Korrektur und Nachtrag zu Konvexität der Eigenkurven beim Bénardschen Problem

ZAMP 20, Fasc. 5 (1969), Seiten 636–641

Von Waldemar Velte, Institut für angewandte Mathematik, Universität Würzburg, Deutschland

Die auf Seite 638, letzte Formelzeile, und auf Seite 639, erste Formelzeile, angegebenen Ungleichungen für die zweite Ableitung von λ_1^+ sind nicht richtig. Es müsste zusätzlich der (nicht verschwindende) Term $\partial/\partial\alpha(\delta J/\delta\alpha)$ abgeschätzt werden. Der Satz auf Seite 639, oben, ist zu ersetzen durch folgenden Satz:

Satz. Für alle betrachteten Randbedingungen ist $\alpha \lambda_1^+(\alpha)$ für $\alpha > 0$ eine positive und streng monoton wachsende Funktion von α und auch von $a = \alpha^2$. Für $\alpha \rightarrow 0$ und für $\alpha \rightarrow \infty$ ist $\lambda_1^+(\alpha) \rightarrow \infty$.

Beweis. Mit der Substitution $w = \alpha v$, $A = \alpha \lambda$ geht (3) über in

$$L^2 u = A w, \quad L w = A u.$$

Das zugehörige Extremalproblem lautet

$$A_1^+(\alpha) = \min_{(u,w) \in \mathcal{L}} \bar{J}[u, w, \alpha], \quad \int_0^1 u w \, dx > 0$$

mit

$$\bar{J}[u, w, \alpha] = \frac{\int_0^1 (u''^2 + 2\alpha^2 u'^2 + \alpha^4 u^2 + w'^2 + \alpha^2 w^2) \, dx}{2 \int_0^1 u w \, dx}.$$

Für eine Schar von Eigenfunktionen zu $A_1^+(\alpha)$ folgt dann wegen $\delta \bar{J}/\delta \alpha = 0$ für alle $\alpha > 0$

$$\frac{d}{d\alpha} A_1^+ = \frac{\partial \bar{J}}{\partial \alpha} = \int_0^1 (4\alpha u'^2 + 4\alpha^3 u^2 + 2\alpha w^2) \, dx \left(2 \int_0^1 u w \, dx \right)^{-1} > 0,$$

und analog mit $a = \alpha^2$

$$\frac{d}{da} A_1^+ = \frac{\partial \bar{J}}{\partial a} = \int_0^1 (2u'^2 + 2a u^2 + w^2) \, dx \left(2 \int_0^1 u w \, dx \right)^{-1} > 0.$$

Daraus folgt die strenge Monotonie von $A_1^+ = \alpha \lambda_1^+$.

(Eingegangen: 6. Januar 1970)