Berichtigung der Arbeit

Über eine spezielle Klasse reeller periodischer Funktionen.

Band 26 der Monatshefte für Mathematik und Physik.

Von Celestyn Burstin in Wien.

Herr A. Rosenthal hat die Güte gehabt, mir mitzuteilen, daß ich einen Satz von Frechet¹⁾ in meiner Arbeit „Über eine spezielle Klasse reeller periodischer Funktionen“ in Band 26 der Monatshefte für Mathematik und Physik in unzulässiger Formulierung angewandt habe. Dadurch ist eine Reihe von unrichtigen Sätzen entstanden, nämlich: p. 223, 1. Satz; p. 232, 2. Satz; p. 233, 3. und 4. Satz.

Der für die ganze Arbeit grundlegende Satz 3 in § 2 ist richtig, nur muß man seinen Beweis etwas anders führen. Um das zu machen, beweisen wir zuerst zwei Hilfsätze:

1. Hilfsatz:²⁾ Ist die Dichte einer meßbaren Menge M , welche auf der Strecke $\overline{0-1}$ definiert ist, in jedem Intervall δ , größer als eine Zahl k , wo $k > 0$ ist, so ist $I(\overline{M}) = 1$.

¹⁾ Der Satz von Frechet lautet richtig: „Ist $f(x)$ eine Funktion der Baireschen Klasse (welche im Intervall $\overline{0-1}$ definiert ist), so gibt es immer eine Folge von Polynomen $P_1(x), P_2(x) \dots P_n(x) \dots$, welche im Intervall $\overline{0-1}$ gegen die Funktion $f(x)$ konvergieren, mit Ausnahme einer Nullmenge, und nicht, wie ich ihn unrichtigerweise formuliert habe: „Ist $f(x)$ eine Funktion der Baireschen Klasse, welche im Intervall $\overline{0-1}$ definiert ist, so gibt es immer eine im Intervall $\overline{0-1}$ definierte Funktion $\varphi(x)$ von der ersten Klasse, welche der Funktion $f(x)$ wesentlich gleich ist.“ Diese Formulierung ist nicht richtig, wie Herr A. Rosenthal bemerkt hat (da die Polynome $P_1(x), P_2(x) \dots P_n(x) \dots$ auf der Ausnahme-Nullmenge überhaupt nicht zu konvergieren brauchen und deshalb keine Grenzfunktion $\varphi(x)$ von der ersten Klasse liefern müssen), was auch aus der Existenz in sich heterogener Mengen ohne weiteres folgt. Aus den Überlegungen meiner Arbeit folgt also, daß der 1. Satz, p. 223, für die Funktion $\varphi(x)$ der zweiten Klasse richtig ist.

²⁾ Diesen Satz haben E. Jacobstahl und K. Knopp aufgestellt und bewiesen. (Sitzber. Berl. Math. Gesell. 14 (1915), p. 126/7.)

Beweis: In der Tat, ist dann die Dichte der Komplementärmenge $N = C(M)$ in jedem Intervall δ kleiner als $1 - k$. Wäre $I(M) = 1 - \sigma$, wo $\sigma > 0$ ist, so wäre $I(N) = \sigma$. Es müßte dann also ein Intervall existieren, wo die Dichte der Menge N größer als $1 - k$ sein müßte.¹⁾ Es muß also die Menge N eine Nullmenge sein, also $I(M) = 1$ sein.

2. Hilfsatz: Sind für die Mengen M und N , wo $M = C(N)$ ist, in jedem noch so kleinen Intervall δ die bezüglichen Dichten größer als eine positive Zahl $k > 0$, so ist dann $I_a(M) = I_a(N) = 1$, also M und N nicht meßbar.

Beweis: Der Beweis dieses Hilfssatzes folgt unmittelbar aus dem 1. Hilfssatze und aus den Sätzen, die ich in meiner Arbeit „Eigenschaften meßbarer und nichtmeßbarer Mengen“, Sitzungsber. der kais. Akad. d. Wissensch. in Wien 123, II a (1914), p. 1533, Zeile 1—19, gegeben habe. Dieselben Überlegungen gelten ohne weiteres auch für die in mehrdimensionalen Gebieten definierte Mengen.²⁾

Aus den beiden Hilfssätzen folgt unmittelbar die Richtigkeit des 3. Satzes, p. 234, da die Mengen $E(a \leq f(x) < b)$ gleichartig sind, d. i. die Eigenschaft haben, daß wenn in einem Intervall δ die Dichte der Menge $E(a \leq f(x) < b) = \lambda$ ist, daß dann die Menge $E(a \leq f(x) < b)$ in jedem Intervall dieselbe Dichte λ hat, wie man ohne weiteres einsehen kann. Man braucht also überall im Beweise des 3. Satzes, p. 234, „statt $I\{E(a \leq f(x) < b)\} > 0$ “ lesen „die Menge $E(a \leq f(x) < b)$ ist überall von der Dichte λ größer als Null“ und dadurch gewinnt der Satz seine Beweiskraft wieder. Aus der Richtigkeit des Satzes 3, p. 234, folgt die Richtigkeit aller Resultate in den §§ 4, 5. Da die im § 6 definierten Funktionen $f(x)$ auch die Eigenschaft besitzen, daß ihre Mengen $E(a \leq f(x) < b)$ gleich-

¹⁾ In der Tat können wir die Menge N in eine abzählbare Menge von Intervallen $\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}, \dots, \delta_n^{(1)}, \dots$ einschließen, welche von der Eigenschaft sind, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(1)} \leq \sigma + \varepsilon$ ist, wo $\varepsilon < \frac{k\sigma}{1-k}$. Man sieht dann unmittelbar, daß für mindestens ein Intervall $\delta_n^{(1)}$ die Dichte von N in $\delta_n^{(1)}$ größer als $1 - k$ sein muß, denn wäre für jedes Intervall $I\{D(N, \delta_i^{(1)})\} < (1 - k)\delta_i^{(1)}$, so wäre

$$\sum_{l=1}^{\infty} I\{D(N, \delta_l^{(1)})\} < (1 - k) \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l^{(1)}, \text{ also } I(N) < (1 - k)(\sigma + \varepsilon),$$

also schließlich $\sigma < (\sigma + \varepsilon)(1 - k)$, also $\varepsilon > \frac{k\sigma}{1-k}$, was gegen die Voraussetzung ist.

²⁾ Aus denselben Überlegungen folgt weiter die Richtigkeit der Sätze: p. 232, 2. Satz; p. 233, 3. und 4. Satz; wenn man überall sowohl in den Sätzen als auch in den Beweisen derselben statt „die Menge M vom Inhalt größer als Null“ liest „die Menge M von der Dichte mindestens gleich $\lambda > 0$ “.

artig sind, so folgt daraus unmittelbar die Richtigkeit des 1. Satzes, p. 258, und dadurch die Richtigkeit aller Resultate im § 6. — Man braucht nur überall statt „die Menge $E(a \leq f(x) < b)$ vom Inhalt größer als Null“, „die Menge $E(a \leq f(x) < b)$ von der Dichte mindestens gleich $\lambda > 0$ “ lesen.¹⁾

¹⁾ Bei dieser Gelegenheit möchte ich auch meine Arbeit „Eigenschaften meßbarer und nichtmeßbarer Mengen“, Sitzungsber. der kais. Akad. der Wiss. in Wien 123, II a (1914), 1525—1551, berichtigen. Da der Satz von Frechet auch hier in derselben unzulässigen Form angewandt wurde, so sind: 2. Satz, p. 1527; 3. Satz, p. 1528, Zeile 21—27, und 2. Satz, p. 1533, und der 1. Hilfssatz, p. 1543, falsch. Aus den Überlegungen des 2. Satzes, p. 1527, folgt unmittelbar, daß dieser Satz, für Funktionen $\varphi(x)$ der zweiten Klasse richtig ist. Der Hilfssatz 1, p. 1543, bleibt richtig, wenn man überall statt „ $I_a(M)$ und $I_a(N) = I_a\{C(M)\} > 0$ “ liest: „die Dichte von $I_a(M)$ und $I_a\{C(N)\}$ größer als λ , wo $\lambda > 0$ ist“; es ist dann dieser Hilfssatz nichts anderes als der 2. Hilfssatz dieser Berichtigung. Da die beim Beweis der Existenz der nichtmeßbaren Funktionen angewendete Funktion $f(x)$, p. 1548, die Eigenschaft hat, daß wenn die Dichte der Menge $E(a \leq f(x) < b) = E(a, b)$ in einem Intervall gleich λ ist, so ist sie dann in jedem Intervall von der Dichte λ , so folgt daraus unmittelbar, daß die Funktion $f(x)$ im Sinne L nichtmeßbar ist und der Beweis, p. 1548—50, bleibt richtig, wenn man überall statt $I_a\{E(a, b)\} > 0$ liest „ $E(a, b)$ von der Dichte größer als λ , wo $\lambda > 0$ ist“. Dasselbe gilt auch für die Sätze: 2. Satz, p. 1527; 3. Satz, p. 1528, Zeile 21—27, und 2. Satz, p. 1533; man muß nur überall statt „die Menge M vom Inhalt größer als Null“ lesen „die Menge M von der Dichte mindestens gleich $\lambda > 0$ “.