Corrigendum

Représentations des groupes réductifs dans des espaces de cohomologie

Michel Brion

Mathematische Annalen **300**, 589–604 (1994)

Les faisceaux Ext et groupes Ext , qui apparaissent en plusieurs points de l'article ont tous été imprimés de la même façon: Ext . Ceci rend difficile la compréhension des sections 3.2, 3.3 et 5.3. Nous indiquons comment corriger ces sections. Voici d'abord l'énoncé et la démonstration correctes du lemme 3.2.

3.2. Lemme. Soit X une G -variété lisse et toroïdale (voir 3.1). Soit $Y \subset X$ une orbite fermée de G , de codimension d . Pour tout G -fibré vectoriel E de rang r sur X , et pour tout entier $i \geq 0$, les multiplicités du G -module

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \operatorname{Ext}_X^i(\mathcal{I}_Y^n / \mathcal{I}_Y^{n+1}, E)$$

sont au plus $\omega(i - d)r$. De plus, la multiplicité de V_λ dans le G -module virtuel

$$\bigoplus_{i, n \geq 0} (-1)^i \operatorname{Ext}_X^i(\mathcal{I}_Y^n / \mathcal{I}_Y^{n+1}, E)$$

est fonction polyédrale de λ .

On rappelle que $\omega(i)$ désigne le nombre d'éléments de longueur i dans le groupe de Weyl de G ; on pose $\omega(i) = 0$ pour $i < 0$.

Démonstration. Soient $Y_1, \dots, Y_d$ comme en 3.1. On a un isomorphisme canonique

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_Y^n / \mathcal{I}_Y^{n+1} \simeq \bigoplus_{n_1, \dots, n_d \geq 0} \mathcal{O}_Y(-n_1 Y_1 - \dots - n_d Y_d).$$

Déterminons d'abord les faisceaux $\operatorname{Ext}_X^i(\mathcal{O}_Y(-n_1 Y_1 - \dots - n_d Y_d), E)$ ou plus généralement les faisceaux $\operatorname{Ext}_X^i(F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y, E)$ où F est un faisceau localement libre sur X . A l'aide du complexe de Koszul pour $Y_1, \dots, Y_d$, on obtient

$$\operatorname{Ext}_X^d(F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y, E) \simeq \operatorname{Hom}_Y(F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y, E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y(Y_1 + \dots + Y_d))$$

ainsi que

$$\operatorname{Ext}_X^i(F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y, E) = 0$$

pour $i \neq d$. La suite spectrale

$$H^i(X, \text{Ext}_X^j(F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y, E)) \Rightarrow \text{Ext}_X^{i+j}(F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y, E)$$

donne donc un isomorphisme canonique

$$\text{Ext}_X^i(F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y, E) \simeq H^{i-d}(Y, \text{Hom}_Y(F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y, E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y(Y_1 + \cdots + Y_d))).$$

On en déduit un isomorphisme de G -modules

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Ext}_X^i(\mathcal{I}_Y^n / \mathcal{I}_Y^{n+1}, E) \simeq \bigoplus_{n_1, \dots, n_d \geq 1} H^{i-d}(Y, E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y(n_1 Y_1 + \cdots + n_d Y_d)).$$

Posons

$$\text{Spec}_{\mathcal{O}_Y} \bigoplus_{(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{O}_Y(n_1 Y_1 + \cdots + n_d Y_d) := Z$$

et notons $\pi : Z \rightarrow Y$ le morphisme canonique. Alors π est affine, et de plus

$$\bigoplus_{n_1, \dots, n_d \geq 1} \mathcal{O}_Y(n_1 Y_1 + \cdots + n_d Y_d)$$

est un facteur direct de $\pi_* \mathcal{O}_Z$. On en déduit que le G -module

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Ext}_X^i(\mathcal{I}_Y^n / \mathcal{I}_Y^{n+1}, E)$$

est un facteur direct de $H^{i-d}(Y, E \otimes \pi_* \mathcal{O}_Z)$. De plus, ce dernier est isomorphe à $H^{i-d}(Z, \pi^* E)$. Mais Z est homogène et sphérique d'après 3.1, d'où la première assertion grâce à 2.5. Pour la seconde assertion, on observe que la $\mathbb{Z}^d$ -gradation de $\mathcal{O}_Z$ munit Z d'une action du tore $(\mathbb{G}_m)^d$ qui commute à l'action de G . Grâce à 2.5, on en déduit que la multiplicité de V_λ dans $\chi(Y, E(n_1 Y_1 + \cdots + n_d Y_d))$ est fonction polyédrale de $(\lambda, n_1, \dots, n_d)$, et donc que la multiplicité de V_λ dans

$$\bigoplus_{n_1, \dots, n_d \geq 1} \chi(Y, E(n_1 Y_1 + \cdots + n_d Y_d))$$

est fonction polyédrale de λ . On conclut grâce à l'égalité:

$$\bigoplus_{i, n \geq 0} (-1)^i \text{Ext}_X^i(\mathcal{I}_Y^n / \mathcal{I}_Y^{n+1}, E) = (-1)^d \bigoplus_{n_1, \dots, n_d \geq 1} \chi(Y, E(n_1 Y_1 + \cdots + n_d Y_d)).$$

Par ailleurs, la preuve du théorème 3.3 ne fait intervenir que des groupes Ext , au lieu des Ext de la version à corriger. Enfin, il faut lire la fin de la preuve du lemme 5.3 comme suit:

On a une suite spectrale

$$\text{Ext}_Y^i(\mathcal{I}_Y^n / \mathcal{I}_Y^{n+1}, \text{Ext}_X^j(\mathcal{O}_Y, \mathcal{F})) \Rightarrow \text{Ext}_X^{i+j}(\mathcal{I}_Y^n / \mathcal{I}_Y^{n+1}, \mathcal{F}).$$

En outre, $\text{Ext}_X^j(\mathcal{O}_Y, \mathcal{F}) = 0$ pour $j > d$ (car X et Y sont lisses), et $\mathcal{I}_Y^n / \mathcal{I}_Y^{n+1}$ est localement libre sur Y . Les faisceaux (à support dans Y) $\text{Ext}_X^i(\mathcal{I}_Y^n / \mathcal{I}_Y^{n+1}, \mathcal{F})$ sont donc nuls pour $i > d$. On en déduit que $\text{Ext}_X^i(\mathcal{I}_Y^n / \mathcal{I}_Y^{n+1}, \mathcal{F}) = 0$ pour $i > \text{cd}(Y) + d$. L'assertion en résulte comme dans la preuve de 3.3.