15 Lernmodule Grundlagenmathematik

Katja Derr, Reinhold Hübl, Ulrich Huckenbeck, Edith Mechelke-Schwede, David Obermayr, Miriam Weigel

Kern des didaktischen Konzepts von optes ist die Nutzerführung über Tests und Übungsaufgaben. Da sich die Vorkenntnisse der Kursteilnehmer*innen sehr stark unterscheiden, wird mit diagnostischen Selbsttests gearbeitet, die den Lernenden helfen, das Kursmaterial vorzustrukturieren und Auswahlentscheidungen zu treffen (siehe auch Kapitel 9). Jedem Lernziel in einem LoK (siehe Kapitel 14) ist ein Lernmodul zugeordnet, das die Hintergrundinformationen liefert, die zur Erreichung des Lernziels benötigt werden. Die Lernmodule sind also der inhaltliche Kern der Lernzielorientierten Kurse. Inhaltlich entsprechen sie einem Nachschlagewerk, das den Schulstoff der Mittel- und Oberstufe abdeckt (siehe auch Kapitel 13). Insgesamt wurden für die zwölf LoKs im optes-Vorkurs 42 Lernmodule erstellt. In diesem Kapitel werden die Konzeption und der Aufbau der Lernmodule erläutert.

Im Kontext der Studienvorbereitung ist davon auszugehen, dass viele der Lerninhalte schon bekannt sind, also übersprungen werden können, während andere Lerninhalte zwar bekannt sind, aber noch einmal rekapituliert oder „aufgefrischt“ werden müssen. Ein weiterer Teil der Lerninhalte muss gegebenenfalls komplett neu erarbeitet werden. Die optes-Lernmodule sind auf diesen letzteren Fall ausgerichtet, d. h. jedes Thema wird von Grund auf aufgebaut. Lernende, die nicht den kompletten Stoff neu erarbeiten müssen, sollten aber in der Lage sein, Seiten oder ganze Kapitel zu überspringen und frei im Lernmodul zu navigieren. Diese verschiedenen Nutzungsszenarien mussten bei der Konzeption der Lernmodule berücksichtigt werden. Für die Gestaltung wurde also ein Ansatz gewählt, der einerseits Lernende mit großen Wissenslücken Schritt für Schritt durch ein Thema führt und andererseits Lernenden mit gutem fachlichem Vorwissen die Freiheit lässt, im Lernmodul vor- und zurückzublättern, bis sie zu der Stelle kommen, die sie interessiert.

Bei der Zielgruppe, junge Erwachsene zwischen 17 und 23 Jahren, kann davon ausgegangen werden, dass sie im Umgang mit dem Internet und sozialen Medien geübt ist. Mit umfassenden Vorkenntnissen im Bereich des E-Learning kann bei der Mehrheit der deutschen Schulabgänger*innen allerdings nicht gerechnet werden (Persike und Friedrich 2016; Steffens, Schmitt und Aßmann 2017). Die Lernmodule sollten also in Aufbau und Struktur so nachvollziehbar und übersichtlich wie möglich sein, damit die Lernenden nicht die Übersicht verlieren (siehe auch Kapitel 17).

Bezüglich des Schwierigkeitsgrads und der Tiefe der Informationen sind die Lernmodule nah an der Schulmathematik, damit es Wiedererkennungseffekte gibt, die die Orientierung erleichtern. Es wurde allerdings ein starker Fokus auf mathematische Konventionen gelegt, da das korrekte Anwenden der mathematischen Sprache im Studium von großer Wichtigkeit ist und vielen Studienanfänger*innen schwerfällt (zu diesem Problemfeld wurde zusätzlich der LoK 0 Mathematische Grundlagen entwickelt).

Die folgenden didaktischen Elemente wurden genutzt, um die mathematischen Inhalte zu vermitteln und die Lernenden während des Lernprozesses immer wieder zu aktivieren:

- *Beispiele*
Beispielrechnungen inklusive Musterlösungen zeigen Schritt für Schritt, wie ein mathematisches Problem gelöst wird (Renkl 2001). Anwendungsbeispiele aus dem täglichen Leben oder einem technischen Kontext helfen, mathematische Probleme aus einem anderen Blickwinkel zu betrachten (Johri und Olds 2011).
- *Visualisierungen*
Mathematische Zusammenhänge werden immer wieder mit Hilfe von Grafiken und interaktiven Applets veranschaulicht, um einen Repräsentationswechsel herzustellen (Laurillard 2005; Schnotz und Rasch 2008).
- *Üben*
Zu allen Beispielen und Visualisierungen werden Übungsaufgaben zum direkten Anwenden des Lernstoffs angeboten (Bruder 2008; Greefrath und Hammer 2016).
- *Zusatzinformationen*
Nicht alle Lernmaterialien müssen von allen Vorkursteilnehmer*innen bearbeitet werden. Lerninhalte, die zum Erreichen eines Lernziels nicht notwendig sind, die aber zum Verständnis beitragen können oder interessantes Hintergrundwissen liefern, werden als Zusatzinformation in aufklappbaren Akkordeons oder im Glossar zugänglich gemacht.

15.1 Beispiele

Gerade für Lernende mit geringem Vorwissen sind Beispiele mit Lösungen wichtig, um das Gelernte rekapitulieren zu können. In den optes-Lernmodulen werden zu jedem neu eingeführten Thema ein oder mehrere Beispiele gegeben, d. h. eine neu vorgestellte Formel wird angewandt, eine Gleichung gelöst oder ein Term wird umgestellt. Der dazugehörige Lösungsweg wird in Einzelschritten nachvollzogen. In der Anfangsphase des Lernprozesses, bzw. zu Beginn jedes Lernmoduls, sind die Beispiele auf eher einfachem Niveau und die Musterlösungen sind besonders

ausführlich. Mit Fortschreiten des Lernmoduls steigt meist auch die Komplexität der Beispiele an und in den Lösungen können Detailschritte übersprungen werden. Analog zu den Beispielen finden die Lernenden in jedem Lernmodul Übungsaufgaben, um die Rechenschritte selbstständig ausführen zu können (siehe Kapitel 15.3).

Beispiele sind natürlich auch sehr gut geeignet, um Themen einzuführen oder auf praktische Anwendungen der Mathematik hinzuweisen. Den Teilnehmern des Vorkurses ist oft unklar, wofür bestimmte mathematische Verfahren benötigt werden und warum die Beherrschung der Grundlagen wichtig für den weiteren Studienerfolg ist. Die Verknüpfung zu realen Anwendungen trägt zur Vertiefung des Verständnisses bei und kann sich motivierend auf angehende MINT-Studierende auswirken (Young et al. 2011; Wolf und Biehler 2014).

Abbildung 1: Screenshot Lernmodul Potenzen mit ganzzahligen Exponenten (LoK Potenzen, Wurzeln, Logarithmen): Anwendungsbeispiel Windrad

Eine Herausforderung bei der Herstellung von Praxisbezug ist es, Beispiele zu finden, die mit dem vorhandenen Vorwissen und in einem zeitlich überschaubaren Rahmen lösbar sind. Je authentischer eine Problemstellung, desto mehr Zusatzinformationen werden benötigt, damit das Problem verstanden und bearbeitet werden kann. Mit dem mathematischen Wissen, das im Vorkurs vermittelt wird, sind realistische ingenieurwissenschaftliche Fragestellungen meist nicht lösbar bzw. die Erarbeitung von Lösungsansätzen kann sich über einen Zeitraum von mehreren

Wochen erstrecken (z. B. die Projekte MathePlus oder MathePraxis, Dehling et al. 2014; Rooch, Kiss und Härterich 2014). „Echte“ Probleme aus der Technik oder Informatik sind im Rahmen eines webbasierten Vorkurses also nicht in sinnvoller Weise zu bearbeiten. Damit Praxis-Beispiele in einem angemessenen Zeitraum verstanden (und gelöst) werden können, muss eine starke Vereinfachung und Didaktisierung erfolgen (Leutner et al. 2008; Offer und Bos 2009). In opotes wird daher nur dann mit Praxis-Beispielen gearbeitet, wenn diese sich sinnvoll mit dem mathematischen Thema verknüpfen lassen und von Lernenden auch im Selbststudium nachvollzogen werden können.

In den Einreichaufgaben, die beispielsweise im Betreuten E-Learning zum Einsatz kommen (siehe auch Kapitel 3), werden dann auch komplexere Probleme behandelt (Derr und Hübl 2015).

Logarithmus zur Basis 2

Speicherung von Daten in der Informatik

Gespeichert werden Daten in einem Computer in größeren Einheiten. Hierbei ist ein Byte oft die kleinstmögliche adressierbare Einheit. Um den Speicherbedarf auszurechnen, den eine Zahl mindestens benötigt, muss man die Anzahl Byte berechnen.

In einem Byte mit 8 Bits lassen sich $2^8 = 256$ Zahlen darstellen. Die größte Zahl, die in einem Byte abgespeichert werden kann, wenn alle 8 Bits zur Abspeicherung zur Verfügung stehen, beträgt 255.

$$255_{10} = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1111\ 1111_2$$

Für größere Zahlen werden mehr Speicherplätze benötigt. In der Animation können Sie die Zahlen umgerechnet in Binär- und Hexadezimalschreibweise anzeigen lassen:

255₁₀ = 0000 0000 1111 1111 in Binärschreibweise
 0 0 F F in Hexadezimalschreibweise

Abbildung 2: Screenshot Lernmodul Logarithmen (LoK Potenzen, Wurzeln, Logarithmen): Anwendungsbeispiel Speicherung von Daten in der Informatik mit interaktivem GeoGebra-Applet

15.2 Visualisierungen

Neben dem Repräsentationswechsel durch Anwendungsbeispiele bieten E-Learning-Umgebungen unterschiedliche Möglichkeiten der Veranschaulichung mathematischer Zusammenhänge. In den opotes-Lernmodulen werden Abbildungen, Grafiken und Animationen zur Illustration von Anwendungsproblemen genutzt. Darüber hinaus werden Visualisierungen von mathematischen Problemen, wie zum Beispiel Funktionszusammenhänge oder Vektordarstellungen, genutzt, um das Verständnis zu fördern. Grafiken, Animationen und interaktive Applets ermöglichen einen intuitiveren Zugang, der deutlich niederschwelliger ist als Erläuterun-

gen über lange Textpassagen (Lowe und Schnotz 2008). Animationen und Interaktionen bieten immer dann einen Mehrwert gegenüber statischen Grafiken, wenn Veränderungen oder Beziehungen zwischen mathematischen Elementen aufgezeigt werden (Berney und Betrancourt 2016; Höffler und Leutner 2007).

Abbildung 3 zeigt ein interaktives Applet, das mit der Software GeoGebra¹ zur Visualisierung von quadratischen Funktionen erstellt wurde. GeoGebra ist eine JavaScript-basierte Open-Source-Software, für die im Rahmen des optes-Projekts ein ILIAS-Plug-in entwickelt wurde. Über Schieberegler können die Lernenden die Parameter a , b und c verändern und sofort sehen, wie sich das auf die Beziehungen zwischen x und y auswirkt. Zusätzlich können die Schaubilder des quadratischen, linearen und konstanten Terms ein- und ausgeblendet werden.

- ▼ Lernmodul: Rationale Funktionen
 - ▶ 1 Einleitung
 - ▶ 2 Konstante und lineare Funktionen
 - ▼ 3 Quadratische Funktionen
 - ▶ 3.1 Normalform
 - ▼ 3.2 Scheitelpunktform
 - Quadratische Ergänzung
 - Scheitelpunktform
 - Beispiele
 - ▶ 3.3 Faktorform
 - ▶ 3.4 Aufgaben mit Lösungen
 - ▶ 4 Polynomiale Funktionen
 - ▶ 5 Rationale Funktionen
 - ▶ 6 Wurzelfunktionen
 - ▶ 7 Alles auf einen Blick

Quadratische Ergänzung

Schwerer zu interpretieren sind die Werte b und c .

In der folgenden Animation können die Werte für a , b und c anhand der Schieberegler jeweils zwischen -5 und $+5$ variiert werden. Es wird das Schaubild der Funktion f in der Farbe orange angezeigt. Werden die entsprechenden Kontrollkästchen angeklickt, dann können zusätzlich die Schaubilder des quadratischen Terms $a \cdot x^2$ in grüner Farbe, des linearen Terms $b \cdot x$ in blauer Farbe und des konstanten Terms c in brauner Farbe angezeigt werden.

Voreingestellt sind die Werte $a = 1$, $b = -2$ und $c = 1$. Das Schaubild der Funktion f ist also eine Normalparabel, die um 1 entlang der x -Achse nach rechts verschoben wurde.

Betrachten Sie die Veränderungen in der Animation, wenn Sie die Werte für a , b und c mit den Reglern verändern:

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$a = 1.5$ $b = 3$ $c = 1$

Zeige:

$f(x) = 1.5 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1$

$a \cdot x^2 = 1.5 \cdot x^2$ ☒

$b \cdot x = 3 \cdot x$ ☒

$c = 1$ ☒

Wie man aus der Animation sieht, hat jede Parabel, die nach oben geöffnet ist, einen tiefsten Punkt. Und jede Parabel, die nach unten geöffnet ist, hat einen höchsten Punkt. Diesen Punkt nennt man **Scheitelpunkt**.

Quellen
Glossar

Abbildung 3: Screenshot Lernmodul Rationale Funktionen und Wurzelfunktionen (LoK Funktionen) mit interaktivem GeoGebra-Applet

¹ Siehe www.geogebra.org [10.06.2020].

Die Abbildungen 2 und 3 zeigen sehr gut die Vorteile interaktiver Visualisierungen: Sehr komplexe Zusammenhänge können auf einen Blick (bzw. Klick) anschaulich dargestellt werden. Über Text oder statische Abbildungen wären die gleichen Erläuterungen schnell unübersichtlich oder ermüdend.

Grundsätzlich ist beim Lehren und Lernen mit Animationen zu berücksichtigen, dass die optische Vereinfachung darüber hinwegtäuschen kann, dass der Inhalt nach wie vor kompliziert ist. Gerade weil sie so leicht zugänglich sind, können Animationen die Illusion vermitteln, dass der Inhalt verstanden wurde (Salomon 1984; Paik und Schraw 2013). Die weitaus mühsamere Auseinandersetzung mit einem Problem über Sprache oder Texte trägt also auch zum tieferen Verständnis bei. Ein weiterer Vorteil sprachlich-textueller Vermittlung ist, dass die benötigte domänenspezifische Sprache gleich mitgelernt wird (Laurillard 2005). In den optes-Lernmodulen kommen darum Visualisierungen immer in Kombination mit theoretischen Erklärungen, Definitionen und Beispielen zum Einsatz und werden stets durch Übungsaufgaben ergänzt.

15.3 Üben

In der Mathematik ist es vor allem für Lernende mit geringem Vorwissen wichtig, ein neu erlerntes Konzept oder die Lösung für ein Problem auch direkt anzuwenden. Durch das Bearbeiten einer Übungsaufgabe wird das Verständnis für das Problem geschärft und der Lösungsansatz wird weniger leicht vergessen. Jede Wiederholung durch Bearbeitung einer weiteren Übungsaufgabe trägt zur weiteren Vertiefung des Wissens bei (Bönsch 2014).

Dabei geht es zunächst um das Erlangen von Routine durch „Einüben“, beispielsweise beim Lösen von linearen Gleichungssystemen. Durch den mehr oder weniger „mechanischen“ Erwerb basaler Fertigkeiten (Renkl 1991) wird die Grundlage geschaffen, um komplexere Zusammenhänge zu verstehen oder Verknüpfungen mit schon bestehendem oder neu hinzugekommenem Wissen herzustellen (Bruder 2008).

Üben und Anwenden kann also auch auf der eher oberflächlichen Ebene von „Drill & Practice“-Aufgaben zum tieferen Verständnis beitragen (Pachman, Sweller und Kalyuga 2013). Hinzu kommt, dass das routinierte Durchführen von elementaren Rechenoperationen das Arbeitsgedächtnis entlastet. Nur wenn die Grundfertigkeiten „sitzen“, ist ein Voranschreiten zu komplexeren Aufgaben und das Erlangen von Expertise überhaupt möglich (Ericsson, Krampe und Tesch-Romer 1993).

In den optes-Lernmodulen werden Übungsaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeits- und Komplexitätsgrade eingesetzt, um Lernende zu aktivieren, das Verständnis des bearbeiteten Lernstoffs zu überprüfen (Monitoring) und zur Wiederholung und Festigung des Gelernten (Konsolidierung) (siehe Kapitel 4 sowie Reinmann, Schmidt und Marquardt 2019).

Auf den Inhaltsseiten eines Lernmoduls werden beispielsweise eher kurze Aufgaben zum direkten Anwenden und Nachvollziehen der Formeln und Rechenwege angeboten. Abbildung 4 zeigt eine Aufgabe im Lernmodul Mathematische Sprache und Symbole (LoK 0 Mathematische Grundlagen). Nachdem das Summenzeichen eingeführt und anhand von Beispielen erläutert wurde, haben die Lernenden die Möglichkeit, eine Single-Choice-Aufgabe zum Thema zu beantworten. Sie können ein direktes Feedback abrufen – und die Bearbeitung nochmal versuchen, wenn ihre Antwort nicht korrekt war.

▼ Lernmodul: Mathematische Sprache und Symbole

- 1 Einleitung
- 2 Maßeinheiten
- 3 Griechisches Alphabet
- ▼ 4 Summenzeichen und Produktzeichen
 - **Summenzeichen**
 - Besondere Summen
 - Rechenregeln für Summen
 - Doppelsummen
 - Produktzeichen
 - Besondere Produkte
 - Rechenregeln für Produkte
 - Indexverschiebung bei Summen und Produkten
 - 4.1 Aufgaben mit Lösungen
- 5 Mathematische Symbole
- 6 Alles auf einen Blick

0 Mathematische Grundlagen » Lernmodul: Mathematische Sprache und Symbole » 4 Summenzeichen und Produktzeichen

Lernmodul: Mathematische Sprache und Symbole

Griechische Buchstaben in den Naturwissenschaften Besondere Summen

Summenzeichen

Beispiele:

$$\sum_{i=5}^{10} i = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Schreiben Sie die folgende Summe aus und berechnen Sie ihren Wert:

$$\sum_{i=-1}^3 i^2$$

☐ $(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15$
☐ $(-1 + 0 + 1 + 2 + 3)^2 = 25$
☒ $-1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 13$

Ihre Antwort ist nicht korrekt.

Auswerten

► Erklärung

Lösung:

$$\sum_{i=-1}^3 i^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15$$

Erläuterung:

Wir lösen das Summenzeichen auf und addieren die einzelnen Summanden:

$$\sum_{i=-1}^3 i^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 0 + 1 + 4 + 9 = 15$$

Quellen Glossar

Griechische Buchstaben in den Naturwissenschaften Besondere Summen

Abbildung 4: Screenshot Lernmodul Mathematische Sprache und Symbole (LoK Mathematische Grundlagen): Beispiel und Übungsaufgabe zur Verwendung des Summenzeichens

Das Feedback auf Test- und Übungsaufgaben im optes-Projekt ist immer nach dem gleichen Schema aufgebaut. Es umfasst die Lösung, also die vom System erwartete Antwort, sowie eine ausführliche Erläuterung, wie diese Antwort erzielt werden kann (siehe auch Kapitel 9 und Kapitel 10).

Aufgaben, die sich direkt auf den Inhaltseiten des Lernmoduls befinden, sind sehr nah am Text und wenig komplex, die Aufmerksamkeit der Lernenden soll nicht zu sehr abgelenkt werden. Bei diesem Aufgabentyp werden die Eingaben der Lernenden auch nicht gespeichert, d. h. beim erneuten Aufruf der Seite wird auch die Aufgabe neu geladen.

Wenn ein Kapitel oder Themengebiet abgeschlossen ist, können Aufgaben mit Lösungen zur weiteren Vertiefung des Gelernten bearbeitet werden (siehe Abbildung 5). Der Schwierigkeits- und Komplexitätsgrad dieser Aufgaben kann etwas höher sein, um die Lernenden direkt auf eventuell noch bestehende Verständnisprobleme hinzuweisen. Bei den Aufgaben mit Lösungen kommen auch Aufgaben mit Praxisbezug zum Einsatz, in diesem Fall die Berechnung von Speicherkapazitäten und der Umgang mit großen Zahlen.

Lernmodul: Mathematische Sprache und Symbole

0 Mathematische Grundlagen » Lernmodul: Mathematische Sprache und Symbole » 4 Summenzeichen und Produktzeichen

Lernmodul: Mathematische Sprache und Symbole

Physikalische Einheiten Übersicht Aufgabe 2

Aufgabe 1

Wie viele Songs im MP3-Format mit jeweils 4 Megabyte kann man auf einer Festplatte mit 1 Terabyte speichern?

Erklärung

Lösung:

Auf einer Festplatte mit 1 TB lassen sich 250 000 Songs mit jeweils 4 MB speichern.

Erläuterung:

Wir berechnen die Anzahl Songs n , indem wir die Festplattenkapazität durch die Größe eines Songs im MP3-Format dividieren:

$$n = \frac{1 \text{ TB}}{4 \text{ MB}} = \frac{10^{12} \text{ B}}{4 \cdot 10^6 \text{ B}} = \frac{10^6 \text{ B}}{4 \text{ B}} = 250\,000$$

Auf einer Festplatte lassen sich 250 000 Songs speichern.

Abbildung 5: Screenshot Lernmodul Mathematische Sprache und Symbole (LoK Mathematische Grundlagen): Aufgabe zum Umgang mit Maßeinheiten

Am Ende jedes Lernmoduls werden die Lernenden auf das passende Training hingewiesen. Das Training zu jedem Lernziel bzw. Lernmodul umfasst 10-15 Aufgaben unterschiedlicher und im Verlauf des Trainings ansteigender Schwierigkeit und Komplexität (siehe Abbildung 6).

Abbildung 6: Screenshot Training Rationale Funktionen und Wurzelfunktionen (LoK Funktionen): Zuordnungsfrage

Abbildung 7: Screenshot Training Rationale Funktionen und Wurzelfunktionen (LoK Funktionen): Feedback auf eine Zuordnungsfrage

Auch im Training werden Aufgaben mit Praxisbezug verwendet. Das Training ist als Test angelegt, der immer wieder durchgeführt werden kann. Die vorherigen Testergebnisse werden gespeichert, das Training hat aber keinen Einfluss auf die Erreichung des Lernziels. Wenn die Mehrzahl der Trainingsaufgaben korrekt beantwortet wurde, wird die Bearbeitung des Abschlusstests zur Erreichung des Lernziels empfohlen (siehe auch Kapitel 14).

15.4 Zusatzinformationen

Der optes-Vorkurs richtet sich an angehende Studierende mit lückenhaftem Vorwissen in Mathematik. Ein Problem bei der Definition der Zielgruppe und der Lernziele ist, dass für unterschiedliche Studiengänge auch unterschiedliche mathematische Themen relevant sind. Beispielsweise ist das Nachvollziehen von mathematischen Beweisen und logischen Schlussfolgerungen in den meisten technischen oder wirtschaftswissenschaftlichen Studiengängen nicht erforderlich, in informationstechnischen Studiengängen wird es aber benötigt.

Das Erlernen mathematischer Beweisverfahren ist darum Bestandteil des LoK Logik, der vor allem für Studienanfänger*innen in diesen Fächern konzipiert wurde. Ein grundlegendes Verständnis dafür, warum eine Aussage stimmt, und wie dies bewiesen werden kann, ist aber auch für Studienanfänger*innen anderer Studiengänge hilfreich. Mathematische Beweise, die nicht von allen Lernenden nachvollzogen werden müssen, aber zur Erläuterung beitragen, werden darum auch in anderen Lernmodulen als Zusatzinformationen gekennzeichnet, die nur bei Bedarf aufgerufen werden (über das „Aufklappen“ eines Akkordeons, siehe Abbildung 8).

▼ Lernmodul: Rationale Funktionen

- ▶ 1 Einleitung
- ▶ 2 Konstante und lineare Funktionen
- ▼ 3 Quadratische Funktionen
 - ▶ 3.1 Normalform
 - ▼ 3.2 Scheitelpunktform
 - ▶ **Quadratische Ergänzung**
 - Scheitelpunktform
 - Beispiele
 - ▶ 3.3 Faktorform
 - ▶ 3.4 Aufgaben mit Lösungen
 - ▶ 4 Polynomiale Funktionen
 - ▶ 5 Rationale Funktionen
 - ▶ 6 Wurzelfunktionen
 - ▶ 7 Alles auf einen Blick

Die Normalform einer quadratischen Funktion lässt sich also in die folgende Form bringen:

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$$

Der Punkt $(x_S | y_S)$ ist für $a > 0$ der tiefste Punkt der Parabel und für $a < 0$ der höchste Punkt der Parabel und wird Scheitelpunkt genannt.

► Beweis

Betrachten wir einen x -Wert x_0 rechts oder links des x -Wertes x_S des Scheitelpunkts, so ist der quadratische Term $(x_0 - x_S)^2$ größer als $(x_S - x_S)^2 = 0$.

Ist $a > 0$, so wird der Funktionswert $f(x_0)$ also einen größeren Wert annehmen als der Funktionswert $f(x_S) = y_S$, denn

$$f(x_0) = a(x_0 - x_S)^2 + y_S > y_S$$

Ist $a < 0$, so wird der Funktionswert $f(x_0)$ also einen kleineren Wert annehmen als der Funktionswert $f(x_S) = y_S$, denn

$$f(x_0) = a(x_0 - x_S)^2 + y_S < y_S$$

Der Punkt $(x_S | y_S)$ ist also für $a > 0$ der tiefste Punkt und für $a < 0$ der höchste Punkt der Parabel.

Abbildung 8: Screenshot Lernmodul Rationale Funktionen und Wurzelfunktionen (LoK Funktionen): Akkordeon mit Zusatzinformation Beweis

Darüber hinaus wurden sämtliche Begriffe und Definitionen, die im optes-Vorkurs behandelt werden, im mathematischen Glossar zusammengefasst (siehe Abbildung 9 und 10). Das heißt, auch wenn ein Lerninhalt übersprungen wurde, können Lernende zu einem späteren Zeitpunkt immer wieder über das Glossar auf diese Information zurückgreifen.

Einschränkend ist zu sagen, dass trotz der relativ großen Freiheit, die die Gestaltung der optes-Lernmaterialien für Lernende (und Lehrende) bietet, nicht für jede*n Studienanfänger*in die perfekte Lernumgebung geschaffen werden kann.

So können sich Lernende mit sehr geringem Vorwissen durch zu viel Content oder zu wenig Führung gerade in E-Learning-Umgebungen überfordert fühlen, während sich zu ausführliche Inhalte negativ auf den Lernerfolg von Lernenden mit sehr gutem Vorwissen auswirken können, da sie nur oberflächlich durch die Inhalte navigieren und dann wichtige Seiten überspringen (Kalyuga et al. 2003; van Gog et al. 2005).

Zu einem gewissen Grad lässt sich das Problem der Heterogenität durch adaptive Tests und daran anknüpfende Lernempfehlungen abmildern (siehe Kapitel 8). Ein weiterer im optes-Projekt erprobter Ansatz sind Betreuungs- und E-Mentoring-Konzepte, die das Bilden von Lerngruppen mit ähnlichem Wissensstand und eine individuelle Beratung ermöglichen (siehe auch Kapitel 18).

Abbildung 9: Screenshot Glossar Mathematische Begriffe

Abbildung 10: Screenshot Glossar Mathematische Begriffe – Wissenschaftliche Notation

Literatur

- Berney, S. & Betrancourt, M. (2016). Does animation enhance learning? A meta-analysis. *Computers & Education*, 101, 150–167.
- Bönsch, M. (2014). *Nachhaltiges Lernen durch Üben und Wiederholen*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.
- Bruder, R. (2008). Üben mit Konzept. *mathematik lehren*, 147, 4–11.
- Dehling, H., Glasmachers, E., Gries, B., Härterich, J. & Kallweit, M. (2014). MP2 – Ma-the/Plus/Praxis: Strategien zur Vorbeugung gegen Studienabbruch. *Zeitschrift für Hochschulentwicklung*, 9(4), 39–56.
- Derr, K. & Hübl, R. (2015). Betreuungskonzepte für Online-Vorkurse in Mathematik: Fachliche und überfachliche Aspekte. In *Tagungsband zum 2. HD-MINT Symposium* (S. 64–69). Verfügbar unter https://www.hd-mint.de/wp-content/uploads/2014/10/END_VERSION_HDMINT_2015_Tagungsband.pdf [10.06.2020].
- Ericsson, K. A., Krampe, R. T. & Tesch-Romer, C. (1993). The Role of Deliberate Practice in the Acquisition of Expert Performance. *Psychological Review* 100 (3), 363–406.
- GeoGebra. Dynamische Mathematiksoftware. Verfügbar unter <https://www.geogebra.org> [10.06.2020].
- Greefrath, G. & Hammer, C. (2016). Erfolg mit Üben – Üben mit Erfolg. *PM Praxis der Mathematik in der Schule*, 58(67), 2–7.
- Höffler, T. N. & Leutner, D. (2007). Instructional animation versus static pictures: A meta-analysis. *Learning and Instruction*, 17(6), 722–738.

- Johri, A. & Olds, B. M. (2011). Situated Engineering Learning: Bridging Engineering Education Research and the Learning Sciences. *Journal of Engineering Education*, 100(1), 151–185.
- Kalyuga, S., Ayres, P., Chandler, P. & Sweller, J. (2003). The Expertise Reversal Effect. *Educational Psychologist* 38(1), 23–31.
- Laurillard, D. (2005). Learning Formal Representations through Multimedia. In F. Marton, D. Hounsell & N. J. Entwistle (Hrsg.), *The Experience of Learning: Implications for teaching and studying in higher education* (3. Aufl., S. 172–183). University of Edinburgh: Centre for Teaching, Learning and Assessment.
- Leutner, D., Fischer, H. E., Kauertz, A., Schabram, N. & Fleischer, J. (2008). Instruktionspsychologische und fachdidaktische Aspekte der Qualität von Lernaufgaben und Testaufgaben im Physikunterricht. In J. Thonhauser (Hrsg.), *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen* (S. 168–181). Münster/München/Berlin: Waxmann.
- Lowe, R. & Schnotz, W. (Hrsg.) (2008). *Learning with animation. Research implications for design*. Cambridge, New York: Cambridge University Press.
- Offer, J. & Bos, B. (2009). The design and application of technology-based courses in the mathematics classroom. *Computers & Education*, 53(4), 1113–1137.
- Pachman, M., Sweller, J. & Kalyuga, S. (2013). Levels of knowledge and deliberate practice. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 19(2), 108–119.
- Paik, E. S. & Schraw, G. (2013). Learning with animation and illusions of understanding. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 278–289.
- Persike, M. & Friedrich, J.-D. (2016). *Lernen mit digitalen Medien aus Studierendenperspektive. Arbeitspapier 17*. Berlin: Hochschulforum Digitalisierung.
- Reinmann, G., Schmidt, C. & Marquardt, V. (2019). Förderung des Übens als reflexive Praxis im Hochschulkontext. Hochschul-Didaktische Überlegungen zur Bedeutung des Übens für Brückenkurse in der Mathematik. *Impact Free*. Verfügbar unter https://gabi-reinmann.de/wp-content/uploads/2019/04/Impact_Free_21.pdf [10.06.2020].
- Renkl, A. (1991). *Die Bedeutung der Aufgaben- und Rückmeldungsgestaltung für die Leistungsentwicklung im Fach Mathematik*. Dissertation: Universität Heidelberg, Heidelberg.
- Renkl, A. (2001). Explorative Analysen zur effektiven Nutzung von instruktionalen Erklärungen beim Lernen aus Lösungsbeispielen. *Unterrichtswissenschaft*, 29, 41–63.
- Rooch, A., Kiss, C. & Härterich, J. (2014). Brauchen Ingenieure Mathematik? Wie Praxisbezug die Ansichten über das Pflichtfach Mathematik verändert. In I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. R. Fischer, R. Hochmuth, W. Koepf, S. Schreiber & Th. Wassong (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven* (S. 389–409). Wiesbaden: Springer.
- Salomon, G. (1984). Television is "easy" and print is "tough": The differential investment of mental effort in learning as a function of perceptions and attributions. *Journal of Educational Psychology*, 76(4), 647–658.
- Schnotz, W. & Rasch, T. (2008). Functions of animations in comprehension and learning. In R. Lowe & W. Schnotz (Hrsg.), *Learning with animation. Research implications for design* (S. 92–113). Cambridge, New York: Cambridge University Press.
- Steffens, Y., Schmitt, I. L. & Aßmann, S. (2017). *Mediennutzung an der Hochschule: Über den studentischen Umgang mit Medien*. Verfügbar unter https://www.ssoar.info/ssoar/bitstream/handle/document/55986/ssoar-2017-steffens_et_al-Mediennutzung_Studierender_uber_den_Umgang.pdf?sequence=1&isAllowed=y&lnkname=ssoar-2017-steffens_et_al-Mediennutzung_Studierender_uber_den_Umgang.pdf [10.06.2020].

- van Gog, T., Ericsson, K. A., Rikers, R. M. J. P. & Paas, F. (2005). Instructional design for advanced learners: Establishing connections between the theoretical frameworks of cognitive load and deliberate practice. *Educational Technology Research and Development*, 53(3), 73–81.
- Wolf, P. & Biehler, R. (2014). Entwicklung und Erprobung anwendungsorientierter Aufgaben für Ingenieurstudienanfänger/innen. *Zeitschrift für Hochschulentwicklung*, 9(4), 169–190.
- Young, C. Y., Georgiopoulos, M., Hagen, S. C., Geiger, C. L., Dagley-Falls, M. A., Islas, A. L., Ramsey, P. J., Lancey, P. M., Straney, R. A., Forde, D. S. & Bradbury, E. E. (2011). Improving student learning in calculus through applications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(5), 591–604.

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/ die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.