Bemerkungen

zu der Arbeit des Herrn K. Yamada „Vibration of turbine disc in its plane“. Proceedings of the Second Japan National Congress for Applied Mechanics 1952, S. 343.

Von R. Grammel.

In der angeführten Arbeit nimmt Herr Yamada ein 1935 von mir angeschnittenes Problem erfreulicherweise von neuem auf, aber leider enthalten seine Ausgangsgleichungen einen wesentlichen Fehler. Herr Yamada schreibt die Bewegungsgleichungen für die radiale und azimutale Verschiebung ϱ und $r\psi$ eines Scheibenelements $dm = (\gamma/g)y r dr d\varphi$, an welchem die Spanningskräfte

$$dP = d(y r \sigma_r) d\varphi - y \sigma_t dr d\varphi,$$

$$dQ = d(y r \tau) d\varphi + y \tau dr d\varphi$$

angreifen (wobei γ/g , y , r , σ_r , σ_t , τ und $d\varphi$ die übliche Bedeutung haben), bei der mittleren Drehgeschwindigkeit ω der Scheibe in der folgenden Form (mit Verbesserung einiger kleiner offensichtlicher Druckfehler):

$$\ddot{\varrho} dm = dP + r\omega^2 dm + \underline{2 r \omega \dot{\psi} dm}, \quad (1)$$

$$r\ddot{\psi} dm = dQ - 2\omega \dot{\varrho} dm + \underline{\underline{r\omega^2 \psi dm}}. \quad (2)$$

Die richtigen und (im Rahmen der Elastizitätstheorie der kleinen Verformungen) exakten Gleichungen aber lauten, wie ich seinerzeit angegeben habe¹,

$$\ddot{\varrho} dm = dP + r(\omega + \dot{\psi})^2 dm \equiv dP + r\omega^2 dm + \underline{2 r \omega \dot{\psi} dm} + [r\dot{\psi}^2 dm], \quad (3)$$

$$r\ddot{\psi} dm = dQ - 2(\omega + \dot{\psi}) \dot{\varrho} dm \equiv dQ - 2\omega \dot{\varrho} dm - [2\dot{\psi} \dot{\varrho} dm]. \quad (4)$$

Die Richtigkeit meiner Gleichungen (3) und (4) sieht man rasch ein, wenn man sich entweder auf ein Bezugssystem bezieht, das die (veränderliche) Drehgeschwindigkeit $\omega + \dot{\psi}$ besitzt und in welchem als d'Alembertsche Kräfte auftreten: die Fliehkraft $r(\omega + \dot{\psi})^2 dm$ radial, sowie die Corioliskraft $-2(\omega + \dot{\psi}) \dot{\varrho} dm$ azimutal und endlich die azimutale Trägheitskraft $-r\ddot{\psi} dm$; oder noch schneller, wenn man sich daran erinnert, daß (3) und (4) die bekannten klassischen Gleichungen der Zentralbewegung oder die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten sind². [Streng genommen müßte man überall in den Gleichungen (1) bis (4) genauer $\bar{r} = r + \varrho$ statt r schreiben. Man schätzt aber ab, daß dies (wie schon in der statischen Spannungsrechnung, die man ebenfalls mit r statt $\bar{r}$ durchzuführen pflegt) die Ergebnisse, also hier die Frequenzen, bei den üblichen Baustoffen und Drehgeschwindigkeiten nur um einen Faktor $(1 + \alpha)$ verbessern würde, wo α höchstens von der Größenordnung 10^{-4} bis 10^{-5} wäre. Dies kann man ganz leicht schon an einem rotierenden Stab abschätzen.]

Herr Yamada beschränkt sich (allerdings ohne dies zu sagen) auf „kleine Schwingungen“, so daß man die in (3) und (4) eingeklammerten letzten Glieder weglassen darf, womit wenigstens die Yamadasche Gleichung (1) für „kleine“ Schwingungen richtig wird. Nicht verständlich sind aber seine beiden Behauptungen, daß ich selbst in der Gleichung (3) die „Corioliskraft“ [also das letzte Glied in (1)] und in der Gleichung (4) ein Fliehkraftglied [also das letzte Glied in (2)] „vernachlässigt“ hätte. Beide Behauptungen sind unrichtig.

Daß die erste Behauptung glattweg falsch ist, ersieht man an den einfach unterstrichenen Coriolisgliedern in (1) und (3). Diese unsinnige Behauptung ist umso erstaunlicher, als Herr Yamada lange Teile meiner Rechnung von 1935 wörtlich übernimmt, in denen gerade dieses Coriolisglied immer wieder explizit erscheint, das zusammen mit dem Coriolisglied $-2\omega \dot{\varrho} dm$ der Gleichung (4) das eigentliche Kernstück meiner ganzen Rechnung und ihrer

¹ R. Grammel, Ing.-Arch. 6 (1935) S. 258, Gl. (1).

² Vgl. z. B. E. Meissner u. H. Ziegler, Mechanik Bd. 2, S. 164, Basel 1947.

Ergebnisse bildete. [Freilich tritt im System mit der Drehgeschwindigkeit $\omega + \dot{\psi}$ keine Corioliskraft auf, aber ein zusätzliches Fliehkraftglied mit $2 r \omega \dot{\psi} dm$, und es ist bekannt, daß eben dieses Glied in einem System mit der Drehgeschwindigkeit ω (wie es offenbar Herr *Yamada* vorschwebt) das Coriolisglied ist.]

Die zweite Behauptung von Herrn *Yamada* ist deswegen falsch, weil es in der Gleichung für $\ddot{\psi}$ gar kein Fliehkraftglied gibt [weder in einem System ω noch in einem System $\omega + \dot{\psi}$]. Das doppelt unterstrichene Glied in der *Yamadaschen* Gleichung (2), das in meiner Gleichung (4) in der Tat nicht vorkommt, muß bei ihm weggelassen werden. Daß dieses Glied unmöglich ist, erkennt man beim Übergang zum starren Körper; dabei wird $\dot{\varphi} \equiv 0$ und $\tau \equiv 0$, und die *Yamadasche* Gleichung (2) nimmt die Gestalt $\ddot{\psi} = \omega^2 \psi$ an, mit Lösungen von der Form $\psi = \psi_0 \mathcal{C}[\omega t]$, welche besagen würden, daß eine starre Scheibe die mit einer Drehgeschwindigkeit $\omega \neq 0$ umläuft, beim kleinsten zusätzlichen Drehstoß ψ_0 „infolge der Fliehkraft“ immer rascher und rascher umlaufen müßte — ein verblüffend einfaches Perpetuum mobile!

Die allgemeine Lösung des Systems (3), (4) bereitet wegen der Verkopplung der beiden Gleichungen durch die Drehgeschwindigkeit der Scheibe erhebliche Schwierigkeiten, sodaß bisher explizit nur asymptotische Lösungen gelungen sind¹, welche Herr *Yamada*, durch sein falsches Fliehkraftglied entstellt, wiederholt.

Glücklicherweise ist jene Verkopplung bei Dampfturbinenscheiben nur schwach², sodaß man wohl hinreichend genaue Lösungen erhält, wenn man die radialen und die azimuthalen Schwingungen je für sich an der nicht rotierenden Scheibe berechnet. Herr *Yamada* versucht diese Rechnung für ein spezielles (hyperbolisches) Scheibenprofil, obwohl er aus dem von ihm zitierten Band des „Ingenieur-Archivs“ wissen mußte, daß ich sie schon längst nicht nur für dieses spezielle, sondern für beliebige Profile und beliebige Randbedingungen vollständig erledigt habe³.

(Eingegangen am 4. März 1954.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. R. Grammel, Stuttgart-N, Robert-Bosch-Str. 101.

¹ R. Grammel, a. a. O. S. 259.

² C. B. Biezeno u. R. Grammel, Technische Dynamik Bd. 2, S. 35, 2. Aufl. Berlin 1953 (oder S. 655 der 1. Aufl. Berlin 1939).

³ R. Grammel, Ing.-Arch. 6 (1935) S. 442; Z. angew. Math. Mech. 5 (1925) S. 193.