Vollständigkeit

In diesem Abschnitt wird bearbeitet:
vollständige metrische Räume, Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$

A 119 Wir betrachten den metrischen Raum $(]0, \infty[, d_2)$, wobei d_2 die euklidische Metrik ist (Einschränkung der euklidischen Metrik von $\mathbb{R}$).

(1) Dies ist ein vollständiger metrischer Raum, da $\mathbb{R}$ vollständig ist.
(2) Dies ist ein vollständiger metrischer Raum, da jede Cauchy-Folge in $]0, \infty[$ eine konvergente Folge ist.
(3) Dies ist kein vollständiger metrischer Raum, da das Intervall nicht in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist.
(4) Dies ist kein vollständiger metrischer Raum, da das Intervall nicht beschränkt ist.

A 120 Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Dies zeigt, dass der Körper $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist, denn die Folge $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$

(1) ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, aber sie ist nicht konvergent in $\mathbb{Q}$,
(2) ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, und sie ist konvergent in $\mathbb{Q}$,
(3) ist keine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, aber konvergent in $\mathbb{Q}$,
(4) ist keine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, und nicht konvergent in $\mathbb{Q}$.

A 121 Wir arbeiten auf dem $\mathbb{R}^2$ mit der diskreten Metrik d_0.

(1) In $(\mathbb{R}^2, d_0)$ ist jede Folge eine Cauchy-Folge.
(2) In $(\mathbb{R}^2, d_0)$ gibt es keine Cauchy-Folgen.
(3) In $(\mathbb{R}^2, d_0)$ ist jede Cauchy-Folge konvergent.
(4) In $(\mathbb{R}^2, d_0)$ ist nicht jede Cauchy-Folge konvergent.

T. Bauer, *Verständnisaufgaben zur Analysis 1 und 2*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-59703-3_19