Erzeugung einer speziellen Kuspidualkubik.

Von Dr. Werner Gaedecke in Berlin-Wilmersdorf.

Satz. Ein variabler, durch einen festen Punkt O eines Kegelschnittes gehender Strahl schneide diesen im Punkte P . Die Kegelschnittstangente in P treffe das auf OP in O errichtete Lot in Q . Der Ort des Punktes Q ist eine Kubik mit der Spitze in O und der Normale des Kegelschnittes in diesem Punkte als Spitzentangente. Sie hat die Besonderheit, daß ihr Wendepunkt auf der im Punkte O des Kegelschnittes konstruierten Tangente liegt.

Beweis. Nimmt man die Normale des Kegelschnittes in O als X -Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems mit dem Ursprunge O , so lautet die Gleichung des Kegelschnittes

$$bx^2 + cxy + dy^2 = ex$$

oder unter Beachtung der Gleichung des Strahles $OP: y = tx$ in Parameterform:

$$x = \frac{e}{b + ct + dt^2}, \quad y = \frac{et}{b + ct + dt^2}.$$

Die Gleichung der Tangente in P

$$x(b - dt^2) + y(c + 2dt) = e$$

liefert in Verbindung mit der Gleichung des Strahles $OQ: y = -\frac{x}{t}$ als Gleichung des Ortes Q die Kubik

$$ey^2 = -dx^3 + (b - 2d)xy^2 + cy^3$$

mit den gekennzeichneten Eigenschaften. Für $b = 2d$ ist die Wendetangente der Spitzentangente parallel. Im Falle des Kreises: $b = d$, $c = 0$ erhält man die gerade Kissoide. Für $b = 2d$, $c = 0$ (Ellipse mit dem Achsenverhältnis $1 : \sqrt{2}$) ergibt sich die Neilsche Parabel.