Berichtigungen

zu dem Aufsatz von J. G. van der Corput: „Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem“ in Band 87, S. 39–65.

Es muß heißen:

Seite 40, Zeile 15 v. o.: (2) statt 2).

„ 40, „ 5 v. u.: Gött. Nachrichten 1914, S. 234–244 statt Acta Mathematica 37, S. 155–191 und 193–239.

„ 43, „ 1 v. o.: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird vorausgesetzt, daß $f'(u)$ im Intervall $a \leq u \leq b$ stets ≥ 0 oder stets ≤ 0 ist.

„ 47, Formel (20): ν statt N .

„ 48, Zeile 5 v. o.: $g_1 g_2 \cdot \dots \cdot g_q$ statt $g_1, g_2, \dots, g_q$.

„ 48, „ 5 v. u.: $\sqrt[q]{}$ statt $\sqrt{}$.

„ 51, „ 1 v. u.: $l_p \leq 1$ statt $l_p \leq \frac{1}{2}$.

„ 55, „ 1 v. u.: $(1 + k_p)$ statt $(1 + k_p)$.

„ 63, „ 6 v. o.: Satz 2 statt Satz 3.

„ 63, „ 11 v. o.: $a^{1 - \frac{1}{Q+1}}$ statt $a^{1 - \frac{1}{Q}}$.

sich zwanglos der zweiten Methode anschließt. Abgesehen von der prinzipiellen Bedeutung, die bei jedem Problem der Analysis solche Stetigkeitsfragen besitzen, bildet ihre positive Beantwortung hier die theoretische Grundlage für alle Verfahren zur numerischen Behandlung einer Integralgleichung, welche auf Ersetzung des Kernes durch einen einfacheren approximierenden beruhen.

Wir beschränken uns der Kürze halber auf das Problem der Lösung der Integralgleichung von der Form

$$(1) \quad f(s) = \varphi(s) - \int K(s, t) \varphi(t) dt$$

und für den Fall des symmetrischen Kernes $K(s, t) = K(t, s)$ auf die Diskussion des durch die Gleichung

$$(2) \quad \varphi(s) = \lambda \int K(s, t) \varphi(t) dt$$

gestellten Eigenwertproblems. Dabei wollen wir fürs erste den Kern als stetige Funktion von s und t annehmen und im übrigen das ein für allemal feste endliche Integrationsgebiet der Variablen und Definitionsgebiet der auftretenden, durchweg als stetig oder stückweise stetig vorausgesetzten Funktionen nicht besonders bezeichnen.

I. Vorbemerkungen.

Es sei gestattet, vorweg einige bekannte Tatsachen zusammenzustellen. Wir verstehen unter einem ausgearteten Kern $A(s, t)$ einen solchen, der sich als Summe von endlich vielen Produkten je einer Funktion von s mit einer von t darstellt: $A = \sum_{\nu=1}^p \alpha_{\nu}(s) \beta_{\nu}(t)$. Wir dürfen und wollen in dieser Darstellung die p Funktionen $\alpha_{\nu}(s)$ und ebenso die $\beta_{\nu}(s)$ als voneinander linear unabhängig annehmen. Indem man sich die $2p$ Funktionen $\alpha_{\nu}(s)$, $\beta_{\nu}(s)$ durch eine gewisse Anzahl m linear unabhängiger, zueinander orthogonal und normiert⁴⁾ wählbarer Funktionen $o_1(s)$, $o_2(s)$, ..., $o_m(s)$ linear ausgedrückt denkt, kann man dem ausgearteten Kern die Gestalt

$$(3) \quad A(s, t) = \sum_{\nu, \mu=1}^m a_{\nu\mu} o_{\nu}(s) o_{\mu}(t)$$

geben. Ist der Kern A symmetrisch, so folgt für die Koeffizienten $a_{\nu\mu}$ die Symmetriebedingung $a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}$.

Jeder stetige Kern $K(s, t)$ läßt sich gleichmäßig durch eine Folge ausgearteter Kerne approximieren, da jedes Polynom in s und t einen solchen ausgearteten Kern darstellt und nach dem Satze von Weierstraß

⁴⁾ Wir verstehen unter der Norm einer Funktion $f(s)$ den Ausdruck $N[f] = \int f(s)^2 ds$ und nennen die Funktion normiert, wenn ihre Norm den Wert 1 hat.

jede in einem abgeschlossenen Gebiete stetige Funktion $K(s, t)$ sich dort gleichmäßig durch Polynome approximieren läßt.

Für ausgeartete Kerne reduzieren sich die Probleme der Integralgleichungstheorie unmittelbar auf solche der Theorie der linearen Gleichungen und quadratischen Formen. Setzt man nämlich

$$(4) \quad \begin{cases} x_i = \int \varphi(t) \beta_i(t) dt \\ f_i = \int f(s) \beta_i(s) ds \\ C_{\nu\mu} = \int \alpha_\nu(s) \beta_\mu(s) ds, \end{cases}$$

so geht (1) über in

$$f(s) = \varphi(s) - \sum_{\nu=1}^p x_\nu \alpha_\nu(s),$$

woraus sich nach Multiplikation mit $\beta_\mu(s)$ und Integration ergibt

$$(5) \quad f_\mu = x_\mu - \sum_{\nu=1}^p C_{\nu\mu} x_\nu \quad (\mu = 1, 2, \dots, p).$$

Dieses System von p linearen Gleichungen für die p Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_p$ ist mit der Integralgleichung äquivalent; denn ist umgekehrt $x_1, x_2, \dots, x_p$ eine Lösung des Gleichungssystems, so stellt die Funktion $\varphi(s) = f(s) + \sum_{\nu=1}^p x_\nu \alpha_\nu(s)$ eine Lösung der Integralgleichung dar; linear unabhängigen Lösungen des Gleichungssystems müssen dabei immer eben solche Lösungen der Integralgleichung entsprechen. Diese Äquivalenz erlaubt uns ohne weiteres, aus den Hauptsätzen der Theorie der linearen Gleichungen das Bestehen der Fredholmschen Sätze für ausgeartete Kerne zu schließen:

1. Entweder besitzt die Integralgleichung (1) bei beliebig gegebenem $f(s)$ eine und nur eine Lösung; oder die homogene, d. h. für $f(s) = 0$ aus (1) entstehende Gleichung besitzt eine positive Anzahl r von nicht trivialen, normierten, linear unabhängigen Lösungen $\psi_1(s), \dots, \psi_r(s)$, „Nulllösungen“.

2. Im letzteren Falle besitzt auch die zum Kerne $A(t, s)$ gehörige „transponierte“ homogene Integralgleichung genau r linear voneinander unabhängige Lösungen $\chi_1(s), \dots, \chi_r(s)$, und die inhomogene Integralgleichung (1) hat dann und nur dann Lösungen, wenn $f(s)$ die r Orthogonalitätsbedingungen

$$\int f(s) \chi_i(s) ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

erfüllt.

Die Lösung der inhomogenen Integralgleichung (1) ist dann nur bis auf eine willkürliche additive Lösung der homogenen bestimmt; sie kann und soll durch die Forderung fixiert werden, daß sie zu den Funktionen $\psi_1(s), \dots, \psi_r(s)$ orthogonal sein möge.

Die Eigenwerttheorie für einen symmetrischen ausgearteten Kern $A(s, t)$ erledigt sich unmittelbar durch Zurückführung auf das Hauptachsenproblem einer gewöhnlichen quadratischen Form unter Zugrundelegung der Darstellung (3) für den Kern. Ist nämlich λ ein Eigenwert des ausgearteten Kernes $A(s, t)$, φ die zugehörige normierte Eigenfunktion, ist also

$$(6) \quad \varphi(s) = \lambda \int A(s, t) \varphi(t) dt = \lambda \sum_{\mu, \nu=1}^m a_{\mu\nu} x_{\mu} o_{\nu}(s),$$

wobei hier

$$(4a) \quad x_{\nu} = \int \varphi(s) o_{\nu}(s) ds$$

gesetzt ist, so folgt durch Multiplikation mit $o_{\nu}(s)$ und Integration für die Größen x_{μ} das Gleichungssystem

$$(7) \quad x_{\nu} = \lambda \sum_{\mu=1}^m a_{\mu\nu} x_{\mu},$$

in welchem die x_{ν} nicht sämtlich verschwinden können, weil sonst wegen (6) auch $\varphi(s)$ identisch verschwinden würde. Umgekehrt erhalten wir aus einer nicht trivialen Lösung von (7) eine Lösung der Integralgleichung (6). Die Eigenwerte der Integralgleichung sind also identisch mit den Eigenwerten der quadratischen Form

$$\sum_{\mu, \nu=1}^m a_{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu} = \iint A(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt$$

und lassen sich daher vermöge unmittelbarer Übertragung der bekannten charakteristischen Eigenschaften dieser Eigenwerte folgendermaßen definieren: Der kleinste positive Eigenwert λ_1 von $A(s, t)$ ist der reziproke Wert des Maximums der „quadratischen Integralform“

$$J[\varphi, \varphi] = \iint A(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt,$$

wobei diejenigen Funktionen $\varphi(s)$ zum Vergleich herangezogen werden, für welche die Nebenbedingung

$$(8) \quad N[\varphi] = \int [\varphi(s)]^2 ds \leq 1$$

besteht. Die Funktion $\varphi_1(s)$, für welche das Maximum angenommen wird, ist die zugehörige Eigenfunktion. Die weiteren, nach wachsender Größe geordneten positiven Eigenwerte und Eigenfunktionen erhält man ebenso, indem man zu der Nebenbedingung (8) noch weitere Nebenbedingungen $\int \varphi(s) \varphi_i(s) ds = 0$ ($i = 1, 2, \dots, h-1$) hinzufügt. Statt dessen kann man den h -ten positiven Eigenwert λ_h und die zugehörige Eigenfunktion φ_h auch independent durch eine Minimum-Maximum-Eigenschaft folgendermaßen charakterisieren: Es sei $k\{v_1, v_2, \dots, v_{h-1}\}$ die

obere Grenze von $J[\varphi, \varphi]$, wenn die Funktion außer der Bedingung (8) noch den Bedingungen

$$(9) \quad \int \varphi(s) v_i(s) ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h-1)$$

unterworfen ist, wobei die $v_1(s), \dots, v_{h-1}(s)$ irgendwelche $h-1$ stetige Funktionen bedeuten; dann besitzt diese Zahl $k\{v_1, \dots, v_{h-1}\}$ ein Minimum $\kappa_h = \frac{1}{\lambda_h}$, welches erreicht wird für $v_i = \varphi_i(s)$, $\varphi = \varphi_h(s)$; die Zahl $\lambda_h = (J[\varphi_h, \varphi_h])^{-1}$ ist der h -te positive Eigenwert.

Ebenso erhält man die negativen Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen, indem man von dem entsprechenden Minimumproblem oder Maximum-Minimumproblem ausgeht. Dabei setzen wir die Reihe der positiven bzw. negativen Eigenwerte definierenden Extremumsprobleme naturgemäß nur so lange fort, wie bei ihnen wirklich als Lösungen Werte für $J[\varphi, \varphi]$ von dem vorgeschriebenen Vorzeichen auftreten.

II. Erste Methode.

§ 1.

Hilfsbetrachtungen.

Es sei $h(t)$ irgendeine stückweise stetige Funktion, für welche lediglich eine Beziehung

$$(10) \quad N[h] = \int [h(t)]^2 dt \leq M$$

vorausgesetzt sei, wobei M eine feste Schranke bedeutet. Die vermöge solcher Funktionen $h(t)$ „quellenmäßig dargestellten“ Funktionen

$$(11) \quad g(s) = \int K(s, t) h(t) dt$$

sind bei gegebenem K nicht nur selbstverständlich stetig, sondern alle Funktionen der so definierten Funktionenmenge der $g(s)$ sind auch gleichmäßig beschränkt und gleichmäßig stetig, in dem Sinne, daß es zu jedem positiven ε eine nur von ε , nicht von dem Individuum $g(s)$ abhängige und mit ε gegen Null strebende Zahl $\delta(\varepsilon)$ gibt, so daß aus $|\eta| < \delta$ die Beziehung $|g(s + \eta) - g(s)| < \varepsilon$ folgt. In der Tat wird infolge der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |g(s + \eta) - g(s)|^2 &= \left(\int [K(s + \eta, t) - K(s, t)] h(t) dt \right)^2 \\ &\leq \int [K(s + \eta, t) - K(s, t)]^2 dt \cdot M, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung sich mit Rücksicht auf die Stetigkeit des Kernes als selbstverständlich ergibt. Die Eigenschaft der gleichmäßigen Stetigkeit für die Funktionenmenge bleibt ersichtlich bestehen, wenn man zur Menge auch noch alle die Funktionen hinzunimmt, welche durch Kerne

einer Folge $K_1(s, t)$, $K_2(s, t)$, ... mit den obigen Funktionen $h(t)$ quellenmäßig dargestellt werden, sobald die Kerne $K_n(s, t)$ mit wachsendem n gleichmäßig gegen $K(s, t)$ konvergieren.

Funktionenmengen mit der geschilderten Gleichmäßigkeit der Stetigkeit und Beschränktheit besitzen die Häufungsstelleneigenschaft, die sich in folgendem bekannten Konvergenzprinzip ausspricht:

Aus jeder gleichmäßig beschränkten und gleichmäßig stetigen Funktionenmenge läßt sich eine gleichmäßig konvergente Folge auswählen.

Wir bemerken noch folgende selbstverständliche Ergänzung des Prinzips: Wenn es in der Funktionenmenge unendlich viele Gruppen von je r zueinander orthogonalen normierten Funktionen gibt, so läßt sich eine Teilfolge von Gruppen auswählen, die gleichmäßig gegen eine Gruppe von r orthogonalen normierten Funktionen konvergiert.

§ 2.

Die Fredholmschen Sätze.

Indem wir die Fredholmschen Sätze für ausgeartete Kerne als bewiesen voraussetzen dürfen, können wir sie nunmehr leicht für einen beliebigen Kern $K(s, t)$ übertragen. Wir denken uns $K(s, t)$ gleichmäßig durch eine Folge $A_1(s, t)$, $A_2(s, t)$, $A_3(s, t)$, ... von ausgearteten Kernen approximiert, und betrachten mit der Integralgleichung (1) die approximierenden Integralgleichungen

$$(12) \quad f(s) = \varphi(s) - \int A_n(s, t) \varphi(t) dt.$$

Dann sind zwei Fälle möglich:

Fall I: Gleichung (12) besitzt für unendlich viele n (wir dürfen dann übrigens unter Weglassung nicht passender Approximationsgleichungen und Umnumerierung annehmen: für alle n) eine Lösung $e_n(s)$, so daß $N[e_n] = c_n^2 = \int [e_n(s)]^2 ds < M$ bleibt, unter M eine feste Schranke verstanden.

Fall II: Die obige Annahme ist nicht richtig. Dann ist entweder

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^2 = \infty$, oder

b) für unendlich viele n (wir dürfen wieder annehmen: für alle n) hat — auf Grund der für ausgeartete Kerne gültigen Fredholmschen Sätze — die homogene Integralgleichung

$$(13) \quad 0 = \varphi(s) - \int A_n(s, t) \varphi(t) dt$$

eine normierte Lösung $\sigma_n(s)$, was wir durch die Formel $c_n = \infty$ sinnge-
mäß symbolisieren können.

Im Falle I sind die Funktionen $\varrho_n(s) - f(s)$ quellenmäßig durch die Kerne A_n dargestellt; dabei sind die dargestellten Funktionen nach § 1 gleichmäßig beschränkt und stetig und definieren daher nach unserem Konvergenzprinzip als Limes einer gleichmäßig konvergenten Teilfolge eine stetige Grenzfunktion $\varphi(s)$. Indem wir erlaubterweise den Grenzübergang in der Integralgleichung (12) direkt vornehmen, erkennen wir für diese Grenzfunktion $\varphi(s)$ das Bestehen der Integralgleichung (1); diese Integralgleichung ist also im Falle I auflösbar.

Im Falle II dividieren wir entweder, falls c_n^2 endlich ist, die Integralgleichung (12) für $\varphi = \varrho_n$ durch c_n und setzen $\frac{\varrho_n}{c_n} = \sigma_n$, so daß die Gleichung

$$\frac{f(s)}{c_n} = \sigma_n(s) - \int A_n(s, t) \sigma_n(t) dt$$

gilt, oder wir beachten im Falle II b) das Bestehen der Gleichung (13) für $\varphi = \sigma_n$. Beide Male ist jedenfalls $\sigma_n(s)$ normiert; somit gilt wiederum für die quellenmäßig dargestellten Funktionen $\sigma_n(s) - \frac{f(s)}{c_n}$ bzw. $\sigma_n(s)$, daß sie gleichmäßig stetig und beschränkt sind, mithin als gleichmäßigen Limes einer Teilfolge eine Grenzfunktion $\psi(s)$ definieren, welche notwendigerweise der homogenen Integralgleichung

$$(14) \quad \psi(s) = \int K(s, t) \psi(t) dt$$

genügt und normiert ist. Im Falle II besitzt also die homogene Integralgleichung nicht-triviale Lösungen, die wir Nulllösungen nennen.

Um hieraus die Fredholmschen Sätze abzuleiten, schicken wir in bekannter Weise die Bemerkung voraus, daß die homogene Gleichung jedenfalls nur eine endliche Anzahl r von linear unabhängigen normierten Lösungen $\psi_1(s), \dots, \psi_r(s)$ besitzen kann; wir dürfen die r Funktionen $\psi_i(s)$ als zueinander orthogonal annehmen, und erhalten dann aus der Besselschen Ungleichung, angewandt auf dieses Orthogonalsystem:

$$\int K(s, t)^2 dt \geq \sum_{i=1}^r \left(\int K(s, t) \psi_i(t) dt \right)^2 = \sum_{i=1}^r \psi_i(s)^2,$$

und nach nochmaliger Integration

$$\iint K(s, t)^2 ds dt \geq r,$$

womit für r eine Schranke gegeben ist. Sei jetzt also r die genaue Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von (14). Dann ist entweder $r = 0$ oder $r > 0$. Im Falle $r = 0$ kann aber offenbar nie der obige Fall II eintreten, da er stets zu einer normierten Lösung von (14) führt; also befinden wir uns im Falle I, d. h. für jede linke Seite $f(s)$ besitzt die Integralgleichung (1) eine Lösung; diese Lösung ist eindeutig bestimmt,

weil die nicht identisch verschwindende Differenz zweier Lösungen eine nicht-triviale Lösung von (14) gegen die Voraussetzung ergeben würde. Damit ist der erste Fredholmsche Satz bewiesen.

Ist zweitens $r > 0$, dann gilt wegen $A_n \Rightarrow K^6)$ für die Funktionen $\delta_{n,i}(s) = \psi_i(s) - \int A_n(s, t) \psi_i(t) dt$ ($i = 1, 2, \dots, r$; $n = 1, 2, 3, \dots$) die Relation $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{n,i}(s) \Rightarrow 0$. Setzen wir nun

$$A'_n(s, t) = A_n(s, t) + \sum_{i=1}^r \delta_{n,i}(s) \psi_i(t),$$

so sind auch die $A'_n(s, t)$ ausgeartete Kerne, welche den Kern $K(s, t)$ gleichmäßig approximieren. Die Kerne $A'_n(s, t)$ besitzen, wie man sofort sieht, sämtlich die r Funktionen $\psi_i(s)$ zu Nulllösungen. Mehr linear unabhängige Nulllösungen können bei hinreichend großem n nicht auftreten; denn wäre $\psi_{r+1,n}(s)$ eine solche, die wir als normiert und auf $\psi_1, \dots, \psi_r$ orthogonal annehmen dürfen, so würden wir auf Grund unseres Konvergenzprinzipes eine auf $\psi_1, \dots, \psi_r$ orthogonale, also von diesen Funktionen linear unabhängige Nulllösung von (14) erhalten, entgegen der Voraussetzung, daß r die genaue Anzahl der Nulllösungen war.

Zufolge der Gültigkeit der Fredholmschen Sätze für ausgeartete Kerne besitzt nun die homogene transponierte Integralgleichung

$$(15) \quad \chi(s) = \int A'_n(t, s) \chi(t) dt$$

ebenfalls genau r voneinander unabhängige und als normiert und zueinander orthogonal wählbare Nulllösungen $\chi_{n,i}(s)$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Da die ausgearteten Kerne $A'_n(t, s)$ gleichmäßig gegen den Kern $K(t, s)$ konvergieren, so erhalten wir auch für diesen r zueinander orthogonale Nulllösungen $\chi_1(s), \dots, \chi_r(s)$, indem wir auf Grund unseres Konvergenzprinzipes den Grenzübergang mit Hilfe der gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen $\chi_{n,i}(s)$ vornehmen. Mehr als r Lösungen kann die transponierte Integralgleichung

$$(16) \quad \chi(s) = \int K(t, s) \chi(t) dt$$

nicht haben, da sonst rückwärts auch die Existenz von mehr als r Lösungen von (14) folgen würde.

Endlich beachten wir, daß für die Lösbarkeit der Integralgleichung (1) im Falle $r > 0$ sicherlich die Bedingungen

$$(17) \quad \int f(s) \chi_i(s) ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

notwendig sind, wie man unmittelbar erkennt, wenn man (1) mit $\chi_i(s)$

⁶⁾ Mit dem Zeichen $\Rightarrow$ wollen wir stets die Gleichmäßigkeit der Konvergenz ausdrücken.

multipliziert, integriert und dann rechts unter Beachtung von (16) die Integrationsfolge umkehrt. Um die Bedingungen (17) als hinreichend zu erkennen, beschränken wir uns zunächst — sofern dies nötig ist — auf solche Indizes n , für welche $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{n,i}(s) = \chi_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) gilt, und bilden mit den dann sicher bei wachsendem n gegen Null konvergierenden Zahlen $\varepsilon_{n,i} = \int f(s) \chi_{n,i}(s) ds$ die Funktionen

$$f_n(s) = f(s) - \sum_{i=1}^r \varepsilon_{n,i} \chi_{n,i}(s).$$

Es ist $\int f_n(s) \chi_{n,i}(s) ds = 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Also besitzt die Integralgleichung

$$(18) \quad f_n(s) = \varphi(s) - \int A'_n(s, t) \varphi(t) dt$$

wegen der Gültigkeit der Fredholmschen Sätze für ausgeartete Kerne sicher eine zu $\psi_1(s), \dots, \psi_r(s)$ orthogonale Lösung $\varrho_n(s)$. Mit diesen Lösungen $\varrho_n(s)$ müssen wir uns im Falle I befinden, weil sie andernfalls zu einer auf $\psi_1(s), \dots, \psi_r(s)$ orthogonalen Lösung von (14) führen würde, was nach Voraussetzung unmöglich ist. Also können wir wieder auf Grund des Konvergenzprinzipes den Grenzübergang in der Integralgleichung ausführen und somit wegen $f_n(s) \Rightarrow f(s)$ auf die Lösbarkeit von (1) schließen. Hiermit sind die sämtlichen Fredholmschen Sätze für unseren Kern $K(s, t)$ bewiesen.

§ 3.

Die Eigenwerttheorie bei symmetrischen Kernen.

Ist der Kern $K(s, t)$ symmetrisch, so läßt er sich durch symmetrische ausgeartete Kerne $A(s, t)$ gleichmäßig approximieren. Wir zeigen zunächst, daß jeder symmetrische Kern (sofern er nicht identisch verschwindet⁶⁾) Eigenwerte und Eigenfunktionen besitzen muß. Zu diesem Zwecke betrachten wir die „Integralformen“

$$J[\varphi, \varphi] = \iint K(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt,$$

$$J_n[\varphi, \varphi] = \iint A_n(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt$$

und stellen uns das Problem, $J[\varphi, \varphi]$ zum Maximum zu machen unter der Nebenbedingung (8).

Hierbei setzen wir voraus, daß J positiver Werte fähig ist. Andernfalls würden wir statt des Maximumproblems das entsprechende Minimumproblem betrachten.

⁶⁾ Das identische Verschwinden eines Kernes ist gleichbedeutend mit dem identischen Verschwinden der zugehörigen Integralform.

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist für jede solche Funktion

$$(J[\varphi, \varphi] - J_n[\varphi, \varphi])^2 \leq \iint (K - A_n)^2 ds dt;$$

wegen der Konvergenz der A_n gegen K unterscheidet sich also der Wertevorrat der Integralformen J_n bei hinreichend großem n von dem der Integralform J beliebig wenig, gleichviel, welche zulässige Funktion φ wir einsetzen. Mithin konvergieren die Maxima $\kappa_{1,n} = J_n[\varphi_{1,n}, \varphi_{1,n}]$ der Größen J_n gegen einen Wert κ_1 , nämlich die obere Grenze der Werte $J[\varphi, \varphi]$. Diese obere Grenze muß positiv sein.

Die $\varphi_{1,n}$ sind die zu den Eigenwerten $\lambda_{1,n} = \frac{1}{\kappa_{1,n}}$ für den Kern $A_n(s, t)$ gehörigen normierten Eigenfunktionen, so daß gilt

$$\varphi_{1,n}(s) = \lambda_{1,n} \int A_n(s, t) \varphi_{1,n}(t) dt.$$

Diese Relationen lehren uns wegen $\lambda_{1,n} \rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\kappa_1}$ sofort, daß die Funktionen $\varphi_{1,n}(s)$ gleichmäßig beschränkt und stetig sind. Unser Konvergenzprinzip liefert uns nun unmittelbar eine Funktion $\varphi_1(s)$, welche als gleichmäßiger Limes einer Teilfolge der $\varphi_{1,n}(s)$ der Relation

$$\varphi_1(s) = \lambda_1 \int K(s, t) \varphi_1(t) dt$$

genügt und somit, da sie normiert ist, eine zum Eigenwert λ_1 gehörige Eigenfunktion des Kernes $K(s, t)$ darstellt.

Genau in derselben Weise können wir die weiteren positiven Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_h, \dots$ (und natürlich analog die negativen) mit den Eigenfunktionen $\varphi_2(s), \dots, \varphi_h(s), \dots$ erhalten, indem wir z. B. von dem in der Vorbemerkung gekennzeichneten Minimum-Maximum-Problem für unsere Integralform ausgehen.

Es hätte keine Schwierigkeiten, die hier im ersten Teile benutzten allgemeinen Konvergenzaussagen zu präzisieren, indem man nachträglich die Überflüssigkeit einer komplizierten Auswahl zeigt. Die nunmehr darzustellende zweite Methode erlaubt uns, auf diese Ausführungen zu verzichten, indem sie von vornherein die fraglichen Konvergenztatsachen mit voller Präzision liefert.

III. Zweite Methode.

§ 4.

Unabhängigkeitsmaß und asymptotische Dimensionenzahl⁷⁾.

Um ein Maß für die lineare Unabhängigkeit von m Funktionen $f_1(s), f_2(s), \dots, f_m(s)$ zu erhalten, bilden wir die quadratische Form in $x_1, x_2, \dots, x_m$

$$Q(x, x) = N(x_1 f_1 + \dots + x_m f_m) = \int (x_1 f_1 + \dots + x_m f_m)^2 ds \\ = \sum_{i,k=1}^m x_i x_k \int f_i f_k ds.$$

Wir nennen dann das unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^m x_i^2 = 1$ angenommene, bei linearer Abhängigkeit der f_i und sonst nicht verschwindende Minimum u von $Q(x, x)$ das „Unabhängigkeitsmaß“ der Funktionen $f_1(s), \dots, f_m(s)$.

Wenn man eine lineare Kombination $\sum_{i=1}^m y_i f_i(s) = f(s)$ von m Funktionen $f_1, f_2, \dots, f_m$ bildet, welche normiert ist, so können alle Koeffizienten y_i absolut genommen nicht oberhalb der lediglich von dem Unabhängigkeitsmaß u der f_i abhängenden Schranke $\frac{1}{\sqrt{u}}$ liegen. Denn es ist zufolge der Definition von u für $x_i = \frac{y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^2}}$:

$$\int \left(\sum_{i=1}^m x_i f_i(s) \right)^2 ds = \frac{1}{\sum_{i=1}^m y_i^2} \geq u.$$

Wenn man daher ein System von m Funktionen mit einem oberhalb der positiven Schranke α^2 liegenden Unabhängigkeitsmaß orthogonalisiert, d. h. durch geeignete normierte lineare Kombinationen ersetzt, so können dabei niemals Absolutwerte der Koeffizienten oberhalb der Schranke $\frac{1}{|\alpha|}$ auftreten.

Ist $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s), \dots$ eine unendliche Funktionenfolge, so sagen wir, sie habe die *asymptotische Dimensionenzahl* r , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Bei noch so kleinem positivem ε ist nach Weglassung einer hinreichend großen Anfangszahl der Funktionen der Folge das Unabhängigkeitsmaß von je $r+1$ der übrigbleibenden kleiner als ε ; es gibt jedoch nach Weglassung von beliebig vielen der Funktionen noch immer r Funktionen, deren Unabhängigkeitsmaß oberhalb einer festen

⁷⁾ Vgl. Anm. 3.

positiven Schranke α^2 bleibt. Speziell werden wir sagen, daß $r = 0$ ist, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} N[\varphi_n] = 0$ wird. Wir wollen dabei der Einfachheit halber voraussetzen, daß alle Funktionen φ_n der Folge entweder normiert sind, oder daß doch das Integral $\int \varphi_n(s)^2 ds = N[\varphi_n]$ unterhalb einer festen, von n unabhängigen Schranke liegt.

Die innere Bedeutung der eingeführten Begriffsbildung beruht darin, daß eine Funktionenfolge der asymptotischen Dimensionszahl r als Grenzbilde eine lineare Funktionenschar mit r Komponenten definiert. Dies gilt allgemein und ist sehr leicht zu zeigen, wenn man unter Zugrundelegung des Lebesgueschen Integralbegriffes und der zugehörigen Theorie alle auftretenden Funktionen nur bis auf eine Menge vom Maße Null als definiert ansieht und alle Integrale im Sinne von Lebesgue versteht. Will man aber, wie wir es hier tun, auf unserem elementaren Standpunkte verharren, so muß man zum Beweise der obigen Aussage noch gewisse einschränkende Voraussetzungen über die Funktionenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ machen. In dieser Absicht definieren wir:

Eine gleichmäßig beschränkte *Funktionenfolge* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ heißt *glatt*, wenn aus einer zwischen irgendeiner Anzahl j ihrer Funktionen bestehenden Relation

$$\int (x_1 \varphi_{n_1} + \dots + x_j \varphi_{n_j})^2 ds < \varepsilon$$

folgt, daß auch $|x_1 \varphi_{n_1}(s) + \dots + x_j \varphi_{n_j}(s)| < \delta$ ist, wobei $\delta = \delta(\varepsilon)$ eine nur von ε abhängende, mit ε zugleich gegen Null konvergierende Zahl bedeutet. Dann gilt der Satz: Ist $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ eine glatte Funktionenfolge der asymptotischen Dimensionszahl r , so gibt es r linear voneinander unabhängige (normiert und orthogonal wählbare) Funktionen $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ derart, daß für hinreichend großes n jede der Funktionen φ_n sich von einer Funktion der linearen Schar $x_1 \psi_1 + x_2 \psi_2 + \dots + x_r \psi_r$ überall um weniger als eine beliebig kleine Größe ε unterscheidet, während es keine lineare Schar von weniger als r Komponenten mit derselben Eigenschaft gibt.

Wir können diese lineare Grenzschar auch folgendermaßen charakterisieren: Sind $G_1, G_2, G_3, \dots, G_m, \dots$ Gruppen von je r Funktionen $\varphi_{m_1}, \varphi_{m_2}, \dots, \varphi_{m_r}$ der Folge, deren Unabhängigkeitsmaß oberhalb der festen positiven Schranke α^2 liegt und deren Indizes m_i ($i = 1, 2, \dots, r$) mit wachsendem m ebenfalls über alle Grenzen wachsen, so konvergieren die durch die Funktionen von G_m definierten linearen Funktionenscharen S_m mit wachsendem m gleichmäßig gegen eine durch r linear unabhängige Funktionen $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ definierte Grenzschar S in dem Sinne, daß bei hinreichend großem m jede normierte Funktion von S_m sich von einer Funktion von S beliebig wenig unterscheidet.

Um den naheliegenden Beweis dieser Tatsachen bequem zu formulieren, sagen wir, eine Funktion f habe von einer linearen Funktionenschar S eine Distanz kleiner als die positive Größe h , wenn f sich von einer geeigneten Funktion von S absolut genommen um weniger als h unterscheidet; ebenso sagen wir, daß zwei lineare Funktionenscharen S_1, S_2 eine Distanz kleiner als h besitzen, wenn jede normierte Funktion der einen Schar sich von einer solchen der anderen Schar absolut genommen um weniger als h unterscheidet.

Nun gilt sofort: Bei hinreichend großem m und n hat die Funktion φ_n von der Schar S_m eine beliebig kleine Distanz. Denn das Unabhängigkeitsmaß von $\varphi_n, \varphi_{m_1}, \varphi_{m_2}, \dots, \varphi_{m_r}$ ist bei hinreichend großen m und n sicher beliebig klein; es gibt also $r+1$ Zahlen $x_0, x_1, x_2, \dots, x_r$, für die $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 = 1$ ist und für die $|x_0 \varphi_n + x_1 \varphi_{m_1} + \dots + x_r \varphi_{m_r}|$ beliebig klein wird. Hierbei kann mit wachsendem m, n die Zahl x_0 absolut genommen nicht beliebig klein werden, da sonst entgegen der Voraussetzung das Unabhängigkeitsmaß von $\varphi_{m_1}, \dots, \varphi_{m_r}$ beliebig klein würde; also können wir, indem wir durch x_0 dividieren und $\frac{x_i}{x_0} = -y_i$ setzen, den Schluß ziehen, daß bei hinreichend großem m und n die Funktion φ_n sich von der Funktion $y_1 \varphi_{m_1} + \dots + y_r \varphi_{m_r}$ der Schar S_m um beliebig wenig unterscheidet. Daher haben auch für hinreichend großes m und n die beiden linearen Funktionenscharen S_m und S_n eine beliebig kleine Distanz.

Nunmehr sei ε eine später als genügend klein zu fixierende positive Zahl, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ eine Folge positiver Zahlen, so daß $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j = \varepsilon$ ist. Es sei ferner m_i eine ganze positive Zahl, so daß für $n \geq m_i$ und $m \geq m_i$ die Distanz von S_n und S_m kleiner als ε_i ist. Wir gehen von irgendwelchen normierten, linear unabhängigen Funktionen $\chi_{1,1}, \chi_{1,2}, \dots, \chi_{1,r}$ der Schar S_{m_1} aus und bestimmen, was nach Voraussetzung möglich ist, in S_{m_2} die normierten Funktionen $\chi_{2,1}, \chi_{2,2}, \dots, \chi_{2,r}$ so, daß $|\chi_{2,i} - \chi_{1,i}| < \varepsilon_1$ ($i = 1, 2, \dots, r$) wird. Ebenso bestimmen wir in S_{m_3} die normierten Funktionen $\chi_{3,1}, \dots, \chi_{3,r}$ so, daß $|\chi_{3,i} - \chi_{2,i}| < \varepsilon_2$ wird, usw. Wegen $|\chi_{h,i} - \chi_{k,i}| < \varepsilon_h + \dots + \varepsilon_k$ ($h < k$) konvergiert mit wachsendem n die Funktionenfolge $\chi_{n,i}$ ($i = 1, \dots, r$) gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion ψ_i , und es ist ferner $|\psi_i - \chi_{1,i}| < \varepsilon$. Wird also ε hinreichend klein gewählt, so werden sicherlich auch die Funktionen $\psi_1, \dots, \psi_r$ zugleich mit $\chi_{1,1}, \dots, \chi_{1,r}$ ein von Null verschiedenes Unabhängigkeitsmaß haben, also linear unabhängig sein. Die Funktionen $\psi_1, \dots, \psi_r$ erfüllen offenbar alle gestellten Anforderungen.

§ 5.

Anwendung auf die Integralgleichungstheorie.

Die Anwendung der obigen Begriffe in der Integralgleichungstheorie beruht auf folgendem Hilfssatz: Es sei $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, $\psi_3(s)$, ... eine Folge von Funktionen, deren Norm unter einer festen Schranke M bleibt, und für welche im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz die Relation

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \psi_n(s) - \int K(s, t) \psi_n(t) dt \right\} \Rightarrow 0$$

gilt. Dann bilden die Funktionen $\psi_n(s)$ eine glatte Funktionenfolge von endlicher asymptotischer Dimensionenzahl r .

Zum Beweise beachten wir, daß die Relation (20) auch bestehen bleibt, wenn wir die Funktionen $\psi_n(s)$ ersetzen durch irgendwelche Funktionen $\chi_n(s)$, wobei $\chi_n(s) = x_1 \psi_{n_1} + \dots + x_p \psi_{n_p}$ eine lineare Kombination mit absolut beschränkt bleibenden Koeffizienten $x_1, x_2, \dots, x_p$ aus irgendeiner Anzahl p von solchen Funktionen $\psi_{n_1}, \psi_{n_2}, \dots, \psi_{n_p}$ der Folge ψ_n ist, daß dabei die Indizes n_i mit n zugleich ins Unendliche wachsen. Gibt es nun unter den Funktionen $\psi_n(s)$ Gruppen von je r mit beliebig großen Indizes n_i , so daß das Unabhängigkeitsmaß dieser Gruppe oberhalb einer festen Schranke α^2 bleibt, ist also mit andern Worten die Dimensionenzahl der Folge mindestens gleich r , so können wir diese Gruppen jede für sich orthogonalisieren, wobei nach § 4 die auftretenden Koeffizienten absolut genommen unterhalb der Schranke $\frac{1}{|\alpha|}$ bleiben. So erhalten wir Gruppen von je r zueinander orthogonalen normierten Funktionen

$$\omega_{n,i}(s), \quad (i = 1, 2, \dots, r; n = 1, 2, 3, \dots),$$

für welche die Limesgleichung

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \omega_{n,i}(s) - \int K(s, t) \omega_{n,i}(t) dt \right\} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

besteht. Nach der Besselschen Ungleichung ist

$$\int K(s, t)^2 ds dt \geq \sum_{i=1}^r \left(\int K(s, t) \omega_{n,i}(t) dt \right)^2,$$

$$\iint K(s, t)^2 ds dt \geq \sum_{i=1}^r \int ds \left(\int K(s, t) \omega_{n,i}(t) dt \right)^2,$$

und infolge von (21) daher

$$\iint K(s, t)^2 ds dt \geq r.$$

Somit haben wir eine Schranke für die Dimensionenzahl der Folge erhalten und daher diese Zahl als endlich erwiesen. Daß die Folge glatt ist, ergibt sich unmittelbar aus der angenähert quellenmäßigen Darstellung (20).

Erstens ist nämlich, wenn wir unter ε_n eine mit wachsendem n gegen Null strebende Zahl bezeichnen, nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\psi_n(s)^2 \leq \int K(s, t)^2 dt \cdot M + \varepsilon_n,$$

was die absolute Beschränktheit der ψ_n bedeutet. Zweitens folgt ebenso aus $\int (x_1 \psi_{n_1} + \dots + x_p \psi_{n_p})^2 ds < \varepsilon$ die Relation

$$(x_1 \psi_{n_1} + \dots + x_p \psi_{n_p})^2 \leq \int K(s, t)^2 dt \cdot \varepsilon + \varepsilon_n.$$

Wir wenden den bewiesenen Hilfssatz zunächst an, um die Eigenfunktionen eines symmetrischen Kernes $K(s, t)$ zu erhalten, der durch die ausgearteten symmetrischen Kerne $A_n(s, t)$ gleichmäßig approximiert werde. Es seien $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)}, \dots$ die positiven Eigenwerte, $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \mu_3^{(n)}, \dots$ die negativen Eigenwerte von $A_n(s, t)$; ferner $\psi_1^{(n)}(s), \psi_2^{(n)}(s), \dots$ bzw. $\chi_1^{(n)}(s), \chi_2^{(n)}(s), \chi_3^{(n)}(s), \dots$ die zugehörigen Eigenfunktionen. Mehrfache Eigenwerte sind dabei entsprechend mehrfach angeführt. Es seien wieder $J_n[\varphi, \varphi] = \iint A_n(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt$ und $J[\varphi, \varphi] = \iint K(s, t) \varphi(s) \varphi(t) ds dt$ die zu den Kernen A_n bzw. K gehörigen Integralformen, und es sei, wie wir voraussetzen dürfen, J positiver Werte fähig. $\frac{1}{\lambda_1^{(n)}}$ ist das Maximum von J_n unter der Nebenbedingung (8); $\frac{1}{\lambda_1}$ sei die obere Grenze von J unter derselben Nebenbedingung. Da die Werte von J und J_n sich bei hinreichend großem n um weniger als eine feste beliebig kleine Zahl unterscheiden, so muß $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{(n)} = \lambda_1$ sein. Es folgt also aus

$$\psi_1^{(n)}(s) - \lambda_1^{(n)} \int A_n(s, t) \psi_1^{(n)}(t) dt = 0$$

wegen $A_n \Rightarrow K$:

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \psi_1^{(n)}(s) - \lambda_1 \int K(s, t) \psi_1^{(n)}(t) dt \} = 0.$$

Mithin bilden die Funktionen $\psi_1^{(n)}$ gemäß unserem Hilfssatz, bei dessen Anwendung K durch $\lambda_1 K$ zu ersetzen ist, eine glatte Folge von endlicher, offenbar positiver Dimensionenzahl r^8) und definieren somit nach § 4 eine lineare Funktionenschar mit den normierten Komponenten $\psi_{1,1}(s), \dots, \psi_{1,r}(s)$, welche notwendig Lösungen der homogenen Integralgleichung

$$\psi_{1,i}(s) - \lambda_1 \int K(s, t) \psi_{1,i}(t) dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

also zum Eigenwert λ_1 gehörige Eigenfunktionen von K sind.

Genau ebenso erhält man die übrigen Eigenwerte und Eigenfunktionen des Kernes $K(s, t)$. Es ist nämlich z. B. $\lambda_h^{(n)}$ das durch geeignete Wahl

⁸⁾ Das Verschwinden von r würde mit der Normierung der Funktionen $\psi_{1,n}$ im Widerspruch stehen.

der $v_1, \dots, v_{h-1}$ zu erreichende Minimum des Maximums von J_n unter der Nebenbedingung (8) und den weiteren Nebenbedingungen (9). Definieren wir wieder $\frac{1}{\lambda_h}$ als die entsprechende untere Grenze der oberen Grenze von J , so ist wegen der Nachbarschaft des Wertevorrats von J_n zu dem von J wiederum $\lambda_h^{(n)} \rightarrow \lambda_h$. Hieraus schließen wir auf die Relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_h^{(n)} - \lambda_h \int K(s, t) \psi_h^{(n)}(t) dt \Rightarrow 0,$$

wonach die weiteren Folgerungen wie oben verlaufen. Um die negativen Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen zu bekommen, haben wir die entsprechenden Minimum- bzw. Maximum-Minimum-Probleme zu betrachten. Treten nur endlich viele Eigenwerte des einen oder des andern Vorzeichens auf, so ist bei der Aufsuchung derselben an der betreffenden Stelle abzubrechen, was keiner weiteren Ausführungen bedarf.

Auch im Falle der unsymmetrischen Integralgleichung (1) liefert die jetzige Methode gegenüber § 2 eine Vereinfachung und Vertiefung. Es genügt hier ein kurzer Hinweis unter Benutzung der dortigen Bezeichnungen. Im Falle I mögen die ϱ_n und c_n so beschaffen sein, daß für alle n die Norm c_n^2 unterhalb der Schranke M bleibt. Dann gilt für die Differenz $\varrho_n - \varrho_m = \zeta_{n,m}$ ebenfalls, daß ihre Norm unterhalb einer Schranke $4M$ bleibt. Ferner ist

$$(23) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \{ \zeta_{n,m}(s) - \int K(s, t) \zeta_{n,m}(t) dt \} \Rightarrow 0,$$

und daher erzeugen die $\zeta_{n,m}$ nach unserem Hilfssatz eine glatte Funktionenfolge beschränkter Dimensionenzahl r , welche eine Grenzschar mit den orthogonalen Komponenten $\psi_1(s), \dots, \psi_r(s)$ definieren möge, sofern nicht $r = 0$, also $\zeta_{n,m} \Rightarrow 0$ ist. Im letzteren Falle $r = 0$ konvergieren einfach die $\varrho_n(s)$ gleichmäßig gegen eine Lösung von (1). Im Falle $r > 0$ sind die $\psi_i(s)$ Lösungen der homogenen Gleichung. Wir ersetzen ϱ_n durch eine Funktion $\eta_n(s) = \varrho_n(s) + x_1 \psi_1(s) + \dots + x_r \psi_r(s)$, welche orthogonal zu $\psi_1, \dots, \psi_r$ ist. Für diese Funktionen gilt sicherlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(s) - \int K(s, t) \eta_n(t) dt = f(s) \Rightarrow 0.$$

Wir können dann auf die Differenzen $\eta_n - \eta_m = \zeta_{n,m}$ wieder unseren Hilfssatz anwenden und leicht schließen, daß die Dimensionenzahl dieser Folge Null sein muß, daß also die η_n gleichmäßig gegen eine zu den $\psi_i(s)$ orthogonale Lösung von (1) konvergieren.

Im Falle II erhalten wir ebenfalls auf Grund unseres Hilfssatzes als Grenzgebilde der Funktionenfolge $\sigma_n(s) = \frac{q_n(s)}{c_n}$ eine lineare Funktionenschar von Lösungen der homogenen Integralgleichung.

Auf diese Art ergibt sich nach unserer Methode ein genauerer Einblick in die Natur der hier waltenden Konvergenzverhältnisse.

§ 6.

Stetigkeitsfragen.

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen enthalten implizit auch eine vollständige Beantwortung der Frage, inwieweit sich die Lösungen eines Integralgleichungsproblemcs mit dem Kern stetig ändern. Wir begnügen uns hier mit der Ausführung für das Eigenwertproblem bei einem symmetrischen Kern K . Der Kern $K(s, t)$ möge der gleichmäßige Limes anderer symmetrischer Kerne $K_n(s, t)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) sein. Wenn wir uns auf die Funktionen φ beschränken, welche der Bedingung (8) genügen, so unterscheiden sich die Werte der zu den Kernen gehörigen Integralformen $J_n[\varphi, \varphi]$ und $J[\varphi, \varphi]$ bei hinreichend großem n beliebig wenig. Daher gilt dies auch für die Minima oder Maxima dieser Kerne unter den Nebenbedingungen (8), (9), und ebenso für die Maxima der Minima oder die Minima der Maxima. Mit anderen Worten: *Der h -te positive und der h -te negative Eigenwert ändert sich stetig mit dem Kern.* Hinsichtlich der Eigenfunktionen können wir mit Rücksicht auf das bei ihnen willkürliche Vorzeichen und das Auftreten mehrfacher Eigenfunktionen eine regelrechte Stetigkeit nicht erwarten. Dafür tritt hier folgendes Verhalten auf: *Es sei λ_h ein r -facher Eigenwert des Kernes $K(s, t)$, es sei also $\lambda_h = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_h^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{h+1}^{(n)} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{h+r-1}^{(n)}$, dagegen gelte diese Relation nicht für $\lambda_{h-1}^{(n)}$ und $\lambda_{h+r}^{(n)}$. Dann konvergiert mit wachsendem n die lineare Schar aus den Eigenfunktionen $\psi_h^{(n)}, \dots, \psi_{h+r-1}^{(n)}$ des Kernes K_n für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die lineare Schar der Eigenfunktionen von K für den Eigenwert λ_h .*

Diesen Satz, welcher ein vollständiger Ausdruck der fraglichen Stetigkeitseigenschaften der Eigenfunktionen ist, beweist man auf Grund unseres Hilfssatzes fast unmittelbar aus der Bemerkung, daß für die Eigenfunktionen $\psi_{h+k}^{(n)}$ ($0 \leq k < r$) die Limesgleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \psi_{h+k}^{(n)}(s) - \lambda_h \int K(s, t) \psi_{h+k}^{(n)}(t) dt \right\} = 0$$

besteht.

Schlußbemerkung.

Die Ausführungen dieser Arbeit treffen natürlich nicht nur den hier der Bequemlichkeit halber vorausgesetzten Fall stetiger Kerne; vielmehr gelten sie auch im allgemeinsten prinzipiell zugänglichen Falle, bei dem nur folgende Voraussetzungen erfüllt zu sein brauchen: Alle auftretenden Funktionen sind im Lebesgueschen Sinne integrierbar; insbesondere existieren auch die Integrale $\int K(s, t)^2 ds$ und $\int K(s, t)^2 dt$ in diesem Sinne und liegen unterhalb fester Schranken. Alle Integrale sind dabei nach Lebesgue zu verstehen, alle Funktionen nur bis auf Nullmengen definiert.

Auf weitere Anwendungen der hier dargelegten Begriffsbildungen hoffe ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen zu können.

(Eingegangen am 17. 1. 1923.)