DETERMINATION D'UNE REPRESENTATION DES NOYAUX DE VOLTERRA POUR UN SYSTEME PHYSIOLOGIQUE NON-LINEAIRE

M. Gautier, M. Monsion, J.P. Sagaspe
Université de Bordeaux I
Laboratoire d'Automatique
33405 Talence

I Introduction

Nous cherchons un modèle de représentation du système crânio-rachidien de l'homme à partir des enregistrements des variations de la pression intra-crânienne consécutives à des injections de liquide céphalo-rachidien artificiel dans les ventricules.

II Processus physiologique

Le système crânio-rachidien est constitué par les 3 composants : tissus nerveux, système vasculaire, liquide céphalo-rachidien, contenus dans une enceinte rigide. La pression du liquide céphalo-rachidien ou pression intra-crânienne (P.I.C.) traduit l'état d'équilibre des trois composants et l'étude dynamique de son évolution apporte des données physio-pathologiques irremplaçables dans la compréhension des situations d'hypertension intra-crânienne chez l'homme.

De façon habituelle, trois tests sont pratiqués pour induire des variations de la P.I.C. :

- Compression bilatérale des veines jugulaires.
- Respiration d'un mélange de CO_2 .
- Injection incrémentale de L.C.R. artificiel à l'intérieur des ventricules.

Ces tests sont longs, délicats et parfois dangereux. Aussi avons-nous cherché à identifier globalement le système afin d'obtenir les mêmes résultats à partir de tests simples.

Le système peut être schématisé de la façon suivante :

$x(t)$, l'entrée : injection de L.C.R. artificiel
 $y(t)$, la sortie : P.I.C.

L'étude des enregistrements nous a montré que le système, déterministe, invariant, stable et continu, est non linéaire.

III Représentation de Volterra du système

Compte tenu des propriétés du processus, il est possible d'approximer la relation fonctionnelle entrée-sortie, $y(t) = k[x(t)]$, par le développement en série de Volterra.

$$y(t) = \sum_{i=1}^N C_i \left[h_i, x(t) \right]$$

$$\text{avec } C_i \left[h_i, x(t) \right] = C_i(t) = \int_0^t \dots \int_0^t h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{j=1}^i x(t-\tau_j) d\tau_j$$

Ce développement peut être schématisé de la façon suivante :

IV Détermination des fonctionnelles C_i

En utilisant la propriété d'homogénéité des C_i , $C_i[\lambda x(t)] = \lambda^i C_i[x(t)]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, il est possible de calculer les N fonctionnelles $C_i(t)$ à partir de N enregistrements des réponses $y_1, y_2, \dots, y_N$ du système à des entrées $\lambda_p x(t)$

On utilise la méthode de Gardiner qui conduit à la relation :

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ \vdots \\ C_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^N \\ \lambda_2 & \lambda_2^2 & & \lambda_2^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_N & \dots & \dots & \lambda_N^N \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{pmatrix}$$

Notre problème se ramène donc à caractériser h_i , noyau d'ordre i , connaissant l'entrée $x(t)$ et la sortie $C_i(t)$.

V Caractérisation d'un noyau h_i

Sans nuire à la généralité de la méthode, nous développerons les calculs pour un noyau d'ordre deux et pour des entrées échelons.

Nous construisons un modèle $\hat{h}_2(\tau_1, \tau_2)$ de $h_2(\tau_1, \tau_2)$ sous la forme :

$$\hat{h}_2(\tau_1, \tau_2) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M B_{mn} g_m(\tau_1) g_n(\tau_2)$$

Les fonctions $\{g_i(\tau)\}$ constituent une base orthogonale. $h_i(\tau_1, \dots, \tau_i)$ est symétrique relativement aux permutations des τ_i . Ceci implique que $B_{mn} = B_{nm}$, $\forall m$ et $n \in [0, M]$, et limite donc le nombre d'inconnues.

Nous obtenons ainsi une approximation de la sortie du noyau h_2 :

$$\hat{C}_2(t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M B_{mn} \int_0^t g_m(\tau) d\tau \int_0^t g_n(\tau) d\tau$$

La dernière étape consiste à déterminer les coefficients B_{mn} . Pour cela, nous décomposons $C_2(t)$ et $\hat{C}_2(t)$ sur une même base de fonctions orthonormales sur $[0, T]$ par rapport à la fonction poids $w(t)$.

$$C_2(t) = \sum_{k=0}^K \gamma_k f_k(t) \quad \text{avec} \quad \gamma_k = \int_0^T C_2(t) f_k(t) w(t) dt.$$

$$\hat{C}_2(t) = \sum_{k=0}^K \alpha_k f_k(t) \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \int_0^T \hat{C}_2(t) f_k(t) w(t) dt.$$

L'unicité de la décomposition nous permet d'assurer l'identité

entre $C_2(t)$ et $\hat{C}_2(t)$ en écrivant $\alpha_k \equiv \gamma_k, \forall k = 0, K$. Le calcul littéral de α_k nous fournit une relation $\alpha_k = R_k(B_{mn})$. Nous obtenons ainsi un système linéaire dans lequel B_{mn} sont les inconnues et que nous pouvons résoudre, compte tenu d'un choix convenable de K , ordre de la décomposition.

VI Application

Les fonctions de base sont des fonctions de Laguerre. Nous rappelons leurs propriétés :

$$\text{Définition : } \Lambda_n(t) = (-1)^n \sqrt{2} e^{-t} L_n(2t)$$

$$\text{avec } L_n(t) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j \frac{t^j}{j!}$$

$$\text{Orthonormalité sur } [0, \infty] : \int_0^\infty \Lambda_m(t) \cdot \Lambda_n(t) dt = \delta_{mn}$$

$$\text{Récurrence : } (n+1) \Lambda_{n+1} + (2n+1-2t) \Lambda_n + n \Lambda_{n-1} = 0.$$

$$\text{Intégrale : } I_n = \int_0^t \Lambda_n(t) dt = \sqrt{2} - \Lambda_n(t) - 2 \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_j(t)$$

Décomposition de $C_2(t)$

$$C_2(t) = \sum_{k=0}^K \gamma_k \Lambda_k(t) \quad \text{avec } \gamma_k = \int_0^\infty C_2(t) \Lambda_k(t) dt.$$

Décomposition de $\hat{C}_2(t)$

Expression de $\hat{C}_2(t)$:

$$\hat{C}_2(t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M B_{mn} \int_0^t \Lambda_m(\tau) d\tau \int_0^t \Lambda_n(\tau) d\tau.$$

$$\hat{C}_2(t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M B_{mn} I_m(t) I_n(t).$$

d'où la relation :

$$\hat{C}_2(t) = \sum_{k=0}^K \alpha_k \Lambda_k(t) \quad \text{avec } \alpha_k = \int_0^\infty \sum \sum B_{mn} I_m(t) I_n(t) \Lambda_k(t) dt.$$

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M B_{mn} \beta_{mn}^k \quad \text{avec } \beta_{mn}^k = \int_0^\infty I_m(t) I_n(t) \Lambda_k(t) dt.$$

Pour k donné, nous obtenons une équation linéaire en B_{mn}

$$\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^M B_{mn} \beta_{mn}^k = \gamma_k$$

Le système obtenu en faisant varier k de 0 à K est soluble si : le nombre d'équations $K+1$ est supérieur ou égal au nombre d'inconnues $(M+1)(M+2)/2$. Le tableau ci-dessous montre que la dimension du système croît rapidement avec l'ordre i du noyau et M .

$\begin{smallmatrix} M \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	6	10	15
3	4	10	20	35

Ceci constitue le seul inconvénient lors de l'implantation sur ordinateur. En effet, les coefficients β_{mn}^k peuvent être calculés à priori puisqu'ils ne dépendent que du choix de la base et du type d'entrée. Le calcul des $C_i(t)$ et des γ_k se réalise facilement et l'on peut dire que la méthode est globalement très rapide.

VII Conclusion

Nous proposons une méthode de détermination des noyaux de Volterra d'un système non linéaire déterministe, invariant, stable et continu. La rapidité des calculs et la simplicité des tests nécessaires en font un outil pratique et efficace dans l'aide au diagnostic relatif aux cas d'hypertension intra-crânienne.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - GAUTIER M., MONSION M., SAGASPE J.P.

Caractérisation des noyaux de Volterra d'un système non linéaire.
Electronic Letters. Vol 11 n° 15 p. 351 à 353.

- 2 - GARDINER A.

Identification of processus containing single-valued non-linearities.
Int. J. Control, 1973, 18, n° 5 1029 à 1039.

- 3 - VOLTERRA V.

Theory of functionals and of integral and integro-differential
equations.
New-York, Dover.