PROBLEMES DE CONTROLE OPTIMAL EN PHYSIQUE DES PLASMAS

Détermination d'un équilibre dans un Tokamak

par

J.P. BOUJOT, J.P. MORERA, R. TEMAM*

17 - 21 décembre 1973

IRIA

Compagnie Internationale de Services en Informatique (C.I.S.I.)
Commissariat à l'Energie Atomique - SACLAY

* Aussi Institut de Recherche en Informatique et Automatique (I.R.I.A.)

INTRODUCTION

Le Tokamak est une des machines les plus prometteuses actuellement envisagée pour réaliser la fusion contrôlée. Il se compose schématiquement d'une coque toroïdale contenant un plasma que l'on cherche à chauffer intensément sans introduire d'instabilités. Il semble que la forme de la section droite du plasma ait précisément une très grande importance en ce qui concerne la stabilité de l'anneau de plasma et son chauffage. Il semble acquis qu'une forme elliptique est plus avantageuse qu'une section circulaire.

Un problème important se trouve donc être l'étude de dispositifs permettant de donner au plasma une configuration préalablement choisie.

Claude Mercier et Soubbaramayer du Commissariat à l'Energie Atomique⁽¹⁾ proposent pour cela d'introduire dans la cavité entre le plasma et la coque⁽²⁾, des conducteurs électriques : il faut choisir les courants de décharge tel que le plasma soit en équilibre dans la configuration souhaitée.

Notre objet est d'exprimer ce problème, comme un problème de commande optimale que nous formulerons et étudierons dans la suite. L'étude que nous présentons a été menée en étroite collaboration avec le S.T.G.I., en particulier Claude Mercier et Soubbaramayer qui ont joué un rôle déterminant dans la formulation du problème.

Dans le premier paragraphe nous décrivons brièvement :

- . Le Tokamak
- . Les équations régissant le dispositif (on a choisi un modèle linéaire stationnaire)
- . Le problème physique lui-même.

Les deuxième et troisième paragraphes contiennent la formulation et l'étude de différents problèmes de contrôle optimal. La dernière partie contient une description succincte des méthodes numériques de résolution. L'étude numérique systématique des problèmes de contrôle fera l'objet d'une publication ultérieure.

On notera que ce travail étant destiné à être lu (autant que possible) par des physiciens et des mathématiciens, on a cru bon de développer certains détails, classiques pour le spécialiste.

(1) Section Théorique des Gaz Ionisés - Département de Fusion Contrôlée
C.E.A - EURATOM - Fontenay-aux-Roses 92

(2) Il y a le vide entre le plasma et la coque

1 - DESCRIPTION DU PROBLEME

1 - LE DISPOSITIF

Un plasma confiné est en équilibre dans une machine de type TOKOMAK [1] .

COUPE DU TOKOMAK de FONTENAY-AUX-ROSES.

Dans cette configuration, lorsque le plasma est confiné, les lignes magnétiques s'enroulent sur sa surface. En effet, le champ magnétique créé par le courant induit circulant le long du plasma en suivant un grand cercle, a une composante normale à la surface, nulle.

Les premiers résultats expérimentaux [2] , [3] , laissent supposer que la forme de la section droite du plasma est un facteur important du chauffage ohmique. En particulier, pour la même surface de la section droite, on remarque, numériquement, que l'on peut faire passer un courant deux fois plus intense dans une forme elliptique que dans une forme circulaire.

Le but est donc de rechercher les conditions sous lesquelles à l'équilibre le plasma a une section droite de forme donnée.

FORMULATION PRATIQUE PROPOSEE pour résoudre ce problème

. On se fixe la forme du plasma à l'équilibre

. On suppose que pour cet équilibre, on connaît la répartition du champ magnétique $\vec{B}$ méridien, créé par la décharge électrique à l'intérieur du plasma. $\vec{B}$ méridien est tangent à la surface du plasma (qui est donc une surface magnétique).

. Pour confiner le plasma à l'intérieur de la coque sous vide, on cherche à disposer les conducteurs le long de grands cercles du tore et à calculer l'intensité du courant passant : ces courants doivent créer dans la cavité coque-plasma un champ magnétique induit dont la résultante avec le champ magnétique $\vec{B}_m$ est la plus petite possible, en module.

Pour cela, nous avons à notre disposition trois paramètres :

- 1°) - Le nombre de conducteurs N_c
- 2°) - L'intensité du courant dans chacun des conducteurs, I_c
- 3°) - La position des conducteurs dans la coque

Nous serons amenés à introduire une contrainte supplémentaire d'ordre technologique.

$$\sum_{i=1}^{N_c} |I_{c_i}| \quad \text{doit être nettement inférieure à l'intensité totale } I_{\text{total}} \text{ du courant de}$$

décharge à travers le plasma.

Remarque

On ne fait aucune hypothèse sur la surface de la section droite des conducteurs.

II - LES EQUATIONS DE MAXWELL

La répartition d'un champ magnétique créé par un courant est donnée par les équations de Maxwell :

$$(1.1) \quad \text{Rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$(1.2) \quad \text{Div } \vec{B} = 0$$

Etant donnée la symétrie du système, nous utiliserons des coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) où z est porté par l'axe de révolution du tore. On note $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ le trièdre orthonormé usuel en un point donné de l'espace.

Les conducteurs étant placés le long de grands cercles, $\vec{B}$ est indépendant de la variable φ .

L'équation (1-2) s'écrit alors :

$$\text{div } \vec{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0$$

Si nous posons :

$$B_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho}$$

$$B_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial z}$$

l'équation $\text{div } \vec{B} = 0$ est identiquement vérifiée.

Supposons comme en [4] que $B_\varphi = \frac{f(\rho, z)}{\rho}$ et écrivons $\vec{B}$ sous la forme :

$$(1.3) \quad \vec{B} = \frac{\rho}{\rho} \vec{e}_\varphi + \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} \wedge \text{grad } F$$

La quantité $\frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} \wedge \text{grad } F$ est le champ méridien.

Remarques

. Si l'on prend le rotationnel de $\vec{B}$, comme $\text{rot grad } f = 0$, seule reste la composante suivant $\vec{e}_\varphi$, donc :

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{e}_\varphi \left\{ \frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right\} = \mu_0 \vec{J}$$

. Nous avons indiqué que les conducteurs se trouvaient le long de grands cercles du tore, d'où :

$$\vec{J} = \vec{e}_\varphi \cdot J(\rho, z)$$

Alors l'équation (1.1) s'écrit :

$$(1.4) \quad \frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} = \mu_0 \cdot J(\rho, z)$$

. Si nous remplaçons B_ρ et B_z par leurs valeurs fonction de F , nous obtenons l'équation :

$$(1.5) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) = \mu_0 \cdot J(\rho, z)$$

. $\text{grad } F$ représente le vecteur gradient de F dans l'espace $\mathbb{R}^3$; ses coordonnées dans le trièdre local $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ s'écrivent classiquement : $\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}, 0, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$

La signification de l'opérateur divergence est similaire, et on rappelle que :

$$\text{div} (A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi) + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Ainsi,

$$\text{div} \left(\frac{1}{\rho^2} \text{grad } F \right) = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial z} \right) \right\}$$

et l'équation (I.5) s'écrit :

$$(I.6) \quad \boxed{\rho \text{ div} \left(\frac{1}{\rho^2} \text{grad } F \right) = \mu_0 J(\rho, z)}$$

Sachant que :

$$B_z = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho}$$

$$B_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial z}$$

III - LES CONDITIONS AUX LIMITES

Notations :

Ω est l'ouvert constitué par la couronne entre le plasma et la coque

Γ_1 le bord du plasma

Γ_0 la coque

Ω_1 le plasma .

Le but du constructeur est d'avoir sur Γ_1 et Γ_0 , $\vec{B}_{\text{conducteur}} \cdot \vec{\nu} = 0$

et sur Γ_1 $|\vec{B}_{\text{conducteur}}|$ voisin de $|\vec{B}_{\text{méri dien}}|$.

$\vec{\nu}$ étant la normale à la frontière Γ_0 ou Γ_1 .

Sachant que $\vec{\nu} \cdot \vec{e}_\varphi = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\vec{B} \cdot \vec{\nu} &= \left(\vec{e}_\varphi \cdot \frac{\rho}{\rho} + \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{\rho} \wedge \text{grad } F \right) \cdot \vec{\nu} \\ &= \left(\vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{\rho} \wedge \text{grad } F \right) \cdot \vec{\nu} \\ &= \left(\frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} \wedge \vec{\nu} \right) \cdot \text{grad } F = \frac{\vec{\tau}}{\rho} \cdot \text{grad } F\end{aligned}$$

donc $\vec{B} \cdot \vec{\nu} = 0$ si la dérivée tangentielle $\frac{\partial F}{\partial \nu} = \vec{\tau} \cdot \text{grad } F$ est nulle.

La condition aux limites se traduit par :

F est constant sur chacune des frontières Γ_0 et Γ_1 -

La fonction F étant définie à une constante additive près, nous la prenons nulle sur Γ_0 et nous notons γ sa valeur sur Γ_1 -

Soit :

$$(1.7) \quad \begin{cases} F = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ F = \gamma & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

γ est une inconnue du problème.

IV - EN RESUME

. En chaque point s de Γ_1 associons le trièdre défini classiquement par $(\vec{\nu}, \vec{\tau}, \vec{b})$.

Dans ce repère, grad F a pour composantes : $\left(\frac{\partial F}{\partial \nu}, \frac{\partial F}{\partial \tau}, \frac{\partial F}{\partial b} \right)$

De la définition de $\vec{B}$ donnée en (1.3) nous déduisons le champ magnétique sur Γ_1 créé par le courant dans les I_c conducteurs soit :

$$(1.8) \quad \underline{B(J)_{\text{conducteur}}|_{\Gamma_1} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \nu} |_{\Gamma_1} -}$$

. L'objectif est de construire un champ magnétique $\vec{B}_{\text{conducteur}}$ porté par la tangente $\vec{z}$ en chaque point de la frontière Γ_1 , et égal à $\vec{B}_{\text{méridien}}$ donné.

Le problème que l'on a à résoudre se pose donc ainsi :

Dans l'ouvert connexe Ω ci-contre calculer la fonction d'état F solution de :

$$(1.9) \quad \begin{cases} \rho \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} F \right) = \mu_0 J & \text{dans } \Omega \\ F = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ F = \gamma & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

tel que $\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1} = \vec{B}_{\text{méridien}}.$

Nous allons exprimer ce problème sous la forme d'un problème de contrôle :

Un ensemble de conducteurs étant fixés dans Ω , rechercher le contrôle J (J : intensité du courant) tel que F , solution (1.9), minimise la fonction coût, c'est à dire vérifie les contraintes suivantes :

$$(1.10) \quad \begin{cases} \left| \vec{B}_{\text{méridien}} - \vec{B}_{\text{conducteur}} \right| = \left| \vec{B}_{\text{mer.}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_1} \\ \quad \text{nul ou le plus petit possible} \\ \int_{\Omega} |J| d\omega, \quad \text{courant total} \leq I_{\max} \text{ défini précédemment.} \end{cases}$$

Remarque 1

On peut présenter le problème ci-dessus sous une forme équivalente, parfois numériquement plus commode.

Nous pouvons permuter la condition aux limites sur Γ_1 et la première contrainte. Alors le problème s'exprime comme suit :

Chercher J , tel que F , solution de :

$$(1.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho^2} \operatorname{grad} F \right) = \mu_0 J \quad \text{dans } \Omega . \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \nu} = B(J)_{\text{conducteur}} = B_{\text{meridien}} \quad \text{sur } \Gamma_1 . \\ F = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 . \end{array} \right.$$

Vérifie les conditions suivantes :

$$(1.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \text{ est constant sur } \Gamma_1 \text{ et égal à } \gamma . \\ \int_{\Omega} |J| \, d\omega \leq I_{\max} . \end{array} \right.$$

Remarque 11

De la façon dont est défini le courant J dans les problèmes ci-dessus, on constate que les conducteurs occupent tout l'espace compris entre le plasma et la coque.

Si l'on est amené à éliminer des conducteurs dans une zone, cela ne change rien mathématiquement au problème. Il suffit d'imposer que le courant est nul dans cette zone.

II - FORMULATION DE PROBLEMES DE CONTROLE

1 - ETUDE DES EQUATIONS DU SYSTEME

Les équations régissant l'état du système sont essentiellement les équations (I.9) dont nous nous proposons de préciser le sens et la formulation.

Une section droite du tore est rapportée aux axes 0ρ , $0z$, où $0z$ désigne l'axe du tore.

Le plasma occupe le domaine (connexe) Ω_1 de frontière Γ_1 , la coque a pour frontière Γ_0 , et le domaine Ω compris entre Γ_0 et Γ_1 est vide à l'exception des conducteurs électriques dont l'implantation nous intéresse particulièrement. On observera donc que :

$$(II.1) \quad \rho_1 \geq \rho \geq \rho_0 > 0 \quad \text{dans } \overline{\Omega} \cup \overline{\Omega}_1$$

Les équations d'état (I.9) sont en fait à compléter par la condition suivante qui exprime que la circulation de $\vec{B}$ le long de Γ_1 est égale à l'intensité totale I du courant dans le plasma (I est connu = $\int_{\Gamma_1} |\vec{B}_m| d\ell$) : (1)

$$\int_{\Gamma_1} \vec{B}_{vide} \cdot \vec{e} \, d\ell = \int_{\Gamma_1} \vec{B}_{plasma} \cdot \vec{e} \, d\ell = \int_{\Omega_1} \mu_0 J_p \, dx = I$$

soit en terme de F :

$$(11.2) \quad \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \nu} d\rho = I.$$

Pour donner une formulation variationnelle de (1.9) (11.2) on introduit l'espace de Sobolev :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial \rho}, \frac{\partial v}{\partial z} \in L^2(\Omega) \right\}$$

qui est de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(11.3) \quad ((u, v)) = (u, v) + \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

où

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(\rho, z) \cdot g(\rho, z) \cdot d\rho \cdot dz.$$

On considère le sous espace V de $H^1(\Omega)$ formé des fonctions nulles sur Γ_0 et qui sont constantes sur Γ_1 (au sens des théorèmes de trace, cf. Lions-Magenes [1]) ; V est fermé dans $H^1(\Omega)$, c'est un sous espace hilbertien de $H^1(\Omega)$.

On définit aussi sur V le produit scalaire :

$$(11.4) \quad [[u, v]] = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \frac{d\rho \cdot dz}{\rho},$$

où

$$\text{grad } u = \nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

On vérifie que $[[,]]$ est un produit scalaire continu sur V . Par ailleurs en vertu de (11.1) et de l'inégalité de Poincaré,

$$[[u]]^2 \geq \frac{1}{\rho_1} \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 d\rho \cdot dz \geq \frac{c(\Omega)}{\rho_0} \int_{\Omega} u^2 d\rho \cdot dz.$$

Ainsi (II.4) est un produit scalaire hilbertien sur V et la norme associée $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ est équivalente à la norme $\| \cdot \|$ -

Soit $G \in V$; multipliant (I.10) par G et intégrant sur Ω on trouve :

$$(II.5) \quad - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} F \cdot \operatorname{grad} G \, d\rho \, dz + \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \nu} \cdot G \, d\ell = \mu_0 \int_{\Omega} J \cdot G \, d\rho \, dz.$$

Utilisant (II.2) on voit alors que F est solution de (I.10) (II.2) si et seulement si $F \in V$ et vérifie :

$$(II.6) \quad \llbracket F, G \rrbracket = - \mu_0 \int_{\Omega} J \cdot G \, d\rho \, dz + I \cdot \int_{\Gamma_1} G \, d\ell.$$

Utilisant le lemme de Lax Milgram, on voit alors que pour tout J donné dans $L^2(\Omega)$ il existe un F unique dans V , $F = F(J)$ qui soit solution de (II.5) (ou (I.10) (II.4)).

Nous rappelons la terminologie usuelle en contrôle optimal,

. J est le contrôle

. $F = F(J)$ solution de (II.5) est la fonction décrivant l'état du système.

II - FORMULATION DES DIFFERENTS PROBLEMES DE CONTROLE

Rappelons que le but poursuivi est la recherche de courants J répartis dans Ω , tels que la dépense de courant ne soit pas excessive et que, autant que possible :

$$(II.7) \quad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \nu} = B_m \text{ (donnée) sur } \Gamma_1.$$

On peut mesurer le coût du courant soit par son intensité totale, $\int_{\Omega} |J| \, d\rho \, dz$ soit par son énergie $\int_{\Omega} J^2 \, d\rho \, dz$. Nous optons évidemment pour la seconde expression mathématiquement préférable. Nous posons alors les problèmes suivants :

Problème de Contrôle ($\mathcal{P}_A$) Méthode de pénalisation.

Soit $\lambda > 0$ fixé. On cherche $J \in L^2(\Omega)$ qui réalise le minimum de :

$$(II.8) \quad \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \nu} - B_m \right)^2 d\ell + \int_{\Omega} J^2 \, d\rho \, dz.$$

où $F = F(J)$.

Problème de Contrôle (P_0)

On cherche $J \in L^2(\Omega)$, qui réalise le minimum de :

$$(II.9) \quad \int_{\Omega} J^2 \, d\rho \, dz ,$$

parmi toutes les fonctions J telles que :

$$(II.10) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial F(J)}{\partial \nu} = B_m \quad \text{sur } \Gamma_1 .$$

On a les résultats suivants :

Théorème II.1

- (i) Pour tout $\lambda > 0$ fixé, le problème P_λ possède une solution unique définie par le contrôle $\bar{J}_\lambda$ et l'état $\bar{F}_\lambda$
- (ii) Le problème (P_0) possède une solution unique (contrôle $\bar{J}_0$, état $\bar{F}_0$)
- (iii) Lorsque $\lambda \rightarrow 0$,

$$\bar{J}_\lambda \rightarrow \bar{J}_0 \text{ dans } L^2(\Omega) ; \quad \bar{F}_\lambda \rightarrow \bar{F}_0 \text{ dans } H^1(\Omega) .$$

Démonstration

- (i) Par application des théorèmes de régularité pour les problèmes elliptiques (cf. Agmon-Douglis-Nirenberg [1], Lions-Magenes [1]), on voit que l'application affine.

$$(II.11) \quad J \longrightarrow F = F(J)$$

est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$. Par application des théorèmes de traces, l'application

$$F \longrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1}$$

est continue de $H^2(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ et donc $L^2(\Gamma_1)$. L'application

$$(II.12) \quad J \longrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1}$$

est donc continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_1)$.

Il en résulte aisément que la fonction coût en (II.8) est convexe continue en J ; elle est aussi strictement convexe, et tend vers $+\infty$ lorsque $\|J\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty$: Elle atteint donc son minimum sur $L^2(\Omega)$ en un point unique, $\bar{J}_\lambda$. (cf. J.L. Lions [3]). On note $\bar{F}_\lambda$ la solution correspondante de (II.5).

(ii) L'ensemble des contrôles admissibles pour (P_0) est l'ensemble des $J \in L^2(\Omega)$ tels que (II.10) soit vérifié : cet ensemble n'est pas vide. En effet il existe des fonctions F dans $H^2(\Omega)$ telles que :

$$F|_{\Gamma_1} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = \rho B_m.$$

Cette fonction F vérifie la condition

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \nu} d\ell = I,$$

d'après la définition de I (cf. note ⁽¹⁾ p.10). Soit à présent θ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\bar{\Omega}$, égale à 1 dans un voisinage de Γ_1 et à 0 dans un voisinage de Γ_0 . On vérifie aisément que θF est un état admissible et que :

$$J = \frac{1}{H_0} \operatorname{div} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} (\theta F).$$

est un contrôle admissible pour (P_0) ⁽¹⁾

L'ensemble des contrôles admissibles est convexe fermé d'après (II.12). On démontre comme en (i) l'existence et l'unicité d'un contrôle optimal ici noté $\bar{J}_0$ (cf. Lions [3]) ; $\bar{F}_0$ est la solution de (II.5) pour $J = \bar{J}_0$.

(iii) Par définition de $\bar{J}_\lambda$,

$$(II.13) \quad \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\lambda}{\partial \nu} - B_m \right)^2 d\ell + \int_{\Omega} (\bar{J}_\lambda)^2 d\rho dz \leq \int_{\Omega} |\bar{J}_0|^2 d\rho dz.$$

Cela montre que la suite $\bar{J}_\lambda$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$, et que :

$$(II.14) \quad \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\lambda}{\partial \nu} - B_m \right)^2 d\ell \leq c \lambda$$

⁽¹⁾ L'existence de contrôles admissibles pour (P_0) résulte aussi de (iii)

Il existe donc une suite $\lambda_i \rightarrow 0$, telle que $\bar{J}_{\lambda_i} \rightarrow J_*$ dans $L^2(\Omega)$ faible ; d'après (II.11), (II.12)

$$\bar{F}_{\lambda_i} \longrightarrow F(J_*)$$

dans $H^2(\Omega)$ faible, et

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \bar{F}_{\lambda_i}}{\partial v} \longrightarrow \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial F(J_*)}{\partial v}$$

dans $L^2(\Gamma_1)$ faible. D'après (II.14),

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{\partial F(J_*)}{\partial v} = B_m,$$

ce qui montre que J_* est un contrôle admissible pour (P_0) . Par ailleurs, d'après (II.13) :

$$(II.15) \quad \int_{\Omega} (J_*)^2 \, d\rho \, dz \leq \liminf_{\lambda_i \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\bar{J}_{\lambda_i})^2 \, d\rho \, dz \\ \leq \limsup_{\lambda_i \rightarrow 0} \int_{\Omega} (J_{\lambda_i})^2 \, d\rho \, dz \leq \int_{\Omega} (\bar{J}_0)^2 \, d\rho \, dz$$

Ainsi J_* est contrôle optimale pour (P_0) et par l'unicité, $J_* = \bar{J}_0$. On vérifie encore que la suite $\bar{J}_{\lambda}$ tout entière converge vers $\bar{J}_0$ dans $L^2(\Omega)$ faible (raisonner par l'absurde). Utilisant encore (II.15) (avec $J_* = \bar{J}_0$), on voit que :

$$\int_{\Omega} (\bar{J}_{\lambda})^2 \, d\rho \, dz \longrightarrow \int_{\Omega} (\bar{J}_0)^2 \, d\rho \, dz$$

ce qui montre que :

$$\bar{J}_{\lambda} \longrightarrow \bar{J}_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Ensuite (II.11) donne :

$$\bar{F}_{\lambda} \longrightarrow \bar{F}_0 \quad \text{dans } H^2(\Omega) \text{ fort.}$$

La démonstration du théorème est achevée. ■

Remarque II.1

Le contrôle optimal peut-être caractérisé par les relations usuelles d'extrémalité faisant intervenir l'état et l'état adjoint ; cf. Boujot-Morera-Temam [4] où l'on trouvera l'étude numérique des problèmes de contrôle précédents.

III - AUTRE PROBLEMES DE CONTROLE LA METHODE DES MOINDRES CARRES

Nous voulons développer ici une approche différente du problème qui est moins classique du point de vue de la théorie du contrôle, mais qui permet de mettre l'accent sur certaines quantités utiles en physique.

L'étude qui suit est limitée au cas où les courants circulent dans des conducteurs ponctuels dont le nombre N_c et la position (ρ_i, z_i) , $i = 1, \dots, N_c$, sont fixés à priori.

I - UN AUTRE CHOIX DES EQUATIONS D'ETAT

Comme il a été indiqué à la fin de la section I, on peut supposer que : $\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} = B_m$ est exactement vérifiée sur Γ_1 et chercher à réaliser au mieux ou exactement la condition $F =$ constante sur Γ_1 .

Pour préciser (I.11), on introduit l'espace :

$$(III.1) \quad W = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\},$$

qui est un sous espace hilbertien de $H^1(\Omega)$, et qui est aussi de Hilbert pour le produit scalaire $[[\cdot, \cdot]]$.

Remplaçant F par Φ , on voit que le problème (I.11) est équivalent au problème variationnel.

(III.1) Trouver $\Phi = \Phi(J)$ dans W tel que

$$[[\Phi, \Psi]] = - \int_{\Omega} \mu_0 J \cdot \Psi \, d\rho \, dz + \int_{\Gamma_1} B_m \cdot \Psi \, d\rho, \quad \forall \Psi \in W$$

L'existence et l'unicité de Φ découle donc du lemme de Lax-Milgram.

Dans cette nouvelle approche J et $\Phi(J)$ constituent le contrôle et l'état associé ; (I.11) et (III.2) constituent les équations d'état.

II - UTILISATION D'UN DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER

On considère une suite de fonctions W_n définies sur la frontière Γ_1 , qui sont linéairement indépendantes et dont les combinaisons linéaires finies sont denses dans $L^2(\Gamma_1)$. On prendra par exemple dans les applications les fonctions :

$$(III.3) \quad w_n = w_n(s) = \cos 2n\pi \frac{s}{L}, \quad n = 0, 1, \dots$$

où s désigne l'abscisse curviligne sur Γ_1 , et L la longueur totale de Γ_1 .

Pour tout n , on appelle v_n la solution du problème mixte.

$$(III.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho^2} \operatorname{grad} v_n \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ v_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_n}{\partial \nu} = w_n \quad \text{sur } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

Le problème (III.4) est équivalent au problème variationnel (III.2) dans lequel $J = 0$ et $B_m = w_n$:

(III.5) Trouver $v_n \in W$ tel que

$$[[v_n, v]] = \int_{\Gamma_1} w_n \cdot v \, d\ell, \quad \forall v \in W$$

L'existence et l'unicité de v_n découle encore du lemme de Lax Milgram.

On appelle φ_n la trace sur Γ_1 de v_n . On a le :

Lemme III.1

(i) L'espace fermé engendré par les fonctions v_n , est l'orthogonal de $H_0^1(\Omega)$ dans W muni du produit scalaire $[[,]]$.

(ii) Les fonctions $\varphi_n = v_n|_{\Gamma_1}$ sont linéairement indépendantes et forment une partie totale de $L^2(\Gamma_1)$.

Démonstration

(i) Considérons une fonction v de W telle que :

$$[[v, v_n]] = 0, \quad \forall n$$

Alors, d'après (IV.3),

$$\int_{\Gamma_1} w_n \cdot v \, d\ell = 0 \quad \forall n.$$

d'après la définition des w_n , v est nul sur Γ_1 et comme $v = 0$ sur Γ_0 , on a bien $v \in H_0^1(\Omega)$

(ii) Supposons que $\sum_{n=1}^m \lambda_n \cdot \varphi_n = 0$. Alors la fonction $v^* = \sum_{n=1}^m \lambda_n \cdot v_n$ vérifie d'après (III.2).

$$(III.6) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho^2} \operatorname{grad} v^* \right) = 0, \\ v^* = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \text{ et } \Gamma_1. \end{cases}$$

ce qui entraîne que $v^* \equiv 0$, et

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1} = \sum_{n=1}^m \frac{\lambda_n}{\rho} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1} = \sum_{n=1}^m \lambda_n v_n = 0$$

Comme les w_n sont indépendants, $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$, et les φ_n sont donc aussi indépendants.

Il résulte enfin du point (i) que les combinaisons linéaires des φ_n sont denses dans $H^{1/2}(\Gamma_1)$ (= espace des traces sur Γ_1 des fonctions de W), et elles sont donc denses dans $L^2(\Gamma_1)$. ■

Faisons à présent $\Psi = v_n$ dans (III.2), et $v = \Phi$ dans (III.5). Il vient

$$(III.7) \quad \llbracket \Phi, v_n \rrbracket = - \int_{\Omega} \mu_0 J v_n \, d\varphi \cdot dz + \int_{\Gamma_1} B_m \cdot v_n \, d\ell.$$

$$(III.8) \quad \llbracket v_n, \Phi \rrbracket = \int_{\Gamma_1} w_n \cdot \Phi \, d\ell = \int_{\Gamma_1} \Phi \cdot w_n \, d\ell.$$

Si la fonction Φ est constante sur Γ_1 (comme on le souhaite), $\Phi \equiv \gamma$ sur Γ_1 , alors la dernière relation s'écrit :

$$(III.9) \quad \llbracket v_n, \Phi \rrbracket = \gamma \int_{\Gamma_1} w_n d\ell$$

Par comparaison de (III.7) et (III.9) on tire :

$$(III.10) \quad \int_{\Gamma_1} B_m \cdot v_n d\ell - \gamma \int_{\Gamma_1} w_n d\ell = \mu_0 \int_{\Omega} J v_n d\omega, \quad \forall n.$$

Supposons réciproquement qu'il existe un nombre réel γ tel que les conditions (III.10) soient vérifiées pour tout n . Alors utilisant (III.7) et (III.8) on voit que :

$$\int_{\Gamma_1} \Phi w_n d\ell = \int_{\Gamma_1} \gamma w_n d\ell, \quad \forall n.$$

En raison des propriétés des w_n cela implique :

$$(III.11) \quad \Phi|_{\Gamma_1} = \gamma.$$

Ainsi les relations (III.10) sont, au sens précédent équivalentes à (III.11).

III - CAS D'UN NOMBRE FINI DE CONDUCTEURS

On suppose comme indiqué au début de cette section que le courant J est réparti entre N_c conducteurs ponctuels placés en des points (p_i, z_i) fixés. L'inconnue (le contrôle) est l'intensité I_α parcourant le $\alpha^{\text{ième}}$ conducteur, $\alpha = 1, \dots, N_c$;

La fonction Φ peut encore être définie mais plus sous la forme variationnelle (III.2). On utilise à nouveau (I.11) qui devient :

$$(III.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho^2} \operatorname{grad} \Phi \right) = \mu_0 \sum_{\alpha=1}^{N_c} I_\alpha \delta(p - p_\alpha) \cdot \delta(z - z_\alpha) \text{ dans } \Omega, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = B_m \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \Phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

L'existence et l'unicité de Φ résulte par exemple de Lions-Magenes [1] ; Φ est analytique dans Ω en dehors des points $(\rho_\alpha, \bar{z}_\alpha)$.

Si nous supposons les fonctions w_n continues sur Γ_1 , les fonctions v_n seront continues sur Ω , et les relations (III.10) seront valables.

La condition $\Phi = \gamma$ sur Γ_1 sera réalisée si et seulement si

$$(III.13) \quad \int_{\Gamma_1} B_m \cdot v_n \cdot d\ell - \gamma \int_{\Gamma_1} v_n \cdot d\ell = \mu_0 \sum_{\alpha=1}^{N_c} I_\alpha v_n(\rho_\alpha, \bar{z}_\alpha), \quad \forall n$$

Ainsi les relations (III.13) se présentent comme un système linéaire infini pour les $N_c + 1$ inconnues que sont $\gamma, I_1, \dots, I_{N_c}$.

On peut se limiter aux N premières relations (III.13), ce qui signifie que l'on remplace (III.11) par :

$$(III.14) \quad \int_{\Gamma_1} (\Phi - \gamma) w_n \cdot d\ell = 0, \quad n = 1, \dots, N$$

Les équations (III.13) pour $n = 1, \dots, N$, constituent un système linéaire surabondant pour les inconnues $\gamma, I_1, \dots, I_{N_c}$ ($N > N_c + 1$) et on propose de résoudre le système par une méthode de moindre carrés. Cela revient à minimiser la fonctionnelle :

$$(III.15) \quad \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_1} B_m v_n \cdot d\ell - \gamma \int_{\Gamma_1} w_n \cdot d\ell - \mu_0 \sum_{\alpha=1}^{N_c} I_\alpha v_n(\rho_\alpha, \bar{z}_\alpha) \right\}^2$$

Il s'agit donc d'un problème de contrôle optimal beaucoup plus rudimentaire que les problèmes envisagés dans la section II. Toutefois le problème considéré ici fournit des informations très utiles sur les harmoniques de la solution optimale. ■

IV - RESOLUTION NUMERIQUE

ORIENTATION

Nous signalons ici la résolution numérique du problème de contrôle décrit dans III.

Pour résoudre la suite des N problèmes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho^2} \operatorname{grad} F \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ F|_{\Gamma_0} = 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \nu} = w_n|_{\Gamma_1}, \quad w_n = \cos 2\pi n \frac{\rho}{L}, \quad n = 0, \dots, N-1 \end{array} \right.$$

Nous avons utilisé un programme d'éléments finis dû à Terrine et Meurant

Nous donnons quelques exemples pour une configuration droite donnée et une décharge fixée dans le plasma.

Sur chaque page nous avons :

- . Le schéma indiquant la position des conducteurs,
- . La courbe de B méridien,
- . Les différentes approximations de B méridien,
- . La valeur des intensités dans chacun des conducteurs.

L'étude numérique des problèmes de contrôle décrits en II fera l'objet d'un travail ultérieur.

Toutefois, de nombreuses techniques numériques développées ci-après (implémentation de la méthode des éléments finis, calcul numérique de certaines intégrales de surface, ...) constituent déjà une partie significative des travaux numériques ultérieurs.

QUELQUES RESULTATS NUMERIQUES

On donne les caractéristiques de l'expérience numérique simulée :

Le Tokamak est un tore de grand rayon $R = 130$ cm

Le plasma a une section droite elliptique

Cette ellipse a pour caractéristiques $a = 18$ cm

$b = 10$ cm

La décharge électrique dans le plasma

est de

-100 kilo Ampères

La répartition du champ méridien (donné) a été calculée dans cette ellipse suivant une formule établie par MASCHKE.

Le $\vec{B}$ méridien est représenté sur les courbes suivantes. L'origine sur la frontière Γ_1 a été choisie comme indiqué dans le schéma ci-dessous :

Sur chaque feuille nous donnons la triangulation choisie, la place des conducteurs, avec leurs numéros. $\vec{B}_m$ est calculé avec quatre fonctions de bases.

Pour chaque conducteur, la valeur de l'intensité est en kilo Ampère.

Valeurs des intensités dans les conducteurs considérés :

$$I_{15} = -14 \text{ K.AMP}$$

$$I_{75} = -14 \text{ K.AMP}$$

$$I_{98} = -3.7 \text{ k.Amp.}$$

$$I_{40} = 74 \text{ k.Amp.}$$

Valleur des Intensités
dans les conducteurs.

valeur de intensités
dans les conducteurs,
en kiloampères -

$I_{98} = 0.37$	$I_{40} = 22.7$
$I_{113} = 3.45$	$I_{104} = 3.45$
$I_{119} = -1.55$	$I_{91} = -1.55$
$I_{32} = 11.$	$I_{58} = 11.$
$I_{44} = 25.4$	$I_{54} = 25.4.$

BIBLIOGRAPHIE

I.

- [1] L.A. ARTSIMOVICH
TOKOMAK Devices
Nuclear Fusion, 12 (1972), p. 215-252
- [2] G. LAVAL, H. LUC, E.K. MASCHKE, C. MERCIER, R. PELLAT
Equilibre stabilisé et diffusion d'un plasma torique à section transversale non circulaire.
Fourth Conference on plasma physics and controlled nuclear fusion research
(MADISON 1971), IAEA Vienne 1971, Vol. 1. 2 p. 507
- [3] A.V. BORTNIKOV et al
The first experimental results in finger ring TOKOMAK
Sixth European Conference on controlled fusion and plasma Physics, MOSCOU 1973

II.

- [1] J.L. LIONS, E. MAGENES
Problèmes aux limites non homogènes, DUNOD
- [2] AGMON, DOUGLIS, NIRENBERG
Estimate near the boundary for solution of elliptic partial differential equations
Comm. pure applied Math. (12) 1959
- [3] J.L. LIONS
Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles,
DUNOD
- [4] Article à paraître
avec C. MERCIER et SOUBBARAMAYER