E. A. C. PALEY, On orthogonal matrices. *J. Math. and Phys.* 12, 311—320 (1933).
- [4] H. J. RYSER, *Combinatorial Mathematics*. New York 1963.

Eingegangen am 17. 12. 1965

Anschrift des Autors:

Peter Dembowski
5727 South Dorchester Avenue
Chicago, Ill. 60637, USA