Berichtigung

zu der Arbeit von Kurt Friedrichs:

„Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren I. und II. Teil“,

Math. Annalen 109, S. 465—487 und 685—713.

Herr Wecken hat mich auf einige Fehler in der angegebenen Arbeit aufmerksam gemacht, die ich im folgenden berichtigen will.

In Teil I, S. 472, wurde behauptet, daß ein H -dichter Teilraum $\mathfrak{G}$ des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$, der mit einer positiv halbbeschränkten Form G als Maßform abgeschlossen ist, auch separabel und also ein Hilbertscher Raum ist mit G als Maßform. Der in Anmerkung ⁹⁾ gegebene Beweis ist nicht richtig. Man schließe folgendermaßen.

Nach Satz 6 (S. 477) gibt es einen beschränkten Operator B , dessen Wertebereich $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$ liegt und für den eine Abschätzung $(Bh | G B h) \leq \text{const.} (h | H h)$ besteht. Er führt offenbar die abzählbare H -dichte Teilmenge ($\mathfrak{S}$) von $\mathfrak{H}$ in eine abzählbare G -dichte Teilmenge ($\mathfrak{F}$) von $\mathfrak{F}$ über. Beim Beweise von Satz 6 wurde in der Tat die G -Separabilität von $\mathfrak{G}$ nicht benutzt, wie Fr. Rellich bemerkt hat; ebenso unabhängig beweist man ¹⁾, daß es zu jeder Teilmenge von $\mathfrak{G}$, die nicht G -dicht in $\mathfrak{G}$ liegt, ein Element $g_0 \neq 0$ gibt, das auf ihr orthogonal ist. Daraus folgt (vgl. Beweis von Satz 7), daß $\mathfrak{F}$ und also auch ($\mathfrak{F}$) G -dicht in $\mathfrak{G}$ liegt.

Teil II. (1). Das Zusatzpotential v soll bei den Dimensionen $n = 2$ und $n = 3$ noch stetig differenzierbar sein statt nur stetig (S. 688, 689).

Beim Beweise von Satz 1.3 B (S. 705) wird anschließend an Formel (13 B) in der Tat die stetige Differenzierbarkeit von v benutzt statt nur die von $f_2(x)$.

Im Falle (4) soll ferner (S. 688) vorausgesetzt werden, daß v in Γ nach oben beschränkt bleibt.

(2). Für die Tatsache, daß die Räume $\mathfrak{F}''$, $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{G}''$, $\mathfrak{G}'$ ineinander dicht liegen mit G als Maßform (S. 689—690) wurde in Fußnote ⁷⁾ ein Beweis angedeutet, der für den Fall (4) nicht stichhaltig ist. Er soll hier für alle Fälle näher ausgeführt werden.

Es ist also [zu jeder Funktion $g(x)$ aus $\mathfrak{G}'$ eine Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{F}''$ anzugeben, so daß für die Differenz die Form G beliebig klein wird.

Man wird sich zu dem Zwecke auf die bekannte Tatsache berufen, daß jede stetige, (im Sinne von S. 687) stückweise stetig differenzierbare Funktion $g(x)$ in jedem Teilgebiet Γ_σ derart durch viermal stetig differenzierbare Funktionen $f(x)$ approximiert werden kann, daß

$$\int_{\Gamma_\sigma} \left\{ \sum \left(\frac{d}{dx} (f - g) \right)^2 + (f - g)^2 \right\} dx$$

beliebig klein wird. Ist $g(x)$ außerhalb eines Teilgebietes Γ_τ von Γ_σ ($\tau > \sigma$) viermal stetig differenzierbar, so läßt sich f in Γ zweimal stetig differenzierbar so wählen, daß $f = g$ ist außer Γ_σ .

Nun genügt es, zur Funktion $g(x)$ eine Funktion $\tilde{g}(x)$ aus $\mathfrak{G}'$ mit beliebig kleinem $g - \tilde{g}$ G $g - \tilde{g}$ zu konstruieren, die außerhalb eines geeigneten Teil-

¹⁾ Vgl. H. Löwig, Fr. Riesz, Acta Litt. Sci. Szeged 7 (1934); Fr. Rellich, Math. Annalen 110 (1934), S. 342.

gebietes Γ_τ in den Fällen (1), (2), (3) identisch verschwindet, im Falle (4) in radialer Richtung konstant und viermal stetig differenzierbar ist. Denn wählen wir zu dieser Funktion $\tilde{g}(x)$ nach Vorangehendem eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ mit beliebig kleinem $\tilde{g} - f \in G$ $\tilde{g} - f$, die außerhalb Γ_σ mit $g(x)$ übereinstimmt, so liegt $f(x)$ in $\mathfrak{F}'$ und es ist auch $g - f \in G$ $g - f$ beliebig klein.

Zur Konstruktion der Funktion $\tilde{g}(x)$ im Falle (4) gehen wir aus von einer in $K_{R-\tau_0}$ mit $\tau_0 > 0$ erklärten viermal stetig differenzierbaren Funktion $g^*(x)$ und setzen sie über $K_{R-\tau}$ in K_R hinein konstant in radialer Richtung fort, wo τ aus $\tau_0 \leq \tau \leq 2\tau_0$ noch zu bestimmen ist; d. h. wir bilden $\tilde{g}(x) = g^*(x)$ in $K_{R-\tau}$, $= g^*\left(x \frac{R-\tau}{r}\right)$ für $R-\tau \leq r < R$. Diese Funktion $\tilde{g}(x)$ liegt offenbar in $\mathfrak{G}'$; sie ist außerhalb Γ_τ viermal stetig differenzierbar und es ist $\frac{dg}{dr} = 0$ in $R-\tau < r < R$.

Für die Differenz $g - \tilde{g}$ läßt sich die Form G abschätzen durch

$$g - \tilde{g} \in G \quad g - \tilde{g} \leq \int_{K_{R-\tau_0}} \Phi(g - g^*) dx + 4R^{n-1} \tau \int_{\Omega_{R-\tau}} \Phi(g^* - g) d\omega + 4R^{n-1} \tau \int_{\Omega_{R-\tau}} \Phi(g) d\omega + 8 \left(\frac{R}{R-2\tau_0} \right)^2 \int_{K_{R-2\tau_0, R}} \Phi(g) dx,$$

wenn wir $\Phi(g) = \sum \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 + v_0 g^2$ setzen, wo v_0 die obere Schranke für v in Γ ist.

Nun kann man zunächst τ_0 und τ so wählen, daß die beiden letzten Terme, und g^* so bestimmen, daß die beiden ersten Glieder beliebig klein werden.

In den Fällen (1), (2), (3) haben wir zur Funktion $g(x)$ eine Funktion $\tilde{g}(x)$ aus $\mathfrak{G}'$ zu konstruieren, die außerhalb eines geeigneten Γ_τ verschwindet. Zu positiven σ und $\tau < \sigma$ wählen wir eine Funktion $s(r)$, die in Γ_σ verschwindet, außerhalb Γ_τ den Wert 1 hat. In den Fällen (3) und (1) steige sie im Zwischengebiet $\Gamma_\sigma - \Gamma_\tau$ in radialer Richtung linear von 0 zu 1 an; dann ist $\Delta s \geq 0$ und die Ableitung s_r bleibt für $\tau \rightarrow 0$ bei festem σ beschränkt.

Nunmehr ersetze man die Funktion $g(x)$ durch die Funktion

$$\tilde{g}(x) = (1 - s(r)) g(x),$$

die offenbar in $\mathfrak{G}'$ liegt und außerhalb Γ_τ verschwindet. Alsdann besteht die Identität

$$(*) \quad g - \tilde{g} \in G \quad g - \tilde{g} = \int_{\Gamma - \Gamma_\sigma} \left\{ s^2 \sum \left(\frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 + (s^2 v - s \Delta s) g^2 \right\} dx + \int_{\Omega_{(\tau)}} r^{n-1} s_r(r) g^2 d\omega,$$

wenn $\Omega_{(\tau)}$ den Rand von Γ_τ bedeutet. Das Integral über $\Gamma - \Gamma_\sigma$, das wegen $0 \leq s \leq 1$ und $v \geq 1$ nach oben abzuschätzen ist durch

$$(*) \quad \int_{\Gamma - \Gamma_\sigma} \left\{ \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 + v g^2 \right\} dx,$$

kann durch Wahl von σ beliebig klein gemacht werden; ebenso das Randglied durch Wahl von τ bei festem σ , und zwar im Falle (3) wegen der Randbedingung (1) S. 688 im Falle (1) wegen der Existenz des Integrals $\int g^2 dx$.

Im Falle (2) wähle man $s(r)$ ebenso wie bei (1) für $\frac{1}{\tau} \leq r \leq \frac{1}{\sigma}$ linear in r , in $\tau \leq r \leq \sigma$ dagegen

$$s(r) = (r^{n-1} \varphi(r))^{-\frac{1}{2}} \int_{\tau}^r \varphi(r') dr' : (\tau^{n-1} \varphi(\tau))^{-\frac{1}{2}} \int_{\tau}^{\frac{1}{\sigma}} \varphi(r') dr',$$

wo $\varphi(r)$ die Bedeutung von S. 688, 689 hat. Dann ist, wie man nachrechnet, $-\Delta s = \varphi^2 s$ in $\tau \leq r < \sigma$, und bei festem σ strebt $-s_r(\tau) : \varphi(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 1$. Zur

Identität (*) tritt noch das Glied $-\int_{\Omega_\tau} r^{n-1} s_r(r) g^2 d\omega$, das nach Anhang 2.3

(S. 711) bei festem σ mit τ gegen Null strebt; zur Abschätzung (*) tritt wegen $s^2 v - s \Delta s = s^2(v + \varphi^2) \leq v + \varphi^2$ [vgl. (2)₀ S. 689] noch das Glied $\int_{K_{\tau, \sigma}} \varphi^2 g^2 dx$,

das nach Anhang 2.3 ebenfalls mit σ beliebig klein wird.

(3). Die Abschätzung von $\int_{|x-\xi_0| \leq \varepsilon} (\Delta k_{\xi, \delta})^2 dx$ (S. 703) ist unrichtig; sie werde durch die folgende ersetzt. Es gilt

$$\Delta k_{\xi, \delta} = \frac{1}{(2\delta)^n} \int_{|\eta-\xi| < \delta} K(\eta-x) d\eta \leq \frac{1}{(2\delta)^n} \int_{|\eta-\xi| < \delta \sqrt{n}} K(\eta-x) d\eta \leq C_n K(x-\xi)$$

mit $C_n = \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n \int_{|x| \leq 1} dx$, wenn δ und ε so klein sind, daß $K(\eta-x) \geq 0$ für

$|x-\xi_0| \leq \varepsilon$, $|\eta-\xi| \leq \delta \sqrt{n}$ ist, auch für $n=2$. Nun folgt in der Tat, daß

$$\int_{|x-\xi_0| \leq \varepsilon} (\Delta k_{\xi, \delta})^2 dx \leq C_n^2 \int_{|x'-(\xi_0-\xi)| \leq \varepsilon} (K(x'))^2 dx' \leq C_n^2 \int_{|x'| \leq \varepsilon + |\xi_0-\xi|} (K(x'))^2 dx',$$

zugleich mit ε und δ gegen Null strebt.

(Eingegangen am 19. 10. 1934.)