Correction d'une somme en arithmétique à virgule flottante

M. Pichat

Reçu le 8 Juin 1971

Summary. Let S be the sum of given numbers, calculated by normalized floating-point arithmetic, the rounding—off law being a truncature with a guard digit. We give an algorithm to obtain all the digits of S as significant digits; very often, one step is enough to provide correction of S .

I. Introduction

I.1. Notations

Nous désignerons par :

b la base de la représentation arithmétique considérée

s le nombre des chiffres de mantisse

$\oplus$ et $\ominus$ les opérations d'addition et de soustraction, en arithmétique flottante normalisée. Ces opérations ne sont pas associatives et l'ordre des opérations sera défini de la gauche vers la droite.

Nous considérerons ici pour règle d'arrondi, une règle de troncature avec chiffre de garde.

Rappelons que si X est un nombre à virgule flottante, normalisé, non nul, il est caractérisé par les entiers algébriques l et p tels que :

$$X = lb^{p-s} \quad \text{avec} \quad b^{s-1} \leq |l| < b^s$$

en effet, soient ε le signe, p l'exposant et a_i , $1 \leq i \leq s$, les chiffres de la mantisse, de X (le chiffre de tête a_1 est non nul pour tout nombre à virgule flottante, normalisé, différent de 0).

$$X = \varepsilon \left(\sum_{k=1}^s a_k b^{-k} \right) b^p \quad \text{donc} \quad l = \varepsilon \sum_{k=1}^s a_k b^{s-k}.$$

Nous noterons : $\mathcal{E}(X) = p$ l'exposant de X

$[x]$ la partie entière de x , si $x \in \mathbb{R}^+$.

I.2. Rappels

Soient $X_1 = l_1 b^{p_1-s}$ et $X_2 = l_2 b^{p_2-s}$, $X_1 \geq X_2$, deux nombres à virgule flottante, positifs.

Posons :

$$SF = X_1 \oplus X_2$$

$$DF = X_1 \ominus X_2$$

Ces opérations d'addition et de soustraction, en arithmétique à virgule flottante, normalisée, s'effectuent, pour la règle de troncature indiquée comme suit [1] :

1) X_1 est exprimé sous la forme $(bl_1)b^{p_1-s-1}$, c'est à dire, est écrit comme un nombre normalisé de $(s+1)$ chiffres de mantisse. X_2 est «approché» sous la forme $[l_2b^{p_2-p_1+1}]b^{p_1-s-1}$ (cette valeur étant toujours exacte si $p_2 - p_1 + 1 \geq 0$). Cette écriture est, en général, non normalisée.

2) les mantisses qui sont à présent alignées et comportent $s+1$ chiffres, sont ajoutées ou soustraites, puis le résultat obtenu est normalisé et tronqué lorsque nécessaire.

On a donc :

$$SF = (l_1 + [l_2b^{p_2-p_1+1}])b^{p_1-s} \quad \text{si } \mathcal{E}(SF) = \mathcal{E}(X_1), \quad (1)$$

$$SF = \left[\frac{l_1 + [l_2b^{p_2-p_1+1}]}{b} \right] b^{p_1+1-s} \quad \text{si } \mathcal{E}(SF) = \mathcal{E}(X_1) + 1. \quad (2)$$

De même :

$$DF = \left[\frac{bl_1 - [l_2b^{p_2-p_1+1}]}{b} \right] b^{p_1-s} \quad \text{si } \mathcal{E}(DF) = \mathcal{E}(X_1), \quad (3)$$

$$DF = (bl_1 - [l_2b^{p_2-p_1+1}])b^{p_1-s-1} \quad \text{si } \mathcal{E}(DF) < \mathcal{E}(X_1) \quad (4)$$

(on a exprimé dans ce dernier cas, la valeur de DF et non l'écriture après normalisation qui fait intervenir un cadrage).

I.3. Remarques

On remarque que l'on ne fait aucune erreur d'opération, en particulier :

A — en soustrayant deux nombres de même exposant

B — en soustrayant deux nombres dont les exposants diffèrent de une unité, à la condition que de plus, $\mathcal{E}(DF) < \mathcal{E}(X_1)$ strictement.

Ce sont ces opérations «sans erreur» qui permettront de définir un algorithme pour l'obtention de sommes algébriques dont tous les chiffres soient significatifs.

II. Etude et représentation des erreurs d'addition en arithmétique à virgule flottante

II.1. Etude de la somme et de la différence

X_1 et X_2 étant définis comme au § I, posons :

$$S = X_1 + X_2 = SF + E, \quad (5)$$

$$D = X_1 - X_2 = DF + E'. \quad (6)$$

Les remarques *A* et *B* précédentes permettent de représenter, dans tous les cas, sous réserve de la capacité de la machine, E et E' par les nombres à virgule flottante:

$$E = -(SF \ominus X_1 \ominus X_2)$$

$$E' = -(DF \ominus X_1 \oplus X_2).$$

On peut noter qu'une expression théorique de ces erreurs serait obtenue en écrivant les divisions:

$$l_2 = b^{p_1 - p_2} q_1 + r_1 \quad r_1 \leq b^{p_1 - p_2} - 1$$

$$l_1 + q_1 = b q_2 + r_2 \quad r_2 \leq b - 1$$

et si $p_2 \neq p_1$

$$l_2 = b^{p_1 - p_2 - 1} q_3 + r_3 \quad r_3 \leq b^{p_1 - p_2 - 1} - 1$$

$$b l_1 - q_3 = b q_4 + r_4 \quad r_4 \leq b - 1$$

en effet, on a:

$$\text{si } \mathcal{E}(SF) = \mathcal{E}(X_1) \quad E = r_1 b^{p_1 - s} \quad \text{et } 0 \leq E < b^{p_1 - s}$$

$$\text{si } \mathcal{E}(SF) = \mathcal{E}(X_1) + 1 \quad E = (r_1 + r_2 b^{p_1 - p_2}) b^{p_1 - s} \quad \text{et } 0 \leq E < b^{p_1 + 1 - s}$$

et pour la différence, lorsque $p_2 \neq p_1$ ($E' = 0$ pour $p_2 = p_1$)

$$\text{si } \mathcal{E}(DF) = \mathcal{E}(X_1) \quad E' = (r_4 b^{p_1 - p_2 - 1} - r_3) b^{p_1 - s} \quad \text{et } -b^{p_1 - 1 - s} < E' < b^{p_1 - s}$$

$$\text{si } \mathcal{E}(DF) < \mathcal{E}(X_1) \quad E' = -r_3 b^{p_1 - s} \quad \text{et } -b^{p_1 - 1 - s} < E' \leq 0.$$

Dans le cas où $\mathcal{E}(DF) < \mathcal{E}(X_1)$, il est important de remarquer que:

$$p_2 = p_1 \quad \text{ou} \quad p_2 = p_1 - 1 \Rightarrow E' = 0.$$

$p_2 \leq p_1 - 1 \Rightarrow \mathcal{E}(DF) = p_1 - 1$ ce qui permettra d'établir la formule (8) ci-dessous.

II.2. Cas d'une somme algébrique de 2 termes

Soient à présent, X_1 et X_2 deux nombres à virgule flottante, de signes quelconques.

On peut supposer $|X_1| \geq |X_2|$ et les 4 possibilités:

$$0 < X_2 < X_1, \quad X_1 < X_2 < 0, \quad X_2 < 0 < X_1, \quad X_1 < 0 < X_2$$

se ramènent par changements de variable aux cas précédents.

Désignons par ξ_1 et ξ_2 les 2 nombres à virgule flottante, non nuls, de plus petit module, respectivement positif et négatif.

A la condition que si $E \neq 0$, on ait:

$$0 < \xi_1 \leq E \quad \text{ou} \quad E \leq \xi_2 < 0. \quad (7)$$

E est représentable par un nombre en virgule flottante. Il vient:

Proposition II.1. Etant donnés 2 nombres X_1 et X_2 à virgule flottante tels que $|X_1| \geq |X_2|$, si $S = X_1 + X_2$ et $SF = X_1 \oplus X_2$, alors l'erreur $E = S - SF$ est

représentée (sous réserve que E vérifie (7)) par le nombre à virgule flottante:

$$E = -(SF \ominus X_1 \ominus X_2).$$

Les expressions théoriques écrites permettent de majorer E :

$$\text{Si } \mathcal{E}(SF) = P, \text{ on a: } |E| < b^{P-s}. \quad (8)$$

III. Algorithme correcteur d'une somme de N termes

Soient N nombres à virgule flottante, X_i , $1 \leq i \leq N$.

Nous nous proposons d'obtenir, par des calculs effectués en machine, le nombre en virgule flottante le plus près possible de la somme algébrique $S = \sum_{i=1}^N X_i$.

Posons: $SF = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_N$

$$S = SF + E.$$

Si e_i désigne l'erreur commise lors de la $i^{\text{ème}}$ addition dans le calcul de SF , on a immédiatement:

$$S = SF + \sum_{i=1}^{N-1} e_i.$$

Pour corriger SF , on ajoutera à la valeur trouvée, la somme des e_i , calculée en virgule flottante; cette dernière somme étant entachée d'erreur, on pourra effectuer une deuxième correction, et ainsi de suite.

III.1. Définitions

Changeant légèrement les notations, on définit les suites $\{SF^n\}$, $\{e_i^n\}$, $i = 1, \dots, N-1$, $\{F_i^n\}$, $i = 2, \dots, N-1$ de la façon suivante:

Les premiers termes de chaque suite sont définis par:

$$\begin{aligned} F_2^1 &= X_1 \oplus X_2 & e_1^1 &= X_1 + X_2 - F_2^1 \\ F_{i+1}^1 &= F_i^1 \oplus X_{i+1} & e_i^1 &= F_i^1 + X_{i+1} - F_{i+1}^1 \quad \text{pour } i = 2, \dots, N-2 \\ SF^1 &= F_{N-1}^1 \oplus X_N & e_{N-1}^1 &= F_{N-1}^1 + X_N - SF^1. \end{aligned}$$

(Rappelons que, pour calculer $-e_i^1$ par exemple, on formera: $F_{i+1}^1 \ominus F_i^1 \ominus X_{i+1}$ ou $F_{i+1}^1 \ominus X_{i+1} \ominus F_i^1$, selon les grandeurs relatives de $|F_i^1|$ et $|X_{i+1}|$.)

Puis, on pose:

$$\begin{aligned} F_2^n &= e_1^{n-1} \oplus e_2^{n-1} & e_1^n &= e_1^{n-1} + e_2^{n-1} - F_2^n \\ F_{i+1}^n &= F_i^n \oplus e_{i+1}^{n-1} & e_i^n &= F_i^n + e_{i+1}^{n-1} - F_{i+1}^n \quad \text{pour } i = 2, \dots, N-2 \\ SF^n &= SF^{n-1} \oplus F_{N-1}^n & e_{N-1}^n &= SF^{n-1} + F_{N-1}^n - SF^n. \end{aligned}$$

Nous noterons:

$$P^n = \mathcal{E}(SF^n).$$

Des définitions, il vient:

$$S = SF^n + \sum_{i=1}^{N-1} e_i^n. \quad (9)$$

III.2. Convergence de l'algorithme

Examinons le passage du pas $n-1$ au pas n .

Soit Q^n le plus petit entier tel que:

$$\sum_{i=1}^{N-1} |e_i^{n-1}| < b^{Q^n}$$

et montrons que nous avons 2 possibilités:

- * soit $Q^{n+1} < Q^n$
- * soit l'algorithme est terminé.

Si $Z_1, Z_2, \dots, Z_P$ sont des nombres à virgule flottante, remarquons que:

$$|Z_1 \oplus Z_2 \oplus \dots \oplus Z_k| \leq \sum_{i=1}^P |Z_i| \quad \text{pour } \forall k \leq P$$

en raison de l'hypothèse de troncature (et non d'arrondi).

D'après cette remarque et (8)

$$|e_i^n| < \max(b^{Q^{n-s}}, \xi) \quad (1 \leq i \leq N-2) \quad \text{où } \xi = \max(\xi_1, |\xi_2|).$$

Limitons nous au cas où $2N \leq b^{s-1}$, alors:

Si $b^{Q^{n-s}} \geq \xi$

$$\sum_{i=1}^{N-1} |e_i^n| < (N-2) b^{Q^{n-s}} + b^{P^{n-s}} < \frac{1}{2} b^{Q^{n-1}} + b^{P^{n-s}}$$

si $b^{P^{n-s}} < \frac{1}{2} b^{Q^{n-1}}$, il vient $Q^{n+1} < Q^n$; sinon on a $\sum_{i=1}^{N-1} |e_i^n| < 2b^{P^{n-s}}$ et seul le dernier

bit de la mantisse de SF^n peut être entaché d'erreur.

Si l'on avait eu $b^{Q^{n-s}} < \xi$, la majoration serait: $|S - SF^n| \leq (N-2)\xi + b^{P^{n-s}}$; la précision est donc limitée dans le cas où S est proche de ξ en valeur absolue, et en particulier si $SF^n = 0$ on fera $P^n = -\infty$ dans la majoration écrite.

donc:

Proposition III.2. Si $2N \leq b^{s-1}$, il existe un entier $k > 0$ tel que:

$$|S - SF^k| < \text{Max}(2b^{P^{k-s}}, (N-2)\xi + b^{P^{k-s}}) \quad \text{où } P^k = e(SF^k).$$

Remarque: portée de la première correction:

$$\text{si } p = \max(\mathcal{E}(F_i^1), P^1) \quad i = 2, \dots, N-1.$$

On a:

$$|S - SF^2| < b^{p+2\gamma-2s} + b^{P^{2-s}}$$

où γ est le plus petit entier tel que $N \leq b^\gamma$.

IV. Exemples numeriques

Nous avons considéré 2 sommes arithmetiques:

$$\sigma_1 = \sum_{I=1}^N \frac{1}{I} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sum_{I=1}^N \frac{1}{I^2}$$

et 2 sommes algébriques:

$$\sigma_3 = \sum_{I=1}^N \frac{(-1)^{I-1}}{I} \quad \text{et} \quad \sigma_4 = \sum_{I=1}^N \frac{(-1)^{I-1}}{I^2}.$$

Dans chaque cas, soient:

S la valeur de la somme effectuée par une IBM 360-30

SC la valeur de cette somme corrigée par le procédé indiqué (une seule correction)

SD la valeur de la somme effectuée en double précision.

Les calculs ont été faits pour *N* variant de 100 à 500, par pas de 100.

	<i>N</i>	100	200	300	400	500
σ_1	<i>S</i>	5,187 340	5,877 946	6,282 538	6,569 756	6,792 601
	<i>SC</i>	5,187 377	5,878 030	6,282 662	6,569 928	6,729 822
	<i>SD</i>	5,187 377	5,878 030	6,282 663	6,569 929	6,792 822
σ_2	<i>S</i>	1,634 939	1,639 858	1,641 470	1,642 253	1,642 706
	<i>SC</i>	1,634 983	1,639 946	1,641 605	1,642 437	1,642 936
	<i>SD</i>	1,634 983	1,639 946	1,641 606	1,642 437	1,642 936
σ_3	<i>S</i>	0,688 1702	0,690 6486	0,691 4758	0,691 8888	0,692 1354
	<i>SC</i>	0,688 1722	0,690 6534	0,691 4833	0,691 8988	0,692 1481
	<i>SD</i>	0,688 1722	0,690 6534	0,691 4833	0,691 8987	0,692 1482
σ_4	<i>S</i>	0,8224151	0,8224491	0,8224530	0,8224527	0,8224512
	<i>SC</i>	0,8224175	0,8224546	0,8224615	0,8224639	0,8224650
	<i>SD</i>	0,8224175	0,8224545	0,8224614	0,8224639	0,8224650

La lecture des résultats montre que tous les chiffres de la somme corrigée *SC* sont significatifs, une éventuelle différence entre les derniers chiffres de *SC* et *SD* provenant de la conversion des résultats en décimal, comme nous l'avons vérifié en effectuant la sortie de *S*, *SC*, *SD* en hexadécimal.

V. Conclusion et generalisation

Dans les cas où il est nécessaire d'obtenir des résultats extrêmement précis, la méthode exposée ci-dessus peut être employée, soit seule avec un nombre suffisant d'itérations, soit combinée à la double précision pour rendre plus rapidement significatifs tous les chiffres du résultat.

Nous avons effectué l'étude précédente avec l'hypothèse que la règle d'arrondi définissant l'arithmétique à virgule flottante, était une règle de troncature avec chiffre de garde. Les résultats obtenus peuvent se formaliser et se généraliser [2], avec quelques modifications à de nombreuses arithmétiques à virgule flottante.

Ainsi:

1) Si l'addition en virgule flottante est définie de même qu'en I, mais si, lors du cadrage final, on utilise, au lieu de la troncature, les possibilités d'arrondi (un nombre étant arrondi au nombre flottant de valeur absolue supérieure si le $(s+1)^{\text{ème}}$ chiffre de sa mantisse est supérieur ou égal à $b/2$), on a les résultats suivants:

Dès que E vérifie (7), E est représentable par un nombre à virgule flottante et si $b=2$ ou $b=3$, $E = -(SF \ominus X_1 \ominus X_2)$; cette expression n'est plus valable pour une base quelconque, et doit être remplacée par une expression plus compliquée, mais une condition suffisante de convergence de l'algorithme défini en III est encore établie de la même façon.

2) Si la règle d'arrondi définissant l'addition, est une règle de troncature sans chiffre de garde:

L'erreur E n'est plus donnée par l'expression $-(SF \ominus X_1 \ominus X_2)$; cependant, dès que E vérifie (7), E est représentable à l'aide d'opérations en virgule flottante, et (8) devient:

$$|E| < b^{P-s} \quad \text{où} \quad P = \max \{ \mathcal{E}(SF), \mathcal{E}(X_1), \mathcal{E}(X_2) \}.$$

La convergence de l'algorithme de correction d'une somme est dans ce cas, assurée dès que $N \leq b^{s-2}$.

Références

1. I.B.M.: Systems reference library. I.B.M. System/360. Principles of operations, 1968, pp. 41—50.
2. Pichat, M.: Séminaire d'analyse numérique Mai, 1972. Université scientifique et médicale de Grenoble I.

M. Pichat
Conservatoire National des Arts et Métiers
292, rue Saint-Martin — Paris 3e

Service de Mathématiques appliquées
Cedex 53, 38 — Grenoble — Gare
France