Aus dem Institut für Theoretische Physik der Freien Universität Berlin

Erweiterte Gravitationstheorie und Periheldrehung

Berichtigung und Ergänzungen zu Z. Physik **140**, 524 (1955)

Von

KURT JUST

(Eingegangen am 20. Dezember 1955)

In dem Beitrag „Zur Planetenbewegung bei veränderlicher Gravitationszahl“ [9] wurde die von HECKMANN [4] gefundene strenge Lösung (das Analogon der SCHWARZSCHILDschen) auf alle Formen der erweiterten Gravitationstheorie von JORDAN [7] und LUDWIG [12] ausgedehnt. Bei der anschließenden Berechnung der Periheldrehung wurde jedoch fälschlich vorausgesetzt, daß weiterhin wie bei EINSTEIN das „geodätische Prinzip“ gilt.

Deshalb wird — nach einer zusammenhängenden Herleitung des HECKMANNschen Feldes — die hier geltende *Bewegungsgleichung* eines makroskopischen Probekörpers aufgestellt und damit das KEPLER-Problem in der üblichen Näherung vollständig durchgerechnet. Die neue Formel der *Periheldrehung* ist etwas komplizierter als die in [9] gefundene; sie wird diskutiert für die JORDANSchen Feldgleichungen (B), die vom Verfasser [8] vertretenen (F) und die kürzlich von LUDWIG [13] vorgeschlagenen (Q). Schließlich wird gezeigt, bei welcher Beziehung zwischen den *Materiefeldern* alle statischen Lösungen gleich sind denen der ursprünglichen Theorie EINSTEINS mit konstanter Gravitationszahl.

Die Lichtablenkung am Sonnenrande und die solare Rotverschiebung sollen hier nicht behandelt werden. Denn 1. sind es keine rein makroskopischen Effekte, 2. gibt es noch keine eindeutige Bestätigung oder Widerlegung durch die Erfahrung, und 3. ergibt eine im Sinne von JORDAN [7] erweiterte Theorie, wenn sie die EINSTEINSche Periheldrehung liefert, auch für jene Effekte die EINSTEINSchen Formeln.

1. Variationsprinzip und Feldgleichungen

Das allgemeine Variationsprinzip (D) der erweiterten Gravitationstheorie von JORDAN [7] und LUDWIG [12] lautet nach 9(1):

$$\text{mit} \quad \left. \begin{aligned} \delta \int \kappa^e (\sqrt{-g} G + \kappa \mathfrak{L}) d\mathfrak{X} &= 0 \\ G &\stackrel{\text{def}}{=} R + s \sigma^{\nu\mu} \sigma_{\nu\mu}, \quad \sigma \stackrel{\text{def}}{=} \ln \kappa. \end{aligned} \right\} \quad (1) D$$

Hierin ist $R \stackrel{\text{def}}{=} R^\nu_\nu$ der vierdimensionale Krümmungsskalar, $\kappa = e^\sigma$ die als neue Feldfunktion dienende *Gravitationszahl* und $\mathfrak{L}$ die LAGRANGE-Dichte des MAXWELL-Feldes und der Materie:

$$\mathfrak{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sqrt{-g} F_{\nu\mu} F^{\nu\mu} + \mathfrak{M}. \quad (2)$$

Alle Indizes sollen von 1 bis 4 laufen, Formelnummern aus [9] kennzeichnen wir durch eine vorangestellte 9 und die verschiedenen Formen des Ansatzes (1) unterscheiden wir nach [8] durch große Buchstaben.

Aus (1) ergeben sich nach einiger Umrechnung die *Feldgleichungen*:

$$\left. \begin{aligned} R_{\beta}^{\alpha} + c \sigma^{\alpha}{}_{||\beta} + (c^2 + s) \sigma^{\alpha} \sigma_{|\beta} + \kappa T_{\beta}^{\alpha} + \\ + \frac{1}{2} (c \sigma^{\nu}{}_{||\nu} + c^2 \sigma^{\nu} \sigma_{|\nu} - \kappa T) \delta_{\beta}^{\alpha} = 0 \\ \text{und} \\ (2s + 3c^2) (\sigma^{\nu}{}_{||\nu} + c \sigma^{\nu} \sigma_{|\nu}) = \kappa (b + c T), \end{aligned} \right\} \quad (3) D$$

und mit (2) folgt die erweiterte MAXWELL-Gleichung:

$$F^{\alpha\nu}{}_{||\nu} + (1 + c) \sigma_{\nu} F^{\alpha\nu} = j^{\alpha} \quad \text{mit} \quad F_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{\beta|\alpha} - \varphi_{\alpha|\beta}. \quad (4) D$$

Die Quell-Funktionen T_{β}^{α} und j^{α} sowie b sind erklärt durch die Variationsableitungen:

$$\left. \begin{aligned} \kappa^{1+c} \sqrt{-g} T^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} - \frac{\delta}{\delta g_{\alpha\beta}} (\kappa^{1+c} \mathfrak{L}), \\ \kappa^{1+c} \sqrt{-g} j^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \varphi_{\alpha}} (\kappa^{1+c} \mathfrak{M}) \end{aligned} \right\} \quad (5) D$$

und

$$\boxed{\kappa^c \sqrt{-g} b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta}{\delta \kappa} (\kappa^{1+c} \mathfrak{L})}, \quad (6) D$$

mit (2) wird also

$$\left. \begin{aligned} T_{\beta}^{\alpha} &= F^{\alpha\nu} F_{\beta\nu} - \frac{1}{4} F^{\nu\mu} F_{\nu\mu} \delta_{\beta}^{\alpha} + T_{\beta}^{\alpha m} \\ \text{und} \\ b &= \frac{1}{2} (1 + c) F^{\nu\mu} F_{\mu\nu} + b_{\text{mat}}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

In (7)^I werden wir den *Materie-Beitrag* annähern durch den üblichen Ausdruck für die ideale Flüssigkeit mit der Dichte ε und dem Druck p :

$$T_{\beta}^{\alpha m} = (\varepsilon + p) v^{\alpha} v_{\beta} + p \delta_{\beta}^{\alpha}; \quad (8)$$

über den Beitrag b_{mat} der Materie zu (7)^{II} ist dagegen nichts weiter bekannt. Deshalb soll hier nicht versucht werden, weitere Spekulationen über b an seine Definition (6) anzuschließen, sondern aus einem vorgegebenen b die beobachtbaren Folgerungen zu ziehen.

Unsere jetzige Definition (6) von b unterscheidet sich von den in [9] und [10] gebrauchten um den Faktor 2, sie hängt also mit jenem b_{alt} , dem in [8] benutzten $\tilde{b}$ und dem in (17.8) von LUDWIG [12] stehenden ($b = b_L$) wie folgt zusammen

$$b_{\text{neu}} = 2 b_{\text{alt}} = \frac{1}{\kappa} \tilde{b} = \frac{2}{(2\kappa)^c} (b^{(e)} + b)_L. \quad (9) D$$

Nach (12.22) und (15.4) von LUDWIG [12] hat der *fünfdimensionale Materietensor* unter anderem die Komponenten:

$$S_0^0 = 2(2\kappa)^{\frac{1}{2}} b_L = (2\kappa)^{c+\frac{1}{2}} b_{\text{mat}}, \quad S_{\beta}^{\mu} = -(2\kappa)^{c+\frac{1}{2}} T_{\beta}^{\mu m} \quad (10) D$$

[hier und in (9) beachte man $U = J^\alpha$ mit $J = 2\kappa$ und $\alpha = c - \frac{1}{2}$]; und nehmen wir nach einer *Hypothese* von LUDWIG [13] an, daß die Spur dieses Tensors verschwinde:

$$\left. \begin{aligned} S_0^0 + S_\nu^\nu &= 0, \\ b &= T + \frac{1}{2}(1+c)F^{\nu\mu}F_{\nu\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (11) D$$

wobei $T \stackrel{\text{def}}{=} T_\nu^\nu = T_\nu^{\nu m}$ beachtet wurde.

Aus (3) oder unmittelbar aus (1) folgt, daß die Materie-Funktionen (5) und (6) verknüpft sind durch

$$T_{\alpha||\nu}^\nu + (1+c)\sigma_{|\nu} T_\alpha^\nu + \frac{1}{2}\sigma_{|\alpha} b = 0. \quad (12) D$$

Dies stellt eine Erweiterung des bekannten „Erhaltungssatzes“ $T_{\alpha||\nu}^\nu = 0$ dar, sollte jedoch hier lieber als „Änderungs-Gesetz“ des *Energietensors* T_α^ν bezeichnet werden.

2. Die wichtigsten Sonderfälle

Für die Konstanten c und s soll im Falle (B) von JORDAN [7] gelten:

$$c = 1 \quad \text{und} \quad \zeta = -s \approx 30. \quad (13) B$$

Das vom Verfasser [8] vorgeschlagene Variationsprinzip (F) lautet dagegen:

$$\delta \int (\sqrt{-g} \overset{5}{R} + \kappa \mathfrak{M}) d\mathfrak{X} = 0, \quad (14) F$$

wobei $\overset{5}{R}$ der *fünfdimensionale Krümmungs-Skalar* (11.19) der projektiven Relativitätstheorie [12] ist:

$$\overset{5}{R} = R + \sigma_{|\nu}^{\nu} + \frac{1}{2}\sigma_{|\nu}^{\nu} \sigma_{|\nu}^{\nu} + \frac{1}{2}\kappa F^{\nu\mu} F_{\nu\mu}. \quad (15)$$

Hiervon spielt $\sigma_{|\nu}^{\nu}$ in (14) keine Rolle, weil die „Randintegrale“ der Variation verschwinden sollen; deshalb folgt (14) aus (1) durch die eindeutige *Parameter-Wahl*:

$$\boxed{c = 0, \quad s = \frac{1}{2}}. \quad (16) F$$

Aus (3) und (6) wird also hier

$$\left. \begin{aligned} R_\beta^\alpha + \frac{1}{2}\sigma_{|\beta}^{\alpha} \sigma_{|\beta}^{\alpha} + \kappa(T_\beta^\alpha - \frac{1}{2}T\delta_\beta^\alpha) &= 0 \quad \text{mit} \quad \sigma = \ln \kappa \\ \text{und} \quad \sigma_{|\nu}^{\nu} &= \kappa b \quad \text{mit} \quad \sqrt{-g} b = \frac{\delta}{\delta \kappa}(\kappa \mathfrak{L}). \end{aligned} \right\} \quad (17) F$$

Besonders in diesem Falle (F) hat die neuartige *Materie-Funktion* b eine entscheidende Bedeutung für die erweiterte Gravitations-Theorie. Denn würde b in der gesamten Raum-Zeit-Welt verschwinden:

$$b \equiv 0, \quad \text{also} \quad \sigma_{|\nu}^{\nu} \equiv 0, \quad (18) F$$

dann wäre es physikalisch sinnlos, überhaupt mit einer veränderlichen Gravitationszahl $\kappa = e^\sigma$ zu rechnen [bei statischen Lösungen ist $\sigma_{|\nu} \neq 0$, wie wir bei (84) zeigen werden, sogar streng mathematisch mit (18) unvereinbar].

Auch bei einem MAXWELLSchen Felde $F_{\nu\mu} \neq 0$ pflegt man ja anzunehmen, daß es von einem irgendwo in der Raum-Zeit-Welt von Null verschiedenen Strome j_α herrührt, obwohl rein mathematisch auch „vagabundierende Felder“ $F_{\nu\mu} \neq 0$ mit $F^{\alpha\nu}_{|\nu} \equiv 0$ möglich wären (eine Arbeit von WHEELER [17] steht allerdings im Gegensatz zu dieser Auffassung). Ebenso wollen wir daher als sinnvolle Lösung von (18) nur gelten lassen:

$$\sigma_{|\nu} = 0, \quad \text{also} \quad \kappa = \text{const.} \quad (19) F$$

Hiermit geht aber (17) streng in die ursprüngliche Form der EINSTEINSchen Feldgleichungen über, so daß wir alle Abweichungen der „erweiterten Gravitationstheorie“ von der EINSTEINSchen letzten Endes auf b zurückführen müssen. Deshalb ist es um so bedauerlicher, daß wir bisher nichts Sicheres über b wissen, ja nicht einmal sein Vorzeichen bestimmen konnten.

Ein weiteres Variationsprinzip, das von LUDWIG [13] vorgeschlagen wurde, soll hier mit (Q) bezeichnet werden:

$$\delta \int (\sqrt{-g} \kappa^{-1} R + \mathfrak{M}) d\mathfrak{x} = 0; \quad (20) Q$$

mit (1) stimmt dies [wegen (15) und nach einer partiellen Integration] überein im Falle

$$\boxed{c = -1, \quad s = \frac{3}{2}}. \quad (21) Q$$

Diese neue Parameterwahl (Q) soll nach LUDWIG [13] helfen, die bisherigen Schwierigkeiten einer Theorie der *Materie-Entstehung* zu beseitigen. Weil nämlich in (20) die LAGRANGE-Dichte $\mathfrak{M}$ ohne von κ abhängigen Faktor steht, lassen sich die Materie-Felder mit den bekannten Methoden *quantisieren*, was ansonsten in der erweiterten Gravitationstheorie wegen des veränderlichen κ unmöglich ist. Hier wird sich ferner zeigen, daß der Ansatz (20) am einfachsten in Einklang mit der Erfahrung zu bringen ist, wenn man gleichzeitig die LUDWIGSche *Hypothese* (11) einer verschwindenden Spur des fünfdimensionalen Materietensors annimmt. In diesem Falle gehen die Feldgleichungen (3) und der neue Energiesatz (12) durch (21) über in

$$\left. \begin{aligned} R^\alpha_\beta - \sigma^\alpha_{||\beta} + \frac{5}{2} \sigma^\alpha_{|\alpha} \sigma_{|\beta} + \kappa (T^\alpha_\beta - \frac{1}{2} T \delta^\alpha_\beta) &= 0, \\ \sigma^\nu_{||\nu} = \sigma^\nu_{|\alpha} \sigma^\alpha_{|\nu}, \quad T^\nu_{\alpha||\nu} + \frac{1}{2} \sigma_{|\alpha} T &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22) Q$$

3. Die HECKMANNsche Lösung

Im Anschluß an HECKMANN [4] hatten wir mit dem Ansatz 9(10):

$$ds^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - e^{\nu(r)} dt^2 \quad (23)$$

das Analogon der SCHWARZSCHILDschen Lösung aufgestellt (statisch kugelsymmetrisches Vakuumfeld); im allgemeinen Falle (D) gilt für dieses nach 9(17) bis 9(19):

$$e^{-\lambda} = 1 - (1 + 2c\beta) \frac{2m}{r} + \frac{1}{2}\beta(s\beta - c) \left(\frac{2m}{r}\right)^2 + \dots, \quad (24) D$$

$$e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r} - c\beta \left(\frac{2m}{r}\right)^2 + \dots, \quad \kappa = \kappa_{\infty} e^{\beta\nu}. \quad (25) D$$

Bei der folgenden, zusammenhängenden Herleitung dessen ist der Gedankengang natürlich mit dem von HECKMANN [4] identisch, doch sollen die dortigen Formeln nicht explizit benutzt werden, weil dies den Übergang von 9(16) zu 9(18) etwas schwer verständlich machte.

Nach 9(11) bis 9(15) liefert (3) mit dem Ansatz (23) im Falle des Vakuums:

$$\frac{\nu' - \lambda'}{2} + \frac{\nu''}{\nu'} + \frac{2}{r} + c\sigma' = 0, \quad (26) D$$

$$\frac{\nu' - \lambda'}{2} + \frac{1}{r} (1 - e^{\lambda}) + c\sigma' = 0, \quad (27) D$$

$$\nu' + \lambda' + 2c\sigma' + r(c\nu' - s\sigma')\sigma' = 0 \quad (28) D$$

sowie

$$\sigma' = \beta\nu' \quad \text{mit} \quad \beta = \text{const}; \quad (29) D$$

das letztere führt wegen $\sigma = \ln \kappa$ sogleich zum Beweis von (25)^{II}.

Aus (26) und (28) folgt mit (29):

$$r \frac{\nu''}{\nu'} + 2 + (1 + 2c\beta) r \nu' + \frac{1}{2}\beta(c - s\beta) (r\nu')^2 = 0,$$

und beachten wir

$$\frac{d}{d\nu} (r\nu') = r \frac{\nu''}{\nu'} + 1, \quad (30)$$

so wird daraus

$$\left. \begin{aligned} d(r\nu') &= \left\{ \frac{1}{2}A(r\nu')^2 - B r \nu' - 1 \right\} d\nu \\ \text{mit} \quad A &= \beta(s\beta - c), \quad B = 1 + 2c\beta. \end{aligned} \right\} \quad (31) D$$

Lösen wir dies nach $d\nu$ auf, dann liefert die Integration:

$$\left. \begin{aligned} 2h(\nu - \nu_0) &= \ln(B - A r \nu' + 2h) - \ln(B - A r \nu' - 2h) \\ \text{mit} \quad (2h)^2 &= B^2 + 2A \quad \text{und} \quad e^{2h\nu_0} = \frac{B - 2h}{B + 2h}, \\ \text{also} \quad A r \nu' &= B - 2h \mathfrak{E} \mathfrak{t} \mathfrak{g}[(\nu - \nu_0)h], \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

wobei wir die Integrationskonstante ν_0 so bestimmt haben, daß für $r\nu' \rightarrow 0$ auch $\nu \rightarrow 0$ geht.

Aus (26) und (27) folgt mit (30) und (32):

$$e^{\lambda} = - \frac{d}{d\nu} (r\nu') = - \frac{2}{A} \left(\frac{h}{\mathfrak{E} \mathfrak{i} \mathfrak{n}[(\nu - \nu_0)h]} \right)^2,$$

also

$$2h e^{-\frac{1}{2}\lambda} = 2h \mathfrak{C} \mathfrak{o} \mathfrak{f}(\nu h) + B \mathfrak{E} \mathfrak{i} \mathfrak{n}(\nu h); \quad (33)$$

und beachten wir nach (31):

$$\frac{1}{2}(B-1) = c\beta,$$

dann liefert die Integration von (26) mit (29):

$$r^2 v' e^{\frac{1}{2}(Bv-\lambda)} = \text{const.}$$

Wegen (32) und (33) folgt hieraus:

$$(r e^{\frac{1}{2}Bv})^{-1} \sim r v' e^{-\frac{1}{2}\lambda} \sim B \mathfrak{E} \ln[(v-v_0)h] - 2h \mathfrak{U}[(v-v_0)h] \sim \mathfrak{E} \ln(vh),$$

mit einer geeigneten Bezeichnung der Konstanten also

$$r \cdot e^{\frac{1}{2}Bv} \mathfrak{E} \ln(vh) = -2mh = \text{const}; \quad (34)$$

in (33) und mit dieser transzendenten Beziehung für v haben wir somit die strenge HECKMANNSche Lösung gefunden.

Die Entwicklung von (33) und (34) nach Potenzen von v liefert:

$$e^{-\frac{1}{2}\lambda} = 1 + \frac{1}{2}(B + h^2 v) v + \dots, \quad 2m \cdot r^{-1} = -v(1 + \frac{1}{2}Bv) + \dots$$

also

$$v = -\frac{2m}{r} \left(1 + B \frac{m}{r}\right) + \mathfrak{O}(r^{-3}),$$

so daß wir erhalten

$$\left. \begin{aligned} e^{-\lambda} &= 1 - B \frac{2m}{r} + (4h^2 - B^2) \left(\frac{m}{r}\right)^2 + \mathfrak{O}(r^{-3}) \\ e^v &= 1 - \frac{2m}{r} + 2(1-B) \left(\frac{m}{r}\right)^2 + \mathfrak{O}(r^{-3}); \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

und setzen wir h^2 und B von (32)^I und (31)^{II} her ein, dann sind (24) und (25)^I bewiesen.

Um die Konstanten m und β zu bestimmen, brauchen wir die Feldgleichungen (3) in der bei 9(27) benutzten Schreibweise*. Wegen 9(28) und 9(25) mit (9) lautet jene hier:

$$\frac{d}{dr} \left\{ r^2 e^{\frac{v-\lambda}{2}} \kappa^c (v' - \eta \sigma') \right\} = \sqrt{-g} \kappa^{1+c} \left\{ \frac{(2s+2c^2-c\eta)T-(c+\eta)b}{2s+3c^2} - 2T_t^t \right\}, \quad (36)D$$

wobei η eine völlig willkürliche Zahl ist. Den Energietensor (7)^I betrachten wir ohne MAXWELL-Feld $F_{\nu\mu}$ und im Ruhsystem der Materie, beachten aber neben der Dichte ε auch den Druck p , setzen also

$$T_{\beta}^{\alpha} = p \delta_{\beta}^{\alpha} \quad \text{außer} \quad T_t^t = -\varepsilon;$$

dann lautet (36) mit (29) nach Integration über den felderzeugenden Zentralkörper:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi r^2 \kappa^c e^{\frac{1}{2}(v-\lambda)} (1-\eta\beta) v'(r) \Big|_0^R &= \int_0^R \sqrt{-g} \kappa^{1+c} I dx \\ \text{mit} \quad (2s+3c^2)I &= (2s+4c^2+c\eta)\varepsilon + 3(2s+2c^2-c\eta)p - (c+\eta)b. \end{aligned} \right\} \quad (37)D$$

* Deren in Z. Physik 142, 493 (1955) erfolgte Herleitung läßt sich, wie bei späterer Gelegenheit gezeigt werden soll, noch erheblich vereinfachen.

Da außerhalb der Oberfläche $R=R_0$ Vakuum herrschen soll, dürfen wir $R \rightarrow \infty$ gehen lassen, daher liefert (37) mit (25) wegen des willkürlichen η :

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} (2s + 3c^2) m &= 2(s + 2c^2) (\varepsilon) + 6(s + c^2) (p) - c(b) \\ \beta \cdot (2s + 3c^2) m &= c(3p - \varepsilon) + (b) \end{aligned} \right\} \quad (38) D$$

mit der Abkürzung

$$(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{8\pi} \int_0^{R_0} \sqrt{-g} \, \varepsilon \, \kappa \left(\frac{\kappa}{\kappa_\infty} \right)^c d\tilde{x} \quad (39) D$$

[von 9(31) unterscheidet sich letztere durch den Faktor $\kappa(\kappa/\kappa_\infty)^c$ im Integranden].

4. Die neue Bewegungsgleichung

Zur eigentlichen Berechnung der *Periheldrehung* 9(21) hatten wir mit JORDAN [7] S. 169 vorausgesetzt, daß sich der Planet auf einer *geodätischen Linie* im Felde der Sonne bewegt; dies ist jedoch *nicht immer richtig*. Nach der allgemeinen Relativitätstheorie weicht die Bewegung eines *makroskopischen Probekörpers* nur dann von einer geodätischen ab, wenn er außer der *Masse* (Raumintegral über seine Ruhdichte) noch eine elektrische *Ladung* trägt (Integral über die Ruhladung). Hier aber ist noch ein *weiterer Materialfaktor* von Bedeutung, nämlich das Raumintegral über die neuartige Materiefunktion b .

Mit den Ansätzen (7) lautet (12), wenn man wie üblich den Beitrag des Feldes $F_{\alpha\beta}$ mit Hilfe der MAXWELLSchen Gln. (4) vereinfacht:

$$(\kappa^{1+c} T_{\beta}^{\alpha})_{||\alpha} + \kappa^{1+c} (\tfrac{1}{2} \sigma_{|\beta} b_{\text{mat}} + F_{\alpha\beta} j^{\alpha}) = 0. \quad (40) D$$

Daraus bilden wir nach bekannten Regeln

$$\left. \begin{aligned} (\sqrt{-g} \kappa^{1+c} T^{\alpha\nu})_{||\nu} + \sqrt{-g} \kappa^{1+c} K^{\alpha} &= 0 \\ K^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} F_{\nu\mu}^{\alpha} T^{\nu\mu} + \tfrac{1}{2} \sigma^{|\alpha} b_{\text{mat}} + F^{\nu\alpha} j_{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (41) D$$

und dies integrieren wir über ein Element der vom betrachteten Körper beschriebenen „Weltröhre“:

$$\int \sqrt{-g} \kappa^{1+c} T^{\alpha t} d\tilde{x}^3 \Big|_t^{t+dt} + dt \int \sqrt{-g} \kappa^{1+c} K^{\alpha} d\tilde{x}^3 = 0.$$

Bei der hier bereits ausgeführten partiellen Integration verbleiben als Randintegrale nur die über zwei raumartige Querschnitte, auf denen wir $t = \text{const}$ angenommen haben. Für die dreidimensionalen Integrale über die Materie wollen wir auch beim *Probekörper* die Abkürzung (39) benutzen; um sie jedoch auf das *Ruhvolumen* zu beziehen, müssen wir

vorher von $d\vec{x}$ den Faktor $d\tau/dt$ der „LORENTZ-Kontraktion“ abspalten (mit τ = Eigenzeit):

$$\frac{d}{d\tau} \left(T^{\alpha t} \frac{d\tau}{dt} \right) + (K^\alpha) = 0. \quad (42) D$$

Mit Hilfe von (41) erhalten wir ferner:

$$(\sqrt{-g} \kappa^{1+c} x^\alpha \overset{m}{T}{}^{\beta v})|_v = \sqrt{-g} \kappa^{1+c} (\overset{m}{T}{}^{\beta \alpha} - x^\alpha K^\beta),$$

und behandeln wir dies in derselben Weise wie (41), dann folgt statt (42):

$$\frac{d}{d\tau} \left(x^\alpha \overset{m}{T}{}^{\beta t} \frac{d\tau}{dt} \right) = (\overset{m}{T}{}^{\beta \alpha} - x^\alpha K^\beta); \quad (43) D$$

auch hier sind die Integrale bei konstanter Zeit $x^4 = t$ über den dreidimensionalen Raum des Probekörpers zu erstrecken. Machen wir nun die entscheidende Voraussetzung, daß bei passender Koordinaten-Wahl die ein x^α enthaltenden Integrale bedeutungslos werden, weil der *Probekörper entweder kugelsymmetrisch oder genügend klein* ist, so vereinfacht sich (43) zu

$$(\overset{m}{T}{}^{\beta \alpha}) = v^\alpha (\overset{m}{T}{}^{\beta t}) \frac{d\tau}{dt} \quad \text{mit} \quad v^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (44) D$$

Weil in (23) das zeitartige Linienelement ds eines materiellen Körpers als imaginär angesetzt wurde, haben wir die reelle *Eigenzeit* mit τ bezeichnet; für die *Vierergeschwindigkeit* gilt daher

$$v_\nu v^\nu = (ds/d\tau)^2 = -1. \quad (45)$$

Durch zweimalige Anwendung von (44) erhalten wir schließlich:

$$\left. \begin{aligned} (\overset{m}{T}{}^{\alpha \beta}) &= v^\alpha v^\beta \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 (\overset{m}{T}{}^{t t}) = v^\alpha v^\beta (\varepsilon), \\ \text{wobei gesetzt wurde} \quad \overset{m}{T}{}^{t t} &= \varepsilon v^t v^t. \end{aligned} \right\} \quad (46) D$$

Das letztere kann durch Übergang zum Ruhssystem aus (8) gefolgert werden, bei allgemeineren Ansätzen für $\overset{m}{T}{}^\alpha_\beta$ aber ist es als *bloße Definition von ε* anzusehen. Eine physikalische Aussage ist darin nicht enthalten, denn wir werden erst später finden, wie sich das so erklärte (ε) im Laufe der Bewegung ändert.

Wir setzen nun voraus, daß sich ebenso wie die v^α auch die Funktionen $\Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ und σ^α sowie F^α_β des äußeren Feldes innerhalb jedes Querschnittes $\int d\vec{x}$ der „Weltröhre“ nicht merklich ändern und daß die „Eigenfelder“ des Probekörpers keinen Einfluß auf die Bewegung haben (keine Strahlungseffekte). Dann lautet (42) mit (41)^{II} und (46):

$$\frac{d}{d\tau} (\varepsilon v^\alpha) + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} v^\nu v^\mu (\varepsilon) + \frac{1}{2} \sigma^{|\alpha} (b) + F^{\nu\alpha} v_\nu (\varepsilon) = 0, \quad (47) D$$

wobei wir j^α als *Konvektionsstrom* angesetzt haben mit ρ als Ruhdichte der Ladung: $j^\alpha = \rho v^\alpha$.

Daß wir in (47) statt b_{mat} wieder b geschrieben haben, geschah aus folgendem Grunde: Den Beitrag $\frac{1}{2}(1+c)F_{\nu\mu}F^{\nu\mu}$ des MAXWELL-Feldes zu b haben wir zwar in (7) getrennt vom übrigen b_{mat} behandelt [er lieferte daher in (40) nur zum letzten Gliede einen Beitrag], wegen unserer durchgehend makroskopischen Betrachtungsweise konnte diese Abspaltung aber nur für den makroskopischen Anteil von $F_{\nu\mu}$ erfolgen. Die hier nicht beachteten, weil viel zu stark veränderlichen Felder (hauptsächlich elektrostatische), die im Inneren des Probekörpers die chemische Bindung bewirken, liefern also bei $1+c \neq 0$ auch einen Beitrag zu dem, was in (7) bis (41) mit b_{mat} bezeichnet ist, obwohl dessen Hauptanteil vermutlich von den Kernkräften herrühren wird.

Schreiben wir zur Abkürzung

$$dg/d\tau = g_{|v} v^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \dot{g} \quad (48)$$

sowie

$$(b) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(\varepsilon) \quad \text{und} \quad (\rho) \stackrel{\text{def}}{=} k(\varepsilon) \quad (49)$$

[das γ aus 9(34) war das $(-\frac{1}{2})$ -fache des jetzigen], dann lautet (47):

$$v^\alpha(\varepsilon)^\bullet + (v^\alpha_{|v} v^\nu + \frac{1}{2}\gamma\sigma'^\alpha + kF^{\nu\alpha}v_\nu)(\varepsilon) = 0, \quad (50)$$

denn mit (48) ist

$$v^\alpha_{|v} v^\nu = \dot{v}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} v^\nu v^\mu. \quad (51)$$

Wegen (45) und (48) liefert (50):

$$(\varepsilon)^\bullet = \frac{1}{2}\gamma\dot{\sigma}(\varepsilon),$$

wobei $v^\alpha_{|v} v_\alpha = \frac{1}{2}(v^\alpha v_\alpha)_{|v} = 0$ und die Antisymmetrie des MAXWELL-Feldes benutzt wurden; daher lautet (50) schließlich:

$$\boxed{v^\alpha_{|v} v^\nu + \frac{1}{2}\gamma(\sigma'^\alpha + \dot{\sigma}v^\alpha) = kF^{\alpha\nu}v_\nu}. \quad (52)$$

Es sei hervorgehoben, daß obige Herleitung der Bewegungsgleichung nur für einen Körper gelten soll, der wirklich groß genug ist für *makroskopische* Beschreibung. Andererseits muß er verschwindend klein sein gegen den felderzeugenden Zentralkörper, denn wir hatten ja den Einfluß seines eigenen Gravitations- und MAXWELL-Feldes ganz vernachlässigt. Daher gilt (52) in guter Näherung für einen Planeten im Felde der Sonne oder einen irdischen Gegenstand im Felde der Erde, beansprucht jedoch keine Richtigkeit für ein Elementarteilchen oder für die Komponenten eines Doppelsternes. Beim ersteren besteht noch längst keine Klarheit darüber, ob man es bei Herleitung einer Bewegungsgleichung als Singularität des Feldes nach INFELD und SCHILD [5] oder wie LUDWIG [12] S. 80 als „Wellenpaket“ behandeln soll; das ausgesprochene Zweikörperproblem (Doppelstern) aber würde sehr umständliche Näherungsrechnungen [15] erfordern. Die oben angewandte Methode geht schon auf WEYL und EDDINGTON [16] zurück, von PAPAPETROU [14] wurde sie auf einen nicht kugelsymmetrischen Probekörper erweitert.

Unser Ergebnis (52) unterscheidet sich von der Gleichung $v^\alpha_{|v} v^\nu = 0$ einer geodätischen Linie nicht nur durch die bekannte LORENTZ-Kraft

$kF^{\alpha\nu}v_\nu$ mit der spezifischen Ladung k , vielmehr erfährt auch ein elektrisch neutraler Probekörper ($k=0$) eine *Zusatzkraft*. Wegen (45) und (48) ist diese *orthogonal zur Vierergeschwindigkeit* v^α , ebenso wie die beiden anderen Glieder von (52). Ihr Faktor γ ist nach (49) eine *Materialgröße* von derselben Art wie die spezifische Ladung k , so daß hiermit sogar das GALILEISCHE Fallgesetz außer Kraft gesetzt ist: In einem Felde mit veränderlicher Gravitationszahl $\kappa=e^\sigma$ könnte die Gleichheit von schwerer und träger Masse aufgehoben sein. In einer folgenden Arbeit soll untersucht werden, wie sich dies auswirken müßte auf die Experimente von EÖTVÖS [3]; daraus werden wir dann folgern müssen, daß in (52) das Zusatzglied mit γ entweder wegen seiner Kleinheit völlig bedeutungslos oder doch vom Material des Probekörpers unabhängig sein muß.

Eine Abhängigkeit von der Wahl der Feldgleichungen zeigt (52) formal nur darin, daß γ und k nach (49) und (39) den Parameter c enthalten (s jedoch nicht), tatsächlich werden aber die äußeren Felder $I_{\nu\mu}^\alpha$ und σ^α wesentlich von c und s abhängen. Analog dazu, daß die LORENTZ-Kraft nur in einem MAXWELL-Felde $F_{\alpha\beta} \neq 0$ wirksam ist, tritt die neuartige Zusatzkraft nur bei veränderlicher Gravitationszahl $\kappa=e^\sigma$ auf ($\sigma_{;\nu} \neq 0$). Sie verschwindet auch dann, wenn $b=0$ ist; unter dieser von JORDAN [7] durchwegs angenommenen *Hypothese* ist daher auch seine Annahme einer unveränderten Bewegungsgleichung berechtigt.

5. Das KEPLER-Problem

Hier betrachten wir die Metrik (23) innerhalb der Ebene $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$:

$$ds^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\varphi^2 - e^{\nu(r)} dt^2 \quad (53)$$

und verwenden die Bewegungsgleichung (52) mit (51) und $k=0$, also für einen elektrisch neutralen, makroskopischen Probekörper:

$$\dot{v}^\alpha + I_{\nu\mu}^\alpha v^\nu v^\mu + \frac{1}{2}\gamma(\dot{\sigma} v^\alpha + \sigma'^\alpha) = 0. \quad (54)$$

Für (53) lauten zwei Komponenten von (54):

$$\dot{v}^\varphi + (2r^{-1} + \frac{1}{2}\gamma\sigma') v^\varphi v^r = 0, \quad \dot{v}^t + (\nu' + \frac{1}{2}\gamma\sigma') v^t v^r = 0, \quad (55)$$

wobei wir beachtet haben, daß ebenso wie λ und ν auch σ nur von r abhängt:

$$\sigma_{|\varphi} = \sigma_{|t} = 0, \quad \dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dr} \frac{dr}{d\tau} = \sigma' v^r.$$

Nach (29) aber gilt im HECKMANNschen Felde stets

$$\sigma' = \kappa^{-1}\kappa' = \beta\nu' \quad \text{mit} \quad \beta = \text{const},$$

für (55) können wir daher schreiben:

$$dv^\varphi + v^\varphi(2r^{-1} + \frac{1}{2}\gamma\beta\nu') dr = 0, \quad dv^t + v^t(1 + \frac{1}{2}\gamma\beta)\nu' dr = 0,$$

also

$$r^2 v^{\varphi} = D e^{-\frac{1}{2}\gamma\beta\cdot v}, \quad v^t = E e^{-(1+\frac{1}{2}\gamma\beta)v} \quad \text{mit } D, E = \text{const}, \quad (56)$$

wobei wir nur außer acht gelassen haben, daß sich auch der Materialfaktor γ des Probekörpers längs seiner Bahn ein wenig ändern könnte.

Durch (56) und (45) geht (53) über in

$$e^{\lambda} \dot{r}^2 + (D^2 r^{-2} - E^2 e^{-v}) e^{-\gamma\beta\cdot v} + 1 = 0$$

oder

$$e^{\lambda} \left(\frac{D}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{D}{r} \right)^2 - E^2 e^{-v} + e^{\gamma\beta\cdot v} = 0;$$

und setzt man wie üblich

$$u \stackrel{\text{def}}{=} r^{-1}, \quad u' \stackrel{\text{def}}{=} du/d\varphi,$$

so wird

$$u'^2 e^{\lambda} + u^2 + (e^{\gamma\beta\cdot v} - E^2 e^{-v}) D^{-2} = 0. \quad (57)$$

Schreiben wir nun

$$e^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n, \quad e^{-\lambda-v} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n, \quad e^{\gamma\beta\cdot v} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n u^n,$$

so liefern (24) und (25):

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 = k_0 = 1, \\ a_1 &= -2(1 + 2c\beta)m, \quad b_1 = -4c\beta m, \quad k_1 = a_1 - 2\gamma\beta m, \\ a_2 &= 2(s\beta - c)\beta m^2, \quad b_2 = 2(s\beta - 3c)\beta m^2, \\ k_2 &= 2[\gamma(1 + \gamma\beta + 2c\beta) + s\beta - c]\beta m^2, \end{aligned} \quad (58) D$$

und (57) lautet näherungsweise:

$$u'^2 - 2Gu + (1 + 2H)u^2 + a_1 u^3 = (E^2 - 1)D^{-2} \quad (59)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} G &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(b_1 E^2 - k_1) D^{-2} = [1 + \gamma\beta + 2c\beta(1 - E^2)] m D^{-2}, \\ H &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(k_2 - b_2 E^2) D^{-2} = [\gamma(1 + \gamma\beta + 2c\beta) + c(3E^2 - 1) + s\beta(1 - E^2)] \beta m^2 D^{-2}. \end{aligned} \right\} (60) D$$

Für die bei der *Planetenbewegung* in Frage kommenden Werte von r werden wir später finden

$$r \gg D \quad \text{und} \quad Gr \approx 1, \quad (61)$$

nach (60) ist daher

$$D^2 \approx mr, \quad \text{also} \quad H \approx mr^{-1} \ll 1. \quad (62)$$

In (59) liefern demnach Gu und u^2 die „Hauptglieder“ von der Größenordnung r^{-2} , die *Periheldrehung* wird den Gliedern Hu^2 und $a_1 u^3$ der Ordnung mr^{-3} zu verdanken sein, und *vernachlässigt* haben wir Glieder mit $m^2 u^4$ und $(mu)^3 D^{-2}$, die von der Ordnung $m^2 r^{-4}$ wären. Weil die ganze linke Seite von (59) also höchstens die Größenordnung r^{-2} hat, ist $E^2 - 1$ von der Ordnung $D^2 r^{-2} \approx mr^{-1}$; daher dürfen wir in (60) einfach $E^2 = 1$ setzen:

$$G = (1 + \gamma\beta) m D^{-2}, \quad H = (\gamma + 2c) \beta m \cdot G. \quad (63) D$$

Durch Ableitung nach φ liefert (59):

$$u'' - G + (1 + 2H)u + \frac{3}{2}a_1 u^2 = 0,$$

setzen wir also:

$$u = G + w \quad \text{und} \quad N \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{3}{2} a_1 G = 3(1 + 2c\beta) m \cdot G \quad (64) D$$

[letzteres aus (58) entnommen], dann folgt

$$w'' + (1 + 2H - 2N)w + (2H - N)G + \frac{3}{2} a_1 w^2 = 0. \quad (65)$$

Da wir später finden werden

$$|w| \ll G, \quad (66)$$

ist von (65) das Glied mit w^2 klein gegen das konstante und das in w lineare. Vernachlässigen wir es und setzen

$$(1 + 2H - 2N)w + (2H - N)G = (1 - N)G \cdot y,$$

also

$$u = \frac{1 + y}{p} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - N}{1 + 2H - 2N} G,$$

so geht (65) über in $y'' + (1 + 2H - 2N)y = 0$, bei Weglassung höherer Glieder in H und N wird also

$$\text{und} \quad \left. \begin{array}{ll} r = p(1 + y)^{-1} & \text{mit} \quad p = (1 + 2H - N)G^{-1} \\ y'' + \omega^2 y = 0 & \text{mit} \quad \omega \stackrel{\text{def}}{=} 1 + H - N. \end{array} \right\} \quad (67)$$

Schreiben wir die Lösung von (67):

$$y = \varepsilon \cos(\omega \varphi - \lambda_0) \quad \text{mit} \quad \varepsilon, \lambda_0 = \text{const},$$

so erhalten wir:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \lambda)} \quad \text{mit} \quad \lambda = \lambda_0 + (N - H)\varphi, \quad (68)$$

also eine KEPLER-Ellipse mit p als Halbparameter und der numerischen Exzentrizität ε . Für diese gilt bei den fast kreisförmigen Planetenbahnen:

$$0 < \varepsilon \ll 1, \quad (69)$$

und beachten wir

$$|w| : G = |uG^{-1} - 1| \approx |r^{-1}p - 1| < \varepsilon,$$

so sind hiermit (66) und (61)^{II} gerechtfertigt.

Auch bei vorstehenden Rechnungen wurde der Gedankengang von HECKMANN [4] übernommen, und nach der Entwicklung (59) bestand der Unterschied nur noch in den neuartigen Werten der Konstanten.

Für die Umlaufzeit T des Planeten erhalten wir aus (56) wegen $E \approx 1$:

$$r^2 d\varphi/dt = r^2 v^q/v^t \approx D e^r, \quad T = D^{-1} \int_0^{2\pi} r^2 e^{-r} d\varphi,$$

also

$$T = 2\pi \sqrt{a^3 p} D^{-1} \quad \text{mit} \quad a = p(1 - \varepsilon^2)^{-1}, \quad (70)$$

wobei wir m gegen r vernachlässigt und die kleine Halbachse b der Ellipse durch p und die große Halbachse a ausgedrückt haben: $b = \sqrt{ap}$.

Nach (70) mit (69) verhält sich die Größenordnung von D zum mittleren Bahnradius a des Planeten wie dieser (in Lichteinheiten) zur Umlaufzeit:

$$D:a \approx a:T,$$

bei der Erde ist aber $a:T \approx 8$ Minuten : 1 Jahr, beim Merkur $a:T \approx 3$ Minuten : $\frac{1}{4}$ Jahr, daher ist (61)^I stets sehr gut erfüllt:

Aus (63)^I und (67)^{II} erhalten wir bis auf höhere Glieder in ma^{-1} :

$$D^2 = m(1 + \gamma\beta)p, \quad \text{nach (70) also: } m(1 + \gamma\beta) \cdot T^2 = (2\pi)^2 \cdot a^3. \quad (71)$$

Hiernach könnte es eine geringe Abweichung vom 3. KEPLERSchen Gesetz geben (zusätzlich zu dem hier gar nicht betrachteten Einfluß einer Mitbewegung der Sonne), denn von den Konstanten sind nur m und β durch die Sonne bestimmt, der Materialfaktor γ des „Probekörpers“ aber könnte bei jedem Planeten ein anderer sein.

6. Die Periheldrehung

Die aus (68) ersichtliche Zunahme der *Perihellänge* λ mit wachsendem Umlaufswinkel φ beträgt mit (64)^{II} und (63):

$$d\lambda/d\varphi = N - H = (3 + 4c\beta - \gamma\beta)m \cdot G = (3 + 4c\beta - \gamma\beta)(1 + \gamma\beta)m^2 D^{-2};$$

nach (71) und (70)^{II} ist aber

$$\left(\frac{D}{m}\right)^2 = \frac{1 + \gamma\beta}{m} p = (1 + \gamma\beta)^2 \left(\frac{T}{2\pi a}\right)^2 (1 - \varepsilon^2)$$

mit

T = Umlaufzeit, a = große Halbachse

und

ε = numerische Exzentrizität der Planetenbahn,

daher wird

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \left(1 + \frac{4}{3} \frac{c - \gamma}{1 + \gamma\beta} \beta\right) P \quad (72) D$$

mit der Abkürzung

$$P = \frac{3}{1 - \varepsilon^2} \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2. \quad (73)$$

Der EINSTEINSche Wert der Periheldrehung $d\lambda/d\varphi$ ist bekanntlich durch (73) gegeben, er stimmt beim *Merkur* hervorragend überein mit der Erfahrung. Obwohl in den Beobachtungen die schon von der NEWTONschen Theorie erklärten Beiträge zur Periheldrehung (von den anderen Planeten und sogar von der äußerst geringen Abplattung der Sonne herührend) den *relativistischen Effekt* (73) bei weitem überwiegen, ist auch der letztere sichergestellt. Nach CLEMENCE [I] soll hierbei der wahrscheinliche *Fehler erstaunlich gering* sein, nämlich nur 2%; deshalb

werden wir auch von jeder „erweiterten“ Gravitationstheorie verlangen müssen, daß sie bis auf höchstens 2% die Periheldrehung (73) liefere:

$$|1 - P^{-1} d\lambda/d\varphi| < \frac{1}{50}. \quad (74)$$

Von den beiden *Parametern* c und s des Ansatzes (1) tritt der letztere in (72) gar nicht explizit auf, in β ist er nach (38) aber doch enthalten. Bei Fortlassung der Glieder mit γ , was der Annahme einer geodätischen Bewegung entspricht, ergibt sich natürlich wieder unsere frühere Formel 9(21); die richtige (72) ist ein wenig komplizierter. Um den darin explizit auftretenden Parameter γ des *Probekörpers* (Planeten) von dem in β enthaltenen des *Zentralkörpers* (der Sonne) zu unterscheiden, schreiben wir beim letzteren statt (49)^I:

$$\left. \begin{aligned} (b) &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(\varepsilon); \\ \text{dann liefert (38) für } p \ll \varepsilon: \\ \beta &= \frac{\Gamma - c}{2(s + 2c^2) - c\Gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (75) D$$

In unserem Falle (F) mit (16) ergibt (72) mit (75):

$$P^{-1} d\lambda/d\varphi = 1 - \frac{4}{3} (1 + \gamma\beta)^{-1} \gamma\Gamma \approx 1 - \frac{4}{3} \gamma\Gamma \quad (76) F$$

(letzteres für γ und Γ von kleinem Betrage). Nehmen wir an, daß der räumliche Mittelwert von b im Planeten dasselbe Vorzeichen hat wie in der Sonne, so ist $\gamma\Gamma > 0$ und daher die *Periheldrehung* (76) *etwas kleiner* als nach EINSTEIN; hierbei liefert (74) die Bedingung

$$|\gamma\Gamma| < \frac{3}{2} \cdot 10^{-2} = 0,015. \quad (77) F$$

Dies ist erstmalig ein Erfahrungshinweis darauf, daß im Falle (F) die neuartige Funktion b von *kleinerer Größenordnung* sein muß als die Dichte ε (mindestens im räumlichen Mittel über einen materiellen Körper).

Im JORDANSchen Falle (B) gilt nach (13):

$$c = 1, \quad \zeta = -s \gg 1,$$

daher liefert (72) mit (75) für kleines $|\gamma|$ und $|\Gamma|$ dort:

$$d\lambda/d\varphi \approx (1 + \frac{2}{3}\zeta^{-1}) P. \quad (78) B$$

Diese Periheldrehung nach JORDAN [7] ist ein wenig *größer* als nach EINSTEIN und hängt in erster Näherung gar nicht von b , sondern nur von dem grundlegenden Parameter ζ ab. Für diesen liefert (74) beim Vergleich mit (78) die Bedingung $\zeta > 33$; andererseits muß aber ζ möglichst klein sein, weil sonst in der JORDANSchen Kosmologie der heutige Weltradius unzulässig klein wird; deshalb kommt JORDAN [7] S. 183 zur Annahme

$$\zeta = -s \approx 30. \quad (79) B$$

Hiergegen ist vor allem einzuwenden, daß dies immer noch keine eindeutige Festlegung des Parameters s ist; abgesehen davon war auch $c = 1$ nur eine Annahme ohne tiefere Begründung. Außerdem widerspricht (79) dem Prinzip von DIRAC [2], von dem die Begründung der erweiterten Gravitationstheorie durch JORDAN [6] historisch ihren Ausgang nahm. Denn im Grunde besagt jenes Prinzip, daß alle Konstanten in den Grundlagen einer Theorie von der Größenordnung Eins sein sollen.

Schließlich wollen wir fragen, unter welchen Bedingungen die Periheldrehung (72) mit der EINSTEINSchen (73) streng übereinstimmt. Notwendig und hinreichend hierfür ist $(c - \gamma)\beta = 0$, und dies ist nach (49)^I und (75) erfüllt, wenn entweder für den Probekörper oder den Zentralkörper (stets unter der Nebenbedingung $2s + 3c^2 \neq 0$) oder für beide gilt:

$$(b) = c(\varepsilon). \quad (80)$$

In diesem und nur in diesem Falle ist nach (24) und (25) die HECKMANNsche Lösung sogar identisch mit der SCHWARZSCHILDschen:

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - 2m r^{-1}, \quad \kappa = \kappa_{\infty} = \text{const.} \quad (81)$$

Die Beziehung (80) zwischen den feldbestimmenden Raumintegralen könnte man ansehen als Folgerung der etwas strengeren *Hypothese*:

$$b + cT = 0 \quad (\text{wiederum mit } 2s + 3c^2 \neq 0); \quad (82)$$

denn aus (7) mit (8) folgt $T = 3p - \varepsilon$, und daher geht (82) bei Vernachlässigung des Druckes p und nach der in (39) definierten Integration in (80) über. Die Beziehung (82) zwischen den Materiefunktionen b und T hätte nach (3) zur Folge:

$$\sigma^{\nu}{}_{||\nu} + c\sigma^{\nu} \sigma_{\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \sigma = \ln \kappa, \quad (83)$$

also eine homogene Gleichung für die Gravitationszahl κ .

7. Ein allgemeiner Satz über statische Lösungen

Wir behaupten nun, daß die aus (80) gefolgerte Übereinstimmung der HECKMANNschen Lösung mit der SCHWARZSCHILDschen (81) nur ein Sonderfall des folgenden allgemeinen Satzes ist: „*Alle statischen Lösungen der erweiterten Feldgleichungen (3), bei denen im Unendlichen $\kappa = \text{const}$ wird, sind identisch mit den Lösungen der EINSTEINSchen:*

$$R_{\beta}^{\alpha} + \kappa(T_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2}T\delta_{\beta}^{\alpha}) = 0 \quad \text{mit} \quad \kappa \equiv \text{const}, \quad (84)$$

falls die Materiefunktionen nach (82) durch $b = -cT$ verknüpft sind.“

Zum Beweise verwenden wir den folgenden, von LICHNEROWICZ [11] S. 135 oben gefundenen Satz: „In einem RIEMANNschen Raume sei eine

zweimal stetig differenzierbare Funktion σ gegeben. Diese erfülle überall die Gleichung $L\sigma=0$ mit einem *elliptischen* Differentialoperator L und gehe im Unendlichen gleichmäßig gegen eine Konstante. *Dann ist σ überall konstant.* Im statischen Falle ist nun (83) tatsächlich eine elliptische Differentialgleichung, sie hat also unter den gemachten Voraussetzungen nur Lösungen mit $\sigma_{,v} \equiv 0$, wodurch sich (3) zu (84) vereinfacht.

Erfüllt ist die Voraussetzung (82) des Satzes (84) unter anderem dann, wenn man den LUDWIGSchen Ansatz $c = -1$ von (21) und außerdem die LUDWIGSche *Hypothese* (11), oder aber den Vorschlag $c = 0$ des Verfassers [8] zugleich mit der *Hypothese* $b = 0$ gelten läßt. Die Gleichwertigkeit von (82) mit der Hypothese (11) einer verschwindenden Spur des *fünfdimensionalen Materietensors* besteht allerdings nur im Falle $c = -1$ von LUDWIG [13].

Andererseits ist (82) *notwendig*, wenn man die erweiterte Gravitationstheorie in *einfacher Weise* in Einklang mit der Erfahrung bringen will; dies gelingt also unter der Annahme $c = 0$ nur mit $b = 0$, im Falle $c = -1$ nur mit $b = T$, und umgekehrt führt die frühere Hypothese $b = 0$ zur Parameterwahl $c = 0$, die neuere $b = T$ aber zu $c = -1$. Hierbei sollte der Zusatz „in einfacher Weise“ besagen, daß folgende Möglichkeiten nicht in Betracht gezogen sind: 1. könnte die Periheldrehung (72) mit der Erfahrung übereinstimmen, auch wenn sie *nicht streng*, sondern nur bis auf 2% gleich der EINSTEINSchen (73) ist, 2. könnte (80) als Beziehung zwischen zwei *Integralen* [nach (39) definiert] auch dann gelten, wenn die Beziehung (82) zwischen den zugehörigen *Ortsfunktionen* nicht überall richtig ist, 3. brauchte (80) nur für die Sonne *oder* den Planeten, *nicht für beide* zu gelten.

8. Zusammenfassung

Um in der *erweiterten Gravitationstheorie* von JORDAN [7] und LUDWIG [12] zur Entscheidung für eine bestimmte Form der Feldgleichungen (3) zu gelangen, muß man vor allem verlangen, daß sich die *Periheldrehung* in genügender Übereinstimmung mit der von den Beobachtungen [1] geforderten EINSTEIN-Formel (73) ergibt. Will man außerdem das *Größenordnungsprinzip* von DIRAC [2] in möglichst scharfer Form erfüllen, dann kommt wegen (79) die JORDANSche Parameter-Wahl (B) nicht in Frage. Im übrigen aber hängt — im Gegensatz zur früheren Ansicht des Verfassers in [8] bis [10] — die Frage nach den besten Feldgleichungen vom Verhalten des neuartigen, bei (6) nur formal definierten *Materie-Skalars* b ab.

Nimmt man wie JORDAN [6] S. 165 und LUDWIG [12] S. 76 an, daß b in der heutigen Weltepoche *bedeutungslos* sei gegen die absolut größte

Komponente $T_i^t \approx T$ des vierdimensionalen Energietensors, so bleiben die Parameter (16) des in [8] vertretenen Falles (F) zu bevorzugen:

$$\boxed{\text{falls heute } |b| \ll |T|, \text{ dann } c = 0, \quad s = \frac{1}{2}}. \quad (85) F$$

Nimmt man dagegen gemäß (11) an, daß die *Spur des fünfdimensionalen Materietensors* (10) *verschwinde*, so müssen wir die Parameter (21) des Falles (Q) von LUDWIG [13] als richtig ansehen:

$$\boxed{\text{falls heute } b = T, \text{ dann } c = -1, \quad s = \frac{3}{2}}. \quad (86) Q$$

Ob wenigstens eine dieser *Hypothesen* richtig ist und welche, wird nur die Entwicklung einer Theorie der *Materiefelder bei veränderlicher Gravitationszahl* κ lehren können. Die hierzu von LUDWIG [12] S. 71 bis 93 versuchten Ansätze sind leider noch nirgends weiter verfolgt worden; hier aber haben wir erkannt, daß ohne deren Klärung die erweiterte Gravitationstheorie *sogar makroskopisch unfertig* bleiben muß, weil sogar die *Wahl ihrer Feldgleichungen* entscheidend davon abhängt.

Diese Arbeit entstand auf Anregung von Herrn Professor LUDWIG, dem ich hierfür und für sein ständiges Interesse herzlich danken möchte. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Ermöglichung meiner Arbeit auf diesem Gebiet.

Literatur

- [1] CLEMENCE, G. M.: Rev. Mod. Phys. **19**, 361 (1947). — [2] DIRAC, P. A. M.: Nature, Lond. **139**, 323 (1937). — [3] EÖTVÖS, R. V., D. PEKÁR u. E. FEKETE: Ann. Physik **68**, 11 (1922). — [4] HECKMANN, O., P. JORDAN u. W. FRICKE: Z. Astrophys. **28**, 113 (1951). — [5] INFELD, L., and A. SCHILD: Rev. Mod. Phys. **21**, 408 (1949). — [6] JORDAN, P.: Die Herkunft der Sterne. Stuttgart 1947. — [7] JORDAN, P.: Schwerkraft und Weltall, 2. Aufl. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1955. — [8] JUST, K.: Z. Physik **139**, 498 (1954); **140**, 485 (1955). — [9] JUST: Z. Physik **140**, 524 (1955). — [10] JUST: Z. Physik **140**, 648; **141**, 592; **142**, 493 (1955). — [11] LICHNEROWICZ, A.: Théories relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme. Paris: Masson & Cie. 1955. — [12] LUDWIG, G.: Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1951. — [13] LUDWIG, G., u. K. JUST: Z. Physik **143**, 472 (1955). — [14] PAPAPETROU, A.: Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A **209**, 248 (1951). — [15] SCHEIDEGGER, A.: Rev. Mod. Phys. **25**, 451 (1953). — BERTOTTI, B.: Nuovo Cim. **12**, 226 (1954). — [16] WEYL, H.: Raum, Zeit, Materie, 5. Aufl., § 38. Berlin: Springer 1923. — EDDINGTON, A. S.: Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, § 56. Berlin: Springer 1925. — [17] WHEELER, J. A.: Phys. Rev. **97**, 511 (1955).