ZUR ENDLICHEN APPROXIMIERBARKEIT SEQUENTIELLER SYSTEME

Rüdiger Valk

Institut für Informatik, Universität Hamburg

D-2000 Hamburg 13, Schlüterstraße 70

1. Einleitung

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Informatik ist die Simulation realer Systeme mit Hilfe von elektronischen Datenverarbeitungsanlagen. Bevor man jedoch damit beginnen kann, eine geeignete Software für eine solche Simulation zu erstellen, ist es notwendig, ein hinreichend genaues formales Modell des Systems zu entwickeln. Die Bereitstellung solcher Modelle ist Aufgabe der allgemeinen Systemtheorie [MT]. Diese Modelle berücksichtigen im allgemeinen noch nicht Randbedingungen, die durch das Leistungsvermögen des zur Verfügung stehenden Rechners gegeben sind. In einem weiteren Schritt müssen also alle Mengen und Operationen des Modells an diese Randbedingungen angepaßt werden, d.h. das Modell muß möglicherweise vergrößert werden.

In [V1] wurden Topologien für den Zustandsraum eines solchen Modells angegeben. "Nähe" von Zuständen bezüglich dieser Topologien bedeutet - anschaulich interpretiert - "Ähnlichkeit" in ihrem Verhalten, d.h. "Ähnlichkeit" in der Ausgabe bei gleicher Eingabe. In [V1] blieb jedoch die Frage offen, ob bei diesen Topologien immer eine hinreichend genaue endliche Approximation möglich ist. Nehmen wir an, eine der genannten Topologien sei durch eine Metrik d gegeben. Das angesprochene Problem der Approximation des Zustandsraumes läßt sich nun so formulieren : Gibt es zu jedem reellen positiven ϵ (dem gewünschten Genauigkeitsgrad der Approximation) eine endliche Menge von Zuständen $Z_1 = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ aus der Zustandsmenge Z des Modells derart, daß jeder beliebige Zustand in der ϵ -Umgebung eines dieser Zustände z_i liegt ?

2. Allgemeine Definitionen

Die Menge der Zeitpunkte, bei denen ein reales System beobachtet wird, heißt Zeitmenge. Als Zeitmenge bezeichnen wir jede linear geordnete Menge T , die ein kleinstes Element t_0 besitzt. Außerdem soll T bezüglich einer zweistelligen Verknüpfung $+$ ein angeordnetes kommutatives Monoid mit Einselement t_0 sein und für je zwei Punkte $t \leq t'$ sei eindeutig ein Element $t_1 := t' - t \in T$ mit $t + t_1 = t'$ gegeben. Beispiele von Zeitmengen sind die Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{R}_0^+$, aber auch Intervalle $[0, n]$ in diesen Mengen mit der Verknüpfung $t \oplus t' := \inf \{t + t', n\}$. Im Hinblick auf konkrete Anwendungen sind natürlich solche Zeitmengen von Bedeutung, die wie

die letzten beiden Beispiele beschränkt sind. Ein- und Ausgaben der betrachteten Systeme sind mit der Zeit veränderliche Größen, d.h. Abbildungen $x : T \rightarrow A$. Intervalle $[t, t')$, $[t := \{t' \mid t \leq t'\}]$ usw. werden wie üblich bezeichnet und Einschränkungen von x auf solche Intervalle mit $x|_{[t, t')}$, $x|_t$ usw. A^T bezeichnet die Menge aller Abbildungen von T nach A . Für $t \in T$ sei $\mathfrak{z}_t : A^T \rightarrow A^T$ die Abbildung $\mathfrak{z}_t(x)(t') := x(t+t')$. $\mathfrak{z}_t(x)$ wird auch mit x_t bezeichnet. Für $x, x' \in A^T$ und $t \in T$ sei $x_t x'(t')$ gleich $x(t')$ falls $t' < t$ und $x'(t'-t)$ falls $t' \geq t$.

Um die "Nähe" zweier Eingaben $x, x' \in A^T$ beschreiben zu können, werden ausgehend von einer uniformen bzw. metrischen Struktur auf A ebensolche Strukturen auf Teilmengen $D \subset A^T$ betrachtet. Ist $(A, \mathfrak{u}_A)$ ein uniformer Raum, so bezeichne UPK bzw. UKK bzw. UGK die Uniformität der punktweisen bzw. kompakten bzw. gleichmäßigen Konvergenz auf $D \subset A^T$ ([BGT], X, 1.3). Die UPK, UKK und UGK werden gemeinsam als Abbildungsuniformitäten bezeichnet. Ist (A, d_A) ein beschränkter metrischer Raum, so ist die UPK auf A^T durch eine Metrik erzeugbar, falls T abzählbar ist. Das gleiche gilt für die UKK falls $T = \mathbb{R}_0^+$ ist. Die UGK wird in jedem Falle von der Supremums-Metrik erzeugt.

Sind $f : M \rightarrow N$, $f' : M' \rightarrow N'$ Abbildungen, so bezeichnet $fxf' : M \times M' \rightarrow N \times N'$ die komponentenweise Produktabbildung, $\Delta_M : M \rightarrow M \times M$ bezeichnet die Abbildung $m \mapsto (m, m)$ und id_M die identische Abbildung auf M . pr_i ist die i -te Projektion eines kartesischen Produktes. Ist $f : M \times M' \rightarrow N$ eine Abbildung und $m \in M$, so bezeichnet $f_m : M' \rightarrow N$ die Abbildung $m' \mapsto f(m, m')$.

3. Systeme und Realisierungen

Die einzig exakt meßbaren Größen eines realen Systems sind im allgemeinen Fall die beobachteten Eingaben zusammen mit den zugehörigen Ausgaben. Aus diesem Grunde wird in der allgemeinen Systemtheorie [MT] jede solche Ein-Ausgabe-Relation $S \subset A^T \times B^T$ als T -System bezeichnet, wobei T eine Zeitmenge ist. $DS = \text{pr}_1(S)$ bezeichnet die Menge der zulässigen Eingabefunktionen von S . Ein Modell zur Erzeugung von S heißt Realisierung von S . Wir betrachten hier nur deterministische und sequentielle Realisierungen. Bei gegebener Zeitmenge T besteht eine Realisierung aus einem Tupel $R = (Z, A, B, D, I, f, h, Z_0)$, wobei Z bzw. $Z_0 \subset Z$ Mengen von Zuständen bzw. Anfangszuständen, A bzw. B Ein- bzw. Ausgabemengen, $I = [t_0, i] \subset T$ ein Anfangsintervall mit $i > t_0$, $D \subset A^T$ die Menge der Eingabefunktionen und $f : Z \times D \times I \rightarrow Z$ und $h : Z \rightarrow B$ Transitions- und Ausgabeabbildungen bezeichnen, die den folgenden Axiomen genügen :

Für alle $z \in Z$, $x, x' \in D$, $t, t' \in I$ gilt :

a) Kausalität : $f(z, x, t_0) = z$ und falls $x_t = x'_t$ auch $f(z, x, t) = f(z, x', t)$

b) Transitivität : $x_t x' \in D$ und falls $t+t' \in I$ auch $f(f(z, x, t), x', t) = f(z, x_t x', t+t')$

c) Kommutativität : $x_t \in D$ und $f(f(z, x, t), x', t') = f(f(z, x_t x', t'), (x_t) x', t)$

d) Zeitmenge ist archimedisch bezüglich i : Für jedes Element $t \in T$ gibt es genau eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit $ni \leq t < (n+1)i$. Dabei bedeutet $0i = t_0$

und $n_i = \sum_{j=1}^n i$ für $n > 0$.

Die gerade definierte Realisierung ist vergleichbar mit der Definition eines Systems in [KAF]. Ein Unterschied besteht jedoch in der realitätsnäheren Beschränkung eines Zeitschrittes von einem Zustand zum nachfolgenden. Dies macht es andererseits notwendig, die Transitionsfunktion f rekursiv für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ durch $f^{(0)} = \text{pr}_1$, $f^{(1)} = f_1$ und $f^{(n+1)} := f^{(1)} \circ (f^{(n)} \times \text{id}_{\mathbb{Z}} \Delta_D)$ zunächst auf $f^{(n)} : \mathbb{Z} \times D \rightarrow \mathbb{Z}$ und schließlich auf $f^T : \mathbb{Z} \times D \rightarrow \mathbb{Z}^T$ durch $f^T(z, x)(t) := f(f^{(n)}(z, x), x_{n_i}, t - n_i)$ zu erweitern, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ eindeutig durch $n_i \leq t < (n+1)i$ festgelegt ist. Als globale Ausgabe-Abbildung erhält man schließlich mit $Y = B^T$ $g^T : \mathbb{Z} \times D \rightarrow Y$, $g^T(z, x)(t) := h(f^T(z, x)(t))$. Die Menge $L(z) = \{(x, y) \mid x \in D \wedge y = g^T(z, x)\}$ heißt Leistung von z [BI]. g^T heißt Verhalten von R und $G := \{g_z^T : D \rightarrow Y \mid z \in \mathbb{Z}\} \subset Y^D$ heißt Verhaltensmenge von R . Gelten für ein T-System $S \subset A^T \times B^T$ die Beziehungen $D = DS$ und $S = \{(x, g^T(z, x)) \mid z \in \mathbb{Z}_0\}$, so heißt R eine Realisierung von S . Für ein System S existieren im Allgemeinen nur Realisierungen, bei denen alle Abbildungen partiell sind. Partielle Realisierungen und Kriterien zur Existenz von Realisierungen sind in [V2] untersucht worden. Die Leistung $L(z) \subset X \times Y$ eines Zustandes z ist für partielle Realisierungen gleichermaßen definiert. Durch Induktion zeigt man mit Hilfe der Funktionen $f^{(n)}$ und f^T den folgenden Satz [V4]:

Satz 1: Für das Verhalten g^T der Realisierung R und alle $z \in \mathbb{Z}$, $x, x' \in D$ und $t \in I$ gilt: $g^T(f(z, x, t), x') = g^T(z, x_t) x'_t$

4. Gleichmäßig stetige Realisierungen und Uniformitäten für die Zustandsmenge

In diesem Abschnitt werden Uniformitäten für Z definiert, die die in der Einleitung geforderten Eigenschaften haben. Außerdem zitieren wir Ergebnisse über gleichmäßig stetige Realisierungen, welche wichtige Eigenschaften dieser Uniformitäten deutlich machen. Die Realisierung R heißt gleichmäßig stetig, wenn T, A, B und Z uniforme Räume sind und f und h gleichmäßig stetige Abbildungen sind. Dabei soll $D \subset A^T$ eine Abbildungsuniformität und $I \subset T$ die Spuruniformität tragen [V2, V4].

Satz 2: Das Verhalten g^T der gleichmäßig stetigen Realisierung R ist gleichmäßig stetig bezüglich der UPK oder UKK auf Y und die Verhaltensmenge G ist gleichmäßig gleichgradig stetig.

Ausgehend von einer beliebigen Uniformität auf Y definieren wir eine Uniformität für Z . Die initiale Uniformität auf Z bezüglich der Abbildung $V : Z \rightarrow G$, $z \mapsto g_z^T$ und der UGK auf der Verhaltensmenge G wird als Verhaltensuniformität $\mathcal{U}_V$ auf Z bezeichnet. Eigenschaften von $\mathcal{U}_V$ wurden in [V1] untersucht. Ist $T = \mathbb{N}_0$, so können wir $i = 1$ setzen und R im wesentlichen als Automaten auffassen. Trägt Y die UPK bezüglich der diskreten Uniformität auf B , so läßt sich für $\mathcal{U}_V$ eine Pseudometrik d_V derart angeben, daß $d_V(z, z') = 0$ genau dann gilt, wenn z und z' äquivalente Zustände sind und es gilt $d_V(z, z') \leq 1/2 \cdot 3^{-k}$ genau dann, wenn z

und z' k -äquivalent sind, d.h. wenn sie für alle endlichen Eingabefolgen bis zur Länge k gleiche Ausgaben produzieren [V3].

Satz 3 : Die Mengen A und B der Realisierung R mögen uniforme Räume sein und D eine Abbildungsuniformität tragen. Dann sind f und h gleichmäßig stetig bezüglich der Verhaltensuniformität auf Z und der diskreten Uniformität auf I , wenn G gleichgradig gleichmäßig stetig ist.

Trägt T eine nichtdiskrete Uniformität, dann muß G eine weitere Bedingung erfüllen, die ebenfalls notwendig ist [V2, V4]. Daraus ergibt sich der folgende Satz.

Satz 4 : Ersetzt man in der gleichmäßig stetigen Realisierung R die Uniformität $\mathcal{U}_Z$ des Zustandsraumes Z durch die Verhaltensuniformität $\mathcal{U}_V$, so wird R wieder eine gleichmäßig stetige Realisierung. Außerdem ist $\mathcal{U}_V$ gröber als $\mathcal{U}_Z$.

Dieser Satz impliziert gleichzeitig einen Satz über die Existenz minimaler gleichmäßig stetiger Realisierungen. Wie in [V1] geben wir eine weitere Uniformität für Z an, die ähnliche Eigenschaften wie $\mathcal{U}_V$ hat, jedoch im Gegensatz zu $\mathcal{U}_V$ auch für partielle Realisierungen definierbar ist. Dazu seien die Mengen $X=A^T$ und $Y=B^T$ in R uniforme Räume. Für die Potenzmenge $P(X \times Y)$ des Produktraumes $X \times Y$ ist in kanonischer Weise eine Uniformität $\mathcal{U}_P$ definiert ([BGT], II, 1, ex5). Die initiale Uniformität auf Z bezüglich der Abbildung $L : Z \rightarrow P(X \times Y)$, $z \mapsto L(z)$ heißt Leistungsuniformität $\mathcal{U}_L$ der Zustandsmenge Z .

Satz 5 : Die Leistungsuniformität $\mathcal{U}_L$ ist gröber als die Verhaltensuniformität.

Beide sind jedoch gleich, wenn die Verhaltensmenge G gleichgradig gleichmäßig stetig ist, also insbesondere dann, wenn R eine gleichmäßig stetige Realisierung ist.

5. Präkompaktheit der Zustandsmengen

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob in der Zustandsmenge Z immer eine endliche Teilmenge Z_1 gefunden werden kann, die die am Ende der Einleitung geschilderte Eigenschaft hat, d.h. ob Z präkompakt ist. Ein uniformer Raum $(Z, \mathcal{U}_Z)$ heißt präkompakt, wenn zu jeder Nachbarschaft $W \in \mathcal{U}_Z$ eine endliche Menge $Z_1 \subset Z$ derart existiert, daß $W[Z_1] := \{z \mid \exists z_1 \in Z_1 : (z_1, z) \in W\} = Z$ gilt. Mit dieser Definition zeigt man leicht, daß der oben genannte Potenzraum $(P(Z), \mathcal{U}_P)$ präkompakt ist, wenn $(Z, \mathcal{U}_Z)$ präkompakt ist. Für die folgenden beiden Sätze nehmen wir an, daß X und Y präkompakte uniforme Räume sind. Dies gilt z.B. dann, wenn A und B präkompakt (z.B. beschränkte reelle Intervalle) sind und $X=A^T$, $Y=B^T$ die UPK tragen.

Satz 6 : Die Zustandsmenge Z der Realisierung R ist präkompakt bezüglich der Leistungsuniformität $\mathcal{U}_L$.

Beweis: Mit X und Y ist auch das Produkt $X \times Y$ und der Potenzraum $P(X \times Y)$ präkompakt. $\mathcal{U}_L$ ist als initiale Uniformität der Abbildung $L : Z \rightarrow P(X \times Y)$ präkompakt ([BGT], II, 4.2).

Um die Präkompaktheit der Verhaltensuniformität zu zeigen, muß eine stärkere Voraussetzung gemacht werden.

Satz 7 : Die Zustandsmenge Z der Realisierung R ist präkompakt bezüglich der Verhaltensuniformität $\mathcal{U}_V$, wenn die Verhaltensfamilie G von R gleichgradig gleichmäßig stetig ist, also insbesondere dann, wenn R gleichmäßig stetig ist. Die Bedingung ist sogar notwendig, wenn alle Abbildungen $g_Z^T : D \rightarrow Y$ aus G gleichmäßig stetig sind.

Beweis: $\mathcal{U}_V$ ist als initiale Uniformität bezüglich der Abbildung $V : Z \rightarrow G$ genau dann präkompakt, wenn (G, UGK) präkompakt ist ([BGT], II, 4.3). Daraus folgt die Behauptung mit dem Satz von Ascoli ([BGT], X, 2.5).

Sind X und Y präkompakt, so besagen die Sätze 4 und 7 gerade, daß man die Uniformität $\mathcal{U}_Z$ jeder gleichmäßig stetigen Realisierung R zu der präkompakten Uniformität $\mathcal{U}_V$ vergrößern kann. Eine Richtung von Satz 7 folgt auch aus Satz 5 und Satz 6.

Aus ähnlichen Gründen wie hier wird in [KW] eine Topologie für die Zustandsmenge eines Dialogsystems definiert. Das Dialogsystem kann als Automat mit Zustandsmenge Z und globaler Ausgabeabbildung $h^* : Z \times A^* \rightarrow B^*$ dargestellt werden. Definiert man für beliebige Worte $v \in A^*$, $w \in B^*$ die Menge 'verification-scope' $VSK(v, w) = \{z \in Z \mid h^*(z, v) = w\}$, so erhält man eine Subbasis der in [KW] definierten Topologie τ_{VSK} für Z . Es gilt die folgende äquivalente Definition.

Satz 8 : Es sei $T = \mathbb{N}_0$, $X = A^T$, $Y = B^T$ und $g^T(z, x)(t) := h^*(z, x(0) \dots x(t))$ für alle $z \in Z$ und $x \in X$. Versieht man B mit der diskreten Topologie, Y und $G = \{g_Z^T : X \rightarrow Y \mid z \in Z\}$ jeweils mit der Produkttopologie, so ist die initiale Topologie auf Z bezüglich der Abbildung $V : Z \rightarrow G$ gleich der Topologie τ_{VSK} .

Beweis : Die angegebene Subbasis für τ_{VSK} ist gleich der aus den Mengen $\langle x, 0_w \rangle := \{z \mid g^T(z, x) \in 0_w\}$ ($x \in X$, $w \in B^*$) gebildeten Subbasis, wobei $0_w := \{y \in Y \mid \exists t \in T : y_{t1} = w\}$ ist.

Satz 9 : Der Raum (Z, τ_{VSK}) ist

- genau dann hausdorff'sch, wenn A reduziert ist,
- genau dann diskret, wenn A reduziert und G diskret in Y^X liegt,
- diskret, wenn A reduziert und Z endlich ist,
- uniformisierbar durch eine Uniformität $\mathcal{U}_{VSK}$, und
- präkompakt bezüglich $\mathcal{U}_{VSK}$, wenn B endlich ist.

Beweis : A ist genau dann reduziert, wenn V injektiv ist. Ist B diskret, dann sind Y und G hausdorff'sch. Daraus folgen a) bis c) mit der Charakterisierung von τ_{VSK} in Satz 8. Weiterhin wird die Produkttopologie auf Y von der UPK bezüglich der diskreten Uniformität auf B erzeugt, also τ_{VSK} von der initialen Uniformität bezüglich der Abbildung V und der UPK auf G . Schließlich ist die endliche Menge B präkompakt, was sich auf die UPK von $Y = A^T$ und $G \subset Y^X$ und auf Z überträgt.

Das Ausgabealphabet B des Dialogsystems A in [KW] besteht aus Sätzen über einem endlichen Grundalphabet B_0 . Zur Approximation von Z genügt es wegen Satz 9, e) daher zu fordern, daß B nur aus Sätzen beschränkter Länge besteht.

6. Approximative Realisierungen

Die Präkompaktheit der Zustandsmenge einer Realisierung gestattet die Konstruktion einer approximativen endlichen Realisierung, d.h. einer Realisierung mit endlicher Zustandszahl. Dazu nehmen wir an, daß die Zeitmenge T eines Systems S abzählbar 'gerastert' ist, d.h. S wird über einer abzählbaren Teilmenge $T' \subset T$ betrachtet. Zur Konstruktion einer Realisierung R für dieses T' -System vergleiche man [V2]. Die Approximation des Systems wird nun bezüglich einer endlichen Rasterung $T'' \subset T'$ durchgeführt.

Satz 10: Gegeben sei ein (abzählbar gerastertes) T -System $S \subset A^T \times B^T$ (d.h.

o.B.d.A. $T = \mathbb{N}_0$), bei dem (B, d_B) ein durch 1 beschränkter metrischer Raum ist und eine Realisierung $R = (Z, A, B, DS, I, f, h, Z_0)$ von S , deren Zustandsraum Z präkompakt bezüglich der Verhaltensuniformität $\mathcal{U}_V$ ist.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder endlichen Rasterung $T' = [0, \dots, n] \subset T$ existiert eine endliche Realisierung R' mit endlicher Zustandszahl eines T -Systems S' derart, daß für alle $(x, y) \in S$ ein Paar $(x, y') \in S'$ mit $d_B(y(t), y'(t)) < \varepsilon$ für alle $t \in T'$ existiert.

Beweis: Die UPK auf $Y = B^T$ werde durch die Metrik $d_Y(y, y') := \sum_{t \in T} 2^{-t} d_B(y(t), y'(t))$

und $\mathcal{U}_V$ werde durch die Pseudometrik $d_V(z, z') := \sup \{ d_Y(g^T(z, x), g^T(z', x)) \mid$

$x \in DS \}$ erzeugt, wobei g^T das Verhalten von R ist. Wegen $T = \mathbb{N}_0$ können wir $i = 1$

setzen und für alle $x \in DS$ folgt aus Satz 1: $d_V(f(z, x, i), f(z', x, i)) \leq 2d_V(z, z')$

(I). Zu $\varepsilon' := 2^{-(n+2)}\varepsilon$ gibt es wegen der Präkompaktheit von (Z, d_V) eine endliche

Teilmenge $Z_1 := \{z_1, \dots, z_m\} \subset Z$ und eine Partition $K = \{K_1, \dots, K_m\}$ von Z mit

$z_k \in K_k \subset \overline{B}(z_k, \varepsilon') = \{z' \mid d_V(z_k, z') \leq \varepsilon'\}$ für alle $1 \leq k \leq m$. Wir setzen $A_j^k :=$

$\{x(o) \mid x \in DS \wedge f(z_k, x, i) \in K_j\}$ für $j, k \in \{1, \dots, m\}$ und definieren f' :

$Z' \times DS \times I \rightarrow Z'$ durch $f'(z_k, x, o) = z_k$ und $f'(z_k, x, i) = z_j \iff x(o) \in A_j^k$, $Z'_0 :=$

$\{z_k \in Z' \mid K_k \cap Z_0 \neq \emptyset\}$ und h' als Einschränkung von h auf Z' . Für alle $x \in DS$

und $z_k \in Z'$ gilt dann $d_V(f(z_k, x, i), f'(z_k, x, i)) \leq \varepsilon'$ (II), denn aus $f(z_k, x, i) \in K_j$

folgt $x(o) \in A_j^k$ und $f'(z_k, x, i) = z_j$. Haben zwei Zustände $z, z' \in Z$ den Abstand

$d_V(z, z') \leq \varepsilon'$, so gilt $d_B(h(z), h(z')) = d_B(g^T(z, x)(0), g^T(z', x)(0)) \leq d_Y(g^T(z, x),$

$g^T(z', x)) \leq d_V(z, z') \leq \varepsilon'$ (III) wobei x irgendein Element von DS ist. Wir zeigen

nun, daß das durch die Realisierung $R' = (Z', A, B, DS, f', h', Z'_0)$ erzeugte T -System

S' die gewünschte Eigenschaft hat. Dazu sei $(x, y) \in S$ d.h. $y = g^T(z_0, x)$ für ein

$z_0 \in Z_0$. Zu z_0 existiert ein $z'_0 \in Z'_0$ mit $d_V(z_0, z'_0) \leq \varepsilon'$. Wir zeigen durch Induktion

über t : $d_V(f^T(z_0, x)(t), f'^T(z'_0, x)(t)) \leq (2^{t+1} - 1)\varepsilon'$. Für $t = 0$ gilt

$d_V(f^T(z_0, x)(0), f'^T(z'_0, x)(0)) = d_V(z_0, z'_0) \leq \varepsilon'$ und für $t > 0$ und $z := f^T(z_0, x)(t-1)$,

$z' := f'^T(z'_0, x)(t-1)$ gilt nach Induktionsvoraussetzung $d_V(z, z') \leq (2^t - 1) \varepsilon'$
 d.h. mit (I) $d_V(f(z, x_t, i), f(z', x_t, i)) \leq 2(2^t - 1) \varepsilon'$. Aus (II) folgt
 $d_V(f(z', x_t, i), f'(z', x_t, i)) \leq \varepsilon'$, d.h. insgesamt $d_V(f'^T(z'_0, x)(t), f^T(z'_0, x)(t)) =$
 $d_V(f(z, x_t, i), f'(z', x_t, i)) \leq 2(2^t - 1) \varepsilon' + \varepsilon' = (2^{t+1} - 1) \varepsilon'$. Aus (III) ergibt sich
 schließlich für alle $t \in T'$: $d_B(y(t), g'^T(z'_0, x)(t)) = d_B(h(f^T(z'_0, x)(t)),$
 $h'(f'^T(z'_0, x)(t))) \leq (2^{t+2} - 1) \varepsilon' \leq (2^{n+2} - 1) \varepsilon' < \varepsilon$.

7. Literatur

- [BGT] BOURBAKI, N., General Topology, Hermann, Paris 1966
- [BI] BÖHLING, K.H., INDERMARK, K., Endliche Automaten I, BI, Mannheim 1969
- [KAF] KALMAN, R.E., ARBIB, M.A., FALB, P.L., Topics in Mathematical Systems Theory, McGraw Hill, New York 1969
- [KW] KUPKA, I., WILSING, N., A formal framework for dialog languages, Bericht Nr.2, Institut für Informatik, Hamburg 1972
- [MT] MESAROVIC, M.D., TAKAHARA, Y., General Systems Theory : Mathematical Foundations, Academic Press, New York 1975
- [V1] VALK, R., The Use of Metric and Uniform Spaces for the Formalization of Behavioral Proximity of States, in 1.GI-Fachtagung Automatentheorie und formale Sprachen, Lecture Notes in Computer Science No 2, Springer, Berlin 1973
- [V2] VALK, R., Realisierungen allgemeiner Systeme, erscheint als GMD-Bericht
- [V3] VALK, R., On some Elementary Properties of Uniform Automata, erscheint in Revue Francaise d'Automatique Informatique Recherche Operationnelle,
- [V4] VALK, R., Zeitkontinuierliche topologische Automaten, zur Veröffentlichung vorbereitet,