Arithmetische Bemerkung.

Von Leopold Gegenbauer in Wien.

In der im 120. Bande der Comptes Rendus der Pariser Akademie der Wissenschaften enthaltenen Mittheilung: „Sur quelques théorèmes d'Arithmologie“ hat Herr Bugajef fünf arithmetische Sätze ohne Beweis angegeben, von denen vier in einer allgemeinen Relation enthalten sind, welche in den folgenden Zeilen in höchst einfacher Weise abgeleitet werden soll.

Die über alle, einem bestimmten Bereiche angehörigen positiven ganzen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($x_\lambda < x_k$; $\lambda < k$) von vorgeschriebener arithmetischer Eigenschaft erstreckte Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi(x_\lambda) [\chi(x_\lambda)],$$

in welcher $\chi(x)$ eine Function vorstellt, die bei wachsendem Argumente wenigstens für alle in Betracht kommenden Werte desselben niemals zu- oder niemals abnimmt und für dieselben positiv ist, kann unter Benützung der zahlentheoretischen Function $\varepsilon(z)$, welche Wert den 0 oder 1 hat, je nachdem $|z|$ kleiner als 1 ist oder nicht, durch die Doppelsumme

$$\sum_{\lambda=1, y=1}^{\lambda=n, y=x_n} \varphi(x_\lambda) \varepsilon\left(\frac{\chi(x_\lambda)}{y}\right)$$

ausgedrückt werden.

Ist nun $\rho(z)$ die Umkehrung der Function $\chi(x)$, so ist im ersten Falle die Function $\varepsilon\left(\frac{\chi(x_\lambda)}{y}\right)$ nur dann von Null verschieden, wenn y der Bedingung $x_\lambda \leq \rho(y)$ genügt, während sie im zweiten Falle nur dann den Wert 1 hat, falls die Relation $\rho(y) \geq x_\lambda$ besteht. Vereinigt man alle Glieder dieser Doppelsumme, in denen y einen bestimmten seiner Werte hat, so erhält man, den beiden Annahmen über $\chi(x)$ entsprechend, folgende Gleichungen

$$(I) \quad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi(x_\lambda) [\chi(x_\lambda)] = \sum_{y=1}^{y=[\chi(x_n)]} \Phi(\rho(y))$$

$$(II) \quad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi(x_\lambda) [\chi(x_\lambda)] = \sum_{y=1}^{y=[\chi(x_n)]} \Phi_1(\rho(y)),$$

in denen $\Phi(z)$ die Summe derjenigen Werte der Function $\varphi(x)$ bezeichnet, welche zu nicht unterhalb z liegenden Argumenten x_λ gehören, $\Phi_1(z)$ aber die Summe jener Functionswerte, welche z nicht überschreitenden Argumenten x_λ entsprechen.

Die erste Formel ist die anfänglich erwähnte Quelle der vier Bugajef'schen Theoreme, welche aus ihr entstehen, wenn man der Reihe nach

$$\varphi(x) = x, \quad \chi(x) = \left\lfloor \frac{n}{x-1} \right\rfloor$$

$$\varphi(x) = x, \quad \chi(x) = \left\lfloor \sqrt{\frac{n}{x-1}} \right\rfloor$$

$$\varphi(x) = x, \quad \chi(x) = \left\lfloor \frac{n}{x^2} \right\rfloor$$

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad \chi(x) = \frac{n^2 + a}{x} \quad (\psi(x) = \text{Anzahl der Theiler von } x)$$

setzt, und unter den Zahlen x_λ alle oberhalb 1 liegenden, bez. alle Theiler der ganzen Zahl n versteht.