Bemerkung über eine Relation des Hrn. Bugajef. Von Leopold Gegenbauer in Wien.

In der kürzlich in den Schriften der Pariser Akademie der Wissenschaften¹⁾ erschienenen Note „Sur les intégrales définies suivant les diviseurs“ hat Herr Bugajef folgende bemerkenswerte Relation angegeben

$$\sum_d \theta(\sqrt{d}) = \sum_p \xi_0\left(\frac{n}{p^2}, n\right),$$

in welcher die Summation nach d über alle Theiler der ganzen Zahl n , die bezüglich p über alle $\sqrt{n}$ nicht überschreitenden Primzahlen auszudehnen ist, $\theta(x)$ die Anzahl aller Primzahlen, welche nicht größer als x sind, bezeichnet und $\xi_x(m, n)$ die Summe der x ten Potenzen ($\xi_0(m, n)$ also die Anzahl) aller m nicht übertreffenden Theiler von n ist.

Die Bugajef'sche Formel ist ein specieller Fall der Gleichung

$$\sum_d g(d) h\left(\frac{n}{d}\right) \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=d} f(x) \right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} f(x) \left(\sum_{d_\lambda} g(d_\lambda) h\left(\frac{n}{d_\lambda}\right) \right),$$

in welcher nach d über alle, nach d_λ aber nur über diejenigen Theiler der ganzen Zahl n summiert wird, welche nicht unterhalb λ liegen. Dieselbe ergibt sich unmittelbar, wenn man in der auf der linken Seite der Gleichung stehenden Summe alle Glieder vereinigt, in denen ein bestimmtes $f(\mu)$ ($\mu = 1, 2, \dots, n$) auftritt,

Hat beispielsweise $f(x)$ den Wert x^μ oder 0, je nachdem x die μ te Potenz einer ganzen Zahl von vorgeschriebener Eigenschaft (Primzahl, durch keine λ te Potenz theilbare Zahl, Glied einer bestimmten arithmetischen Reihe u. s. f.) ist oder nicht, so wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=d} f(x)$$

gleich der Summe $\theta_x(\sqrt{d})$ der x ten Potenzen aller $\sqrt{d}$ nicht überschreitenden ganzen Zahlen, denen die oben erwähnte Eigenschaft zukommt, und daher hat man die spezielle Beziehung

$$\sum_d g(d) h\left(\frac{n}{d}\right) \theta_x(\sqrt{d}) = \sum_a x^\mu \left(\sum_{d_{a^\mu}} g(d_{a^\mu}) h\left(\frac{n}{d_{a^\mu}}\right) \right),$$

in welcher die Summation nach a über alle $\sqrt{n}$ nicht übersteigenden ganzen Zahlen zu erstrecken ist, die mit der genannten Eigenschaft begabt sind.

Setzt man speciell

$$g(x) = x^q, \quad h(x) = 1,$$

so ergibt sich hieraus die Formel

$$\sum_d d^q \theta_x(\sqrt{d}) = \sum_a a^q \bar{\xi}_q(x^\mu, n),$$

in welcher $\bar{\xi}_q(m, n)$ die Summe der q ten Potenzen derjenigen Theiler von n bezeichnet, die nicht kleiner als m sind, wird aber

$$g(x) = 1, \quad h(x) = x^q$$

gesetzt, so entsteht die Beziehung

$$\sum_d d^q \theta_x\left(\sqrt{\frac{n}{d}}\right) = \sum_a a^q \bar{\xi}_q\left(\frac{n}{a^\mu}, n\right).$$

Für $\rho = 0$ liefern beide Formeln natürlich dasselbe Resultat, da jedem Theiler von n , welcher nicht kleiner als z ist, ein complementärer zugehört, der nicht größer als $\frac{n}{z}$ ist.

¹⁾ Comptes Rendus, t. 119 n° 37 (31. décembre 1894).