Mathematische Spielerei

Alexander Blinne, Matthias Müller, Konrad Schöbel

Der Urheber dieses mathematischen Kunststücks ist nicht bekannt. Übermittelt wurde es der Wurzel durch Professor Mejlison, Tel Aviv, dem wir herzlich danken. Dies ist ein Nachdruck des Artikels aus der Ausgabe 10/1990 der Wurzel.

Gibt es irrationale Zahlen a, b , für die a^b rational wird?

$$\exists a \notin \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}, \quad a^b \in \mathbb{Q} \quad (1)$$

Das sollte eigentlich der Fall sein, denken wir nur an $e^{\log c} = c$ mit rationalem c . Sicher ist $e \notin \mathbb{Q}$, aber es bleibt die Schwierigkeit, $\log c \notin \mathbb{Q}$ nachzuweisen. Diesen Problemen gehen wir ganz aus dem Weg:

Wir betrachten

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2. \quad (2)$$

Das läßt sich schnell nachrechnen. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

Entweder $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$, dann liefert (2) eine Lösung für (1),

oder $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, womit natürlich (1) direkt erfüllt wird.

Also haben wir in jedem Fall ein Paar (a, b) gefunden.

Schreiben wir obiges Beispiel aussagenlogisch auf, so erhalten wir mit den Abkürzungen

$$E := \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}, \quad (1) \dots \text{wie oben} \\ ((E \Rightarrow (1)) \text{ und } (\text{nicht}(E) \Rightarrow (1))) \Rightarrow (1)$$

Ob nun E selbst wahr oder falsch ist, spielt für den Beweis überhaupt keine Rolle. (Es erscheint aber vernünftig anzunehmen, daß $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational ist.¹)

¹ Anmerkung der Herausgeber: Man kann zeigen, dass $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nicht nur irrational, sondern sogar transzendent ist.